

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $3375 = 3^3 \cdot 5^3$;

Очевидно, что восьмизначные числа могут быть составлены из 3-х троек и 3-х пятёрок, оставшихся единиц, или из ~~3-х троек~~ 5-и, 1-ой тройки, и 3-х пятёрок, 3-х единиц.

1.) Когда набор состоит из трёх троек, 3-х пятёрок, 2-ух единиц.

Кол-во вариантов для 5-ок: ~~$\frac{8!}{3!5!}$~~ $\frac{8!}{3!5!} = 56$, аналогично, для троек:

$\frac{8!}{3!5!} = 56$; кол-во вариантов;

Чтобы расставить 3-и тройки нужно 3:

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ - мест; Значит для 3-х троек и

2-ух пятёрок - остаётся 5 мест, чтобы расставить

2-е ~~5-и~~ ^{единицы} нужно $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 2!} = 10$ различных вариантов

Оставшиеся места для пятёрок занимают однозначно, значит кол-во вариантов: $56 \cdot 10 = 560$.

2.) Когда 1-тройка; 1-девятка; 3-и-пятёрки; 3-единица:

Кол-во мест для 5-и: $\frac{8!}{3!5!} = 56$; для единиц:

кол-во вариантов $\frac{5!}{2!3!} = 10$, где 3-и - 2 место,
где 3-и - одно.

Кол-во вариантов:

$$56 \cdot 10 + 56 \cdot 10 \cdot 2 = 3 \cdot 560 = 1680 - \text{кол-во возможных исходов}$$

Ответ: 1680.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy; \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $x > 0$; $y > 0$; Прологорифмируем
первое ур-е в системе по основанию 10

$$\lg x \cdot \lg_{10}\left(\frac{y^5}{x}\right) = 2 \lg xy \cdot \lg y;$$

$$\lg x \cdot (5 \lg y - \lg x) = 2 \lg y (\lg x + \lg y);$$

$$5 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y;$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0, \text{ Тогда данное ур-е}$$

раскладывается, как:

$$2(\lg y - \lg x) \left(\lg y - \frac{1}{2} \lg x\right) = 0, \text{ отсюда:}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg x, & \begin{cases} y = x; (1) \\ y^2 = x; (2) \end{cases} \end{cases} \text{ Тогда, где (1):}$$

$$1.) y = x;$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0; \quad 4x^2 - 8x = 4x(x-2) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 - \text{мощ. корень.} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x = 2; y = 2;$$

$$2.) y^2 = x;$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0; \quad y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0;$$

$$y > 0 \rightarrow y \neq 0; \quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0; \quad = (y-3)(y^2+y-4)$$

$$\begin{cases} y=3; \\ y^2+y-4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3; \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \end{cases} \text{ — лиш. корни.}$$

$$y_1=3; \quad x_1=\sqrt{y}; \quad y_2=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2; \quad x_2=\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2$$

$$x_3=2; \quad y_3=2;$$

Ответ: $(3; 9); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2\right); (2; 2)$.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6; \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9; \end{cases}$$

1.) $y-3-x \geq 0; \quad y-3+x \geq 0;$
 $y \geq x+3; \quad y \geq 3-x;$
 $6 \geq x+3; \quad 6 \geq 3-x;$
 $x \leq 3; \quad x \geq -3;$
 $2y=12;$
 $y=6;$

2.) $y-3-x \geq 0; \quad y-3+x \leq 0;$
 $y-3-x - y+3-x = 6;$
 $x = -3; \quad y \geq 6; \quad y \leq 6; \quad x = -3; \quad y = 6;$

3.) $-y+3+x + y-3+x = 6; \quad 2x=6; \quad x=3; \quad y=0$
 $y-3-x \leq 0; \quad y-3+x \geq 0;$

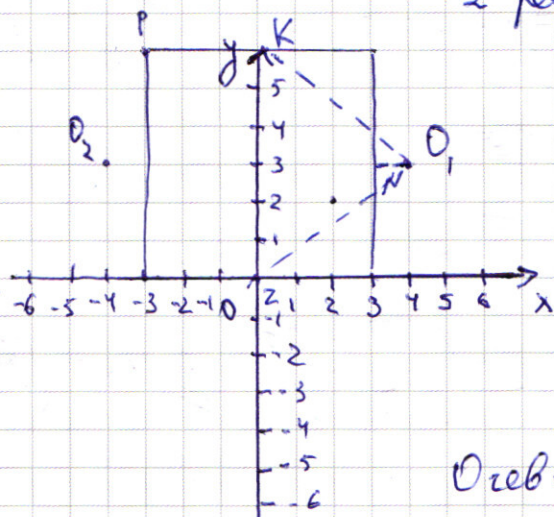
$$x=3, \text{ где } y=0;$$

$$4.) -y+3+x -y+3-x = 6; \quad y=0;$$

$$y-3-x \leq 0; \quad y-3+x \leq 0;$$

$$x \geq -3; \quad x \leq 3;$$

В точках Z, K и N будет достигнуто 2 решения. Очевидно, что Z и K - 1 случай.



O₁ - центр окружности, т.е. уравнение 2 - в системе. Т.к. во 2-ом ур-е - модуль, то где x - равно 3, может подойти и значение x = -2, значит должно достигаться момент касания.

Очевидно, что где a = 1, радиус

равен 1, а значит, что и касается первого

выроста функции. Очевидно, что следующий момент

будет, когда O₁ - будет проходить через вершину.

Будет, когда касание выроста обратит. При $r^2 = 25 = a = 3^2 + 4^2 = 3^2 + 4^2$

Ответ: a = 1; a = 25

N 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

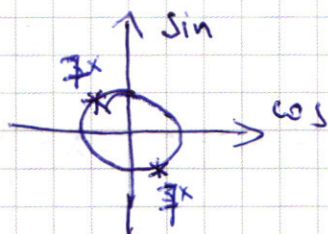
$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x \leftarrow 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) \end{cases}$$

1.)



$$7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2.) -2\sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x + \cos 7x; \quad 2\sin^2 4x = 1 + 2\sin 7x \cos 7x$$

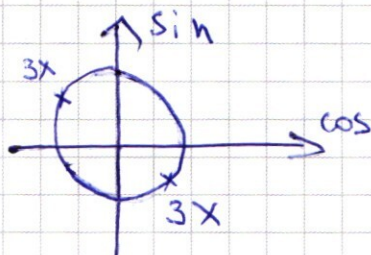
$$2\sin^2 4x - 1 = \sin 14x; \quad -\cos 8x = \sin 14x;$$

$$-\cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 3x - \sin 11x \sin 3x = \sin 11x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cos 11x$$

$$-\cos 11x (\sin 3x + \cos 3x) = \sin 11x (\sin 3x + \cos 3x)$$

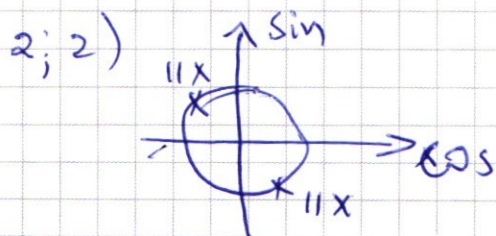
$$\begin{cases} \sin 3x = -\cos 3x, & (1) \\ \sin 11x = -\cos 11x, & (2) \end{cases}$$

$$2; 1) \quad \sin 3x = -\cos 3x$$



$$3x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z};$$



$$11x = \frac{3\pi}{4} + \pi r, \quad r \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{3\pi}{44} + \frac{\pi r}{11}, \quad r \in \mathbb{Z};$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, & k \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{3}, & m \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{\pi r}{11}, & r \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

№6

Дано:

$$r=5$$

$$A \in \omega_1, \omega_2;$$

$$B \in \omega_1, \omega_2;$$

$$\angle CAD = 90^\circ;$$

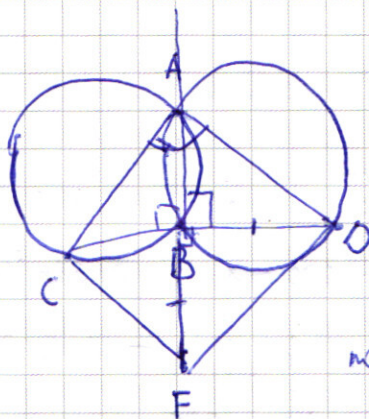
$$BF = FD;$$

Найти:

$$a) CF = ?$$

б.)

Решение:



AB - радикиальная ось ω_1 и ω_2 ; т.к. $\angle DBF = 90^\circ$,
то $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$, т.к. $\triangle FBD - \text{р/б}$,
по условию

т.к. AB - рад ось, и на CD лежит точка

B, то очевидно из свойств рад/осей

$CB = BD$, т.к. $r_1 = r_2$; а значит, что $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$, AD - диаметр, а значит $AD = 10$;

$$10 = 2x^2; x = \sqrt{5} = BD = CB;$$

$$AD = FD = CF = 10, \text{ т.к. } \triangle ABD = \triangle BDF =$$

$$= \triangle CBF \Rightarrow \text{а значит соответственные элементы}$$

$$\text{также равны } CF = 10.$$

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}, & 2^{x+3 \cdot 2^{65}} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x, \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x;$$

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 0;$$

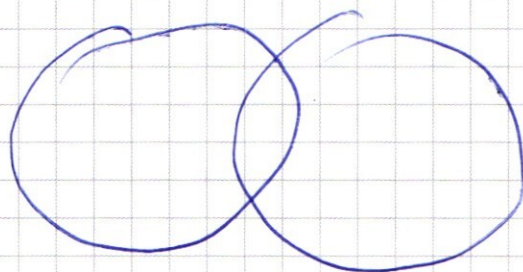
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

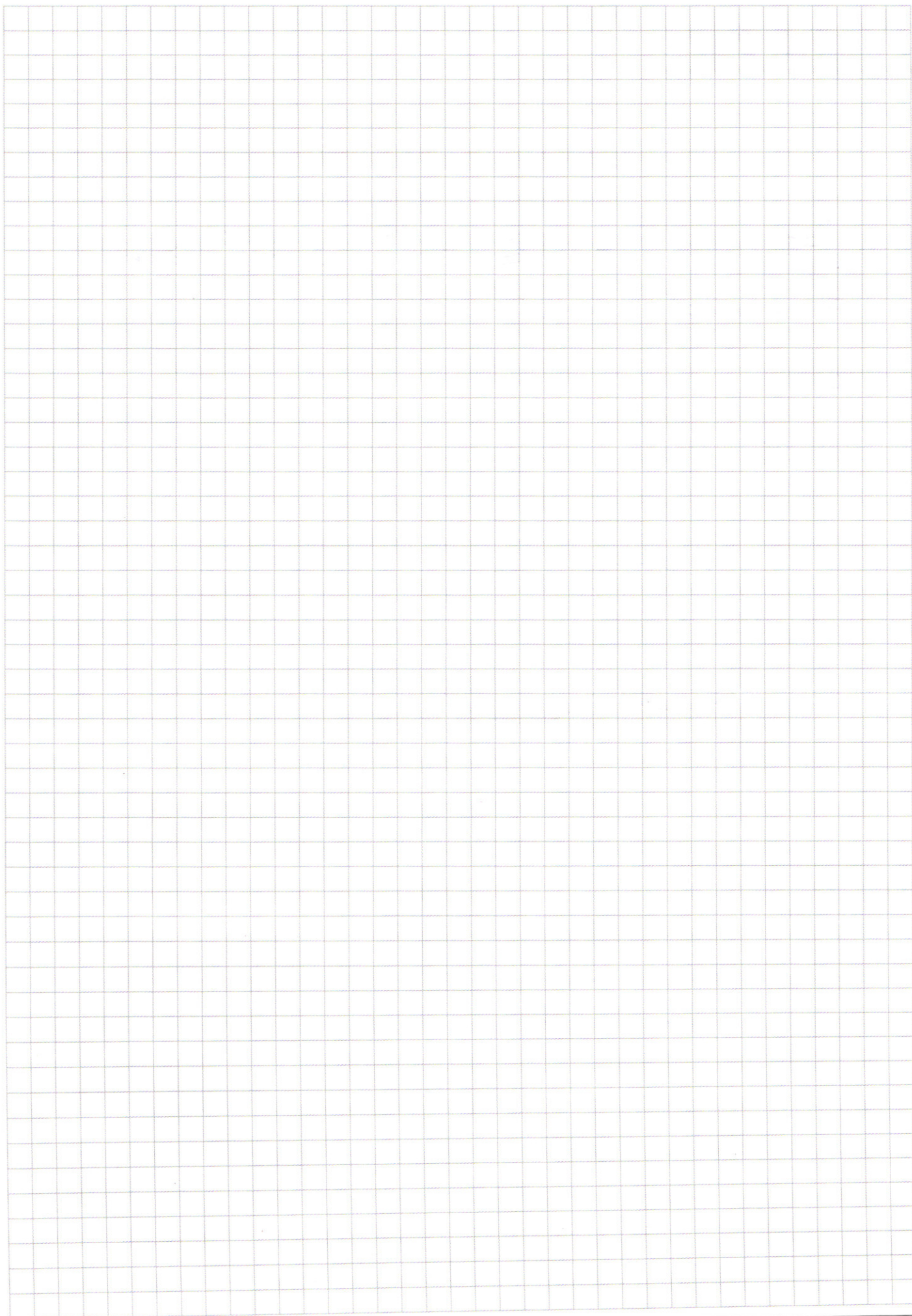
$$70 + (x \cdot 2^{64} - x) - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0;$$

$$70 + x \cdot 2^{64} - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

70

NC







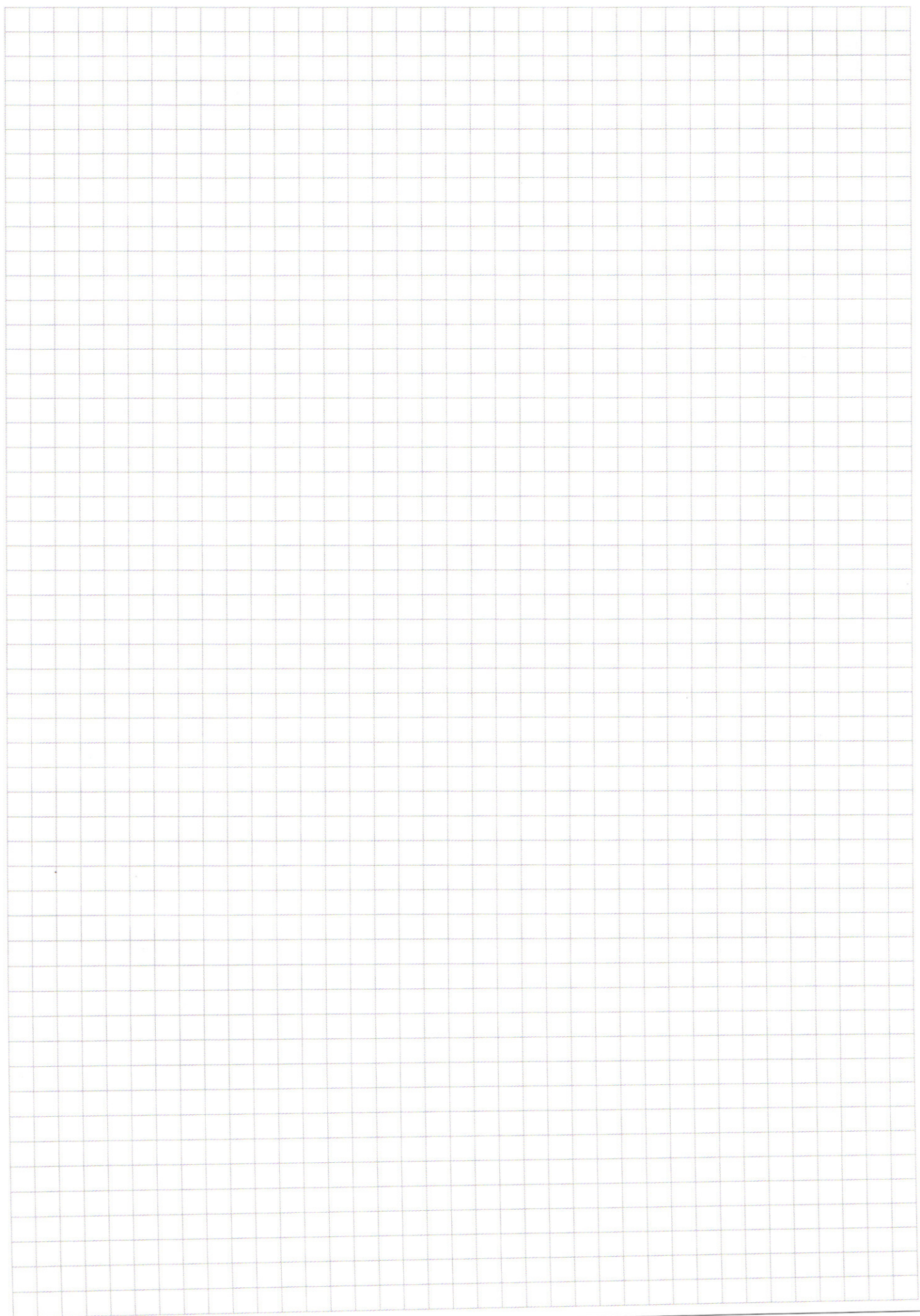
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

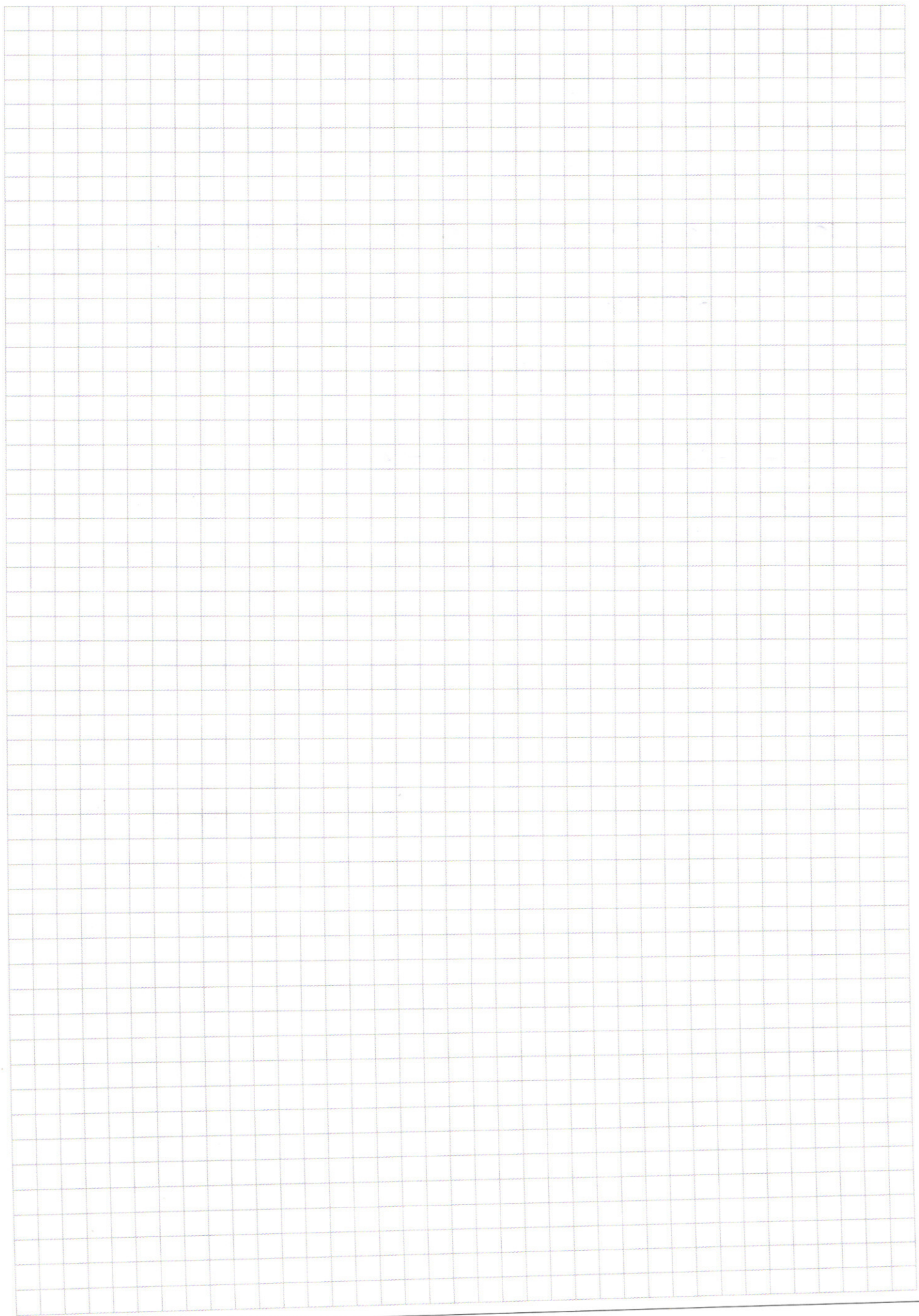
$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$\cos 11x - \cos 3x$$

$$\sin (14)x =$$

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6;$$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 9;$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375; \quad \begin{array}{r} 3375 \overline{) 3} \\ 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \overline{) 375} \\ 125 \\ \overline{) 5} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 33 \overline{) 33.5} \\ 3 \times 11 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 225 \\ \overline{) 1125} \\ 225 \\ \overline{) 3375} \end{array}$$

$$15^3$$

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ & = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 (9) \quad 120 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = 24 y^2 \lg x y;$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 120 \\ \hline 126 \\ + 63 \\ \hline 2560 \end{array}$$

$$5 \lg x \cdot \lg \left(\frac{y^5}{x}\right)^3 = 2 \lg x y \cdot \lg y$$

$$5 \lg x \cdot (\lg y - \lg x) = 2 (\lg x + \lg y) \cdot \lg y$$

$$\begin{array}{r} 6! \\ \hline 3!3! \\ \hline 3! \\ \hline 2! \\ \hline 560 \\ \hline 3360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0891 \\ \hline 1680 \\ \hline 0954 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$3 - 2\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$= 17.$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65},$$

$$y \leq 70 + 2(2^{64} - 1) \cdot x;$$

$$1 + 1/6$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x &= y \lg^x y \end{aligned} \right.$$

$$C_3^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = \lg x \cdot y^5 - \lg^2 x$$

$$5 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x y \cdot \lg y$$

$$3 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x y + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0 \quad t = \frac{1}{2} k;$$

$$2t^2 - 3tk + k^2 = 0, \quad x > 0; y > 0;$$

$$2(t-k)\left(t - \frac{1}{2}k\right) = 0; \quad \lg x = \lg y$$

$$y=3;$$

$$\begin{cases} x=y; \\ y^2=x; \end{cases}$$

$$\lg x = \lg y$$

$$2 \lg y = \lg x;$$

$$\frac{1}{2}k^2 - 1,5k^2 + k^2 = 0.$$

$$1) x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0;$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0; x=2=y;$$

$$2) y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\lg y = t^2; 2\lg y = \lg x; y^2 = x;$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0;$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y^2 + 12) = 0;$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y^2 + 12 = 0;$$

$$27 - 18 - 36 + 12$$

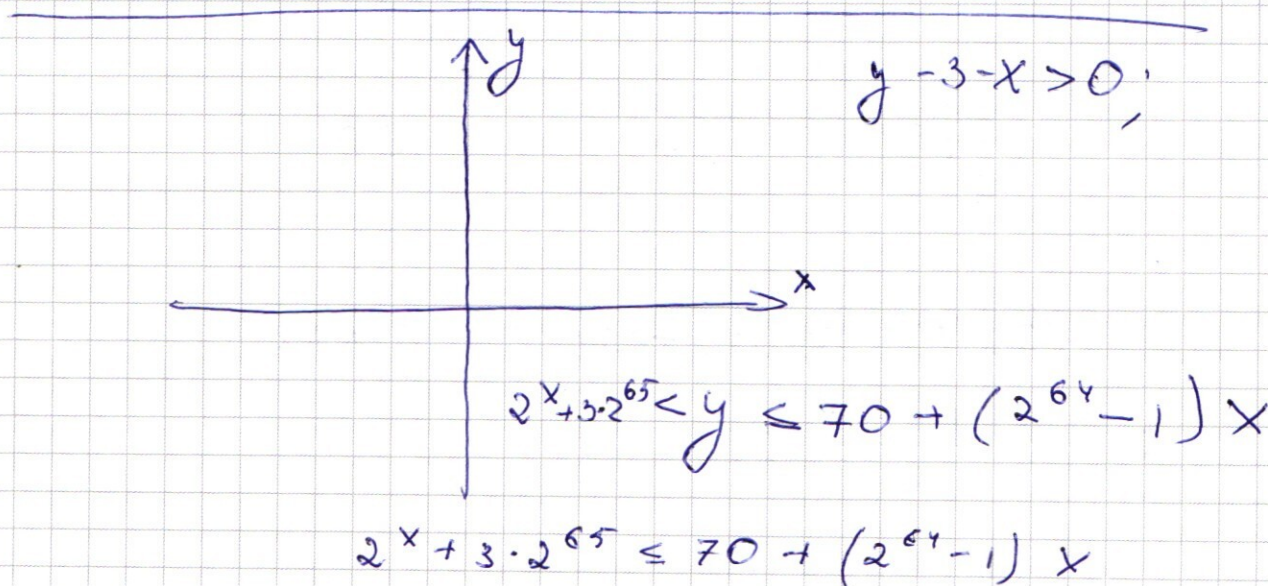
$$8 - 8 - 14$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\lg y = 2$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x$$

2



$$3 - 3 - 4^{-2}$$

$$\sin x + \cos x = ?$$

$$2 \cos 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 14x = 2 \sin$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{8!}{3!(5!)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$56^2$$

$$\cos 11x + \cos$$

2

$$\cos(-x) = \cos x ; \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(11x) + \cos(-x) + \sin(-11x) + \sin 3x$$

$$\sin(x)$$

$$\sin x + \cos x = ?$$

$$\left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right)^2$$

$$3 \times 3$$

$$3 \times 5$$

$$2 \times 1$$

$$\frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$2 \sin \frac{11x - 3x}{2} \cos$$

$$2 \sin 4x \cos 7x ;$$