

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 25 \\ \hline -25 & 135 \\ \hline 87 & 10 \\ -75 & 35 \\ \hline 125 & 35 \\ -125 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \sqrt{27} \\ + 875 \\ \hline 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{l} 223 \\ 3! = 6 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\frac{6!}{1!} =$$

$$\begin{array}{l} 5553 \quad 9 \quad 111 \\ 555333 \quad 11 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{l} 223 \\ 232 \\ 322 \end{array}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$G_k = \frac{3}{4} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{l} 2224 \\ 2422 \\ 2242 \\ 2222 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2245 \\ 2452 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2245 \\ 2425 \\ 2452 \end{array}$$

$$\cos 110^\circ - \cos 30^\circ - \sin 110^\circ + \sin 30^\circ = \sqrt{2} \cos 140^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= X \\ \alpha - \beta &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{X+y}{2} \\ \beta &= \frac{X-y}{2} \end{aligned}$$

$$\cos X - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{X+y}{2} \cdot \sin \frac{X-y}{2}$$

$$-2 \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 110^\circ + \sin 30^\circ = \sqrt{2} \cos 140^\circ$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= X \\ \alpha - \beta &= y \end{aligned}$$

$$\sin X - \sin y = 2 \sin \frac{X+y}{2} \cos \frac{X-y}{2}$$

$$\sin 30^\circ - \sin 110^\circ = 2 \cdot \sin \left(-\frac{40^\circ}{2}\right) \cdot \cos 70^\circ$$

$$-2 \sin 40^\circ \cdot \sin 40^\circ = 2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sqrt{2} \cdot \cos 140^\circ$$

$$-2 \sin 40^\circ (\sin 70^\circ + \cos 70^\circ) = \sqrt{2} (\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ)$$

$$(\sin 70^\circ + \cos 70^\circ) (-2 \sin 40^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 70^\circ + \sqrt{2} \sin 70^\circ) = 0$$

$$2 \sin 40^\circ = \sqrt{2} (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)$$

$$\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)$$

$$\sin 40^\circ = \cos 45^\circ \cdot \sin 70^\circ - \cos 70^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin \left(70^\circ - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 70^\circ = \cos 70^\circ$$

$$\sin 70^\circ + \cos 70^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 70^\circ \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 70^\circ \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin \left(70^\circ + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$X = -y + 4$$

$$y^{3 \log x} = x^{\log y} \cdot y^{2 \log y}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg 4}$$

$$\left(\frac{y^3}{1-y} \right)^{2 \lg y} = y^{2 \lg 2} = 2^2 = 4$$

$$\frac{(1-y)^{\lg(4-y)}}{(1-y)^{\lg(4-y)}} = \frac{(4-y)^{\lg 4}}{(4-y)^3 \lg(4-y) - 2 \lg 4}$$

$$y^{3 \lg(y) - 2 \lg y} \lg\left(\frac{(y-y)^3}{y^2}\right)$$

$$\lg(y \cdot \lg(\frac{(4-y)^3}{y^2})) = \lg(y) + \lg(\lg(4-y))$$

$$\lg\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right) \cdot \lg y = \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$(\lg(4-y) + \lg\left(\frac{(4-y)^2}{y}\right)) \cdot \lg y = \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$\lg(4-y)(\lg y - \lg(4-y)) = -\lg\left(\frac{4-y}{y}\right) \cdot \lg y$$

$$\lg(4-y) \lg\left(\frac{y}{4-y}\right) = -\lg y \cdot \lg\left(\frac{4-y}{y}\right)$$

$$\lg(y) (\lg y - \lg(y)) = -\lg y \cdot (2\lg(y) - 2\lg y)$$

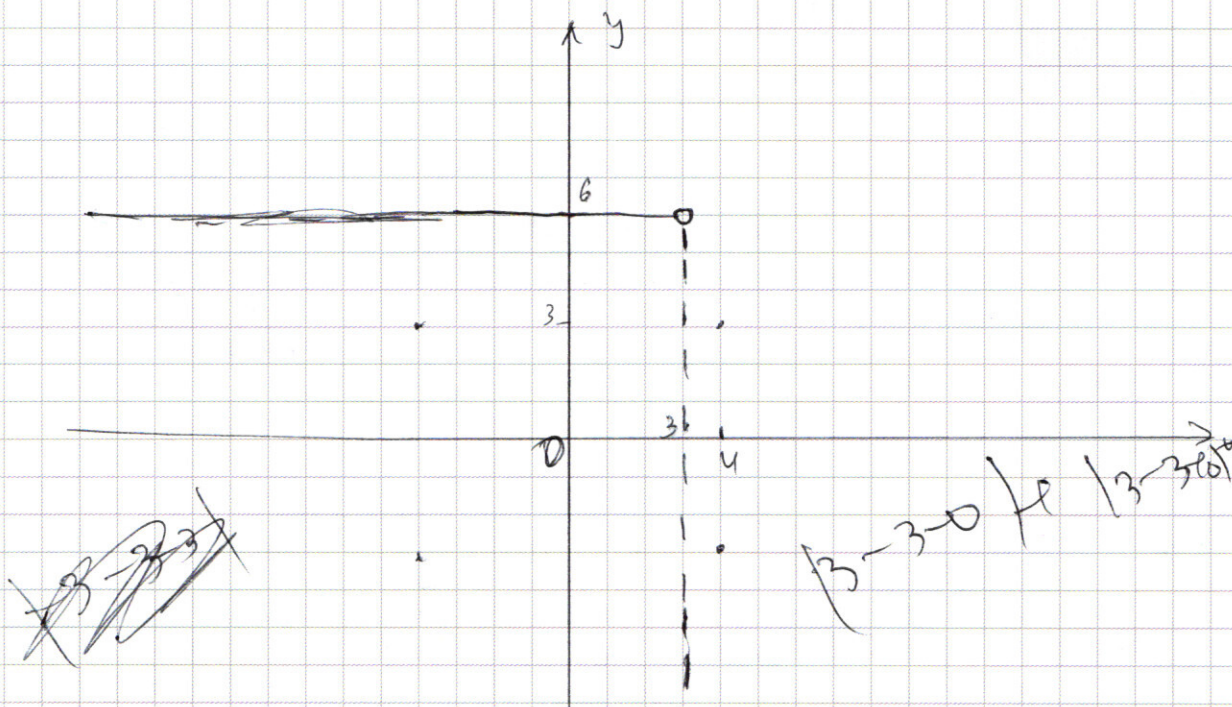
$$\lg(4-y) \cdot \lg y - \lg^2(4-y) = -2 \lg y \cdot \lg(4-y) + 2 \lg^2 y$$

$$3 \lg y: \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2 \lg^2 y$$

$$(\lg(u-y) + \lg(y))^2 - 5 \lg y \cdot \lg(u-y) + \lg^2 y = 0$$

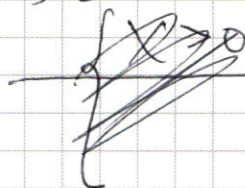
$$\log(4-y) (\log y - \log(4-y) + 2 \log y) = 2 \log^2 y$$

$$\log(4-y) (3 \log y - \log(4-y)) = 2 \log^2 y$$

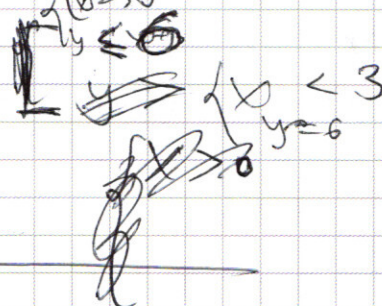


$$\begin{cases} y-3 \leq x \\ x-y+3 + y-3+x = 6 \\ y-3 > x \\ y-3-x+y-3+x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ -2x = 6 \\ y > x+3 \\ 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x &\leq 0 \\ y &\leq -x+3 \\ y-3 &\leq -x \end{aligned}$$



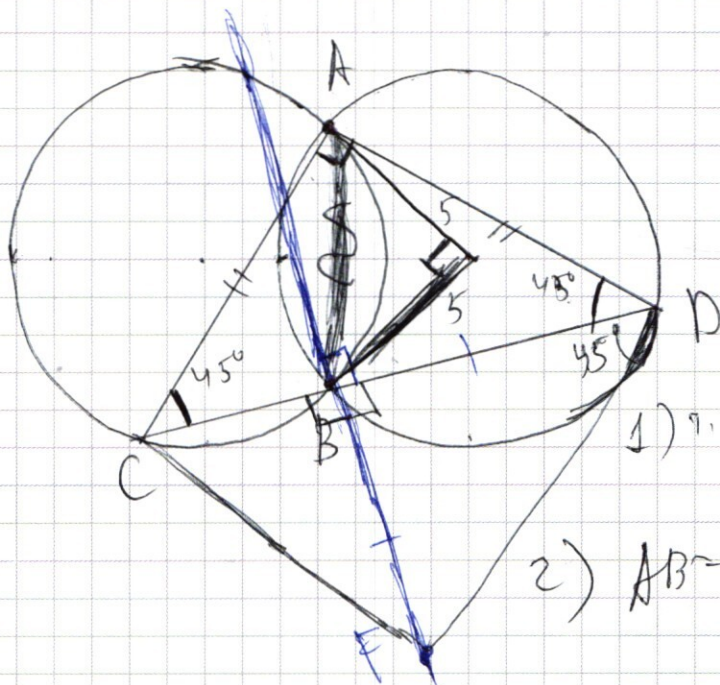
$$\begin{aligned} y-3 &\leq -x \\ x &> 0 \end{aligned}$$



$$x \in (-3, 3)$$

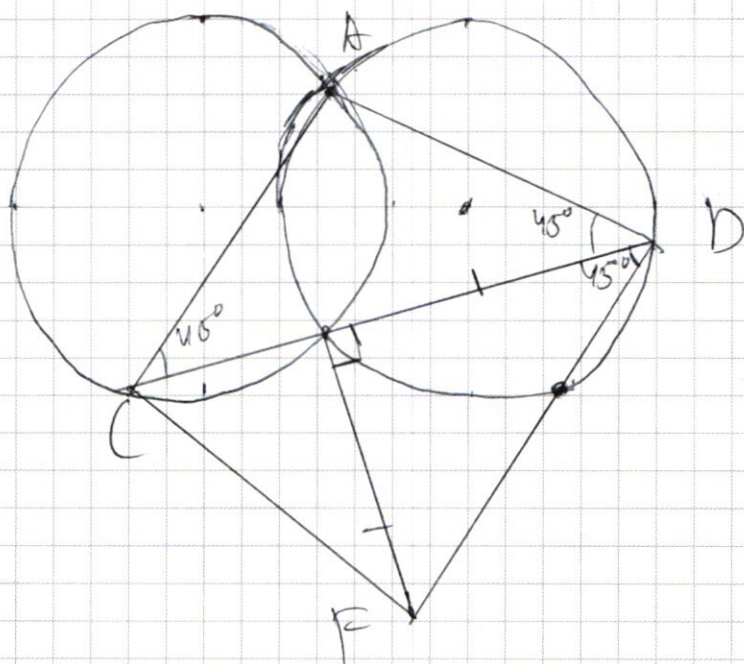
$$\begin{aligned} |6-3-(-3)| + |6-3-3| &= 6 \\ |4-x| + |-4-x| &= 6 \\ |4-x| + |x-4| &= 6 \\ x-y &= 8-\sqrt{12}+1 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) т.к. $R_1 = R_2$, то для равновесия
равные грузы $\rightarrow$ АСР-н/с

2) $AB = 5\sqrt{2}$



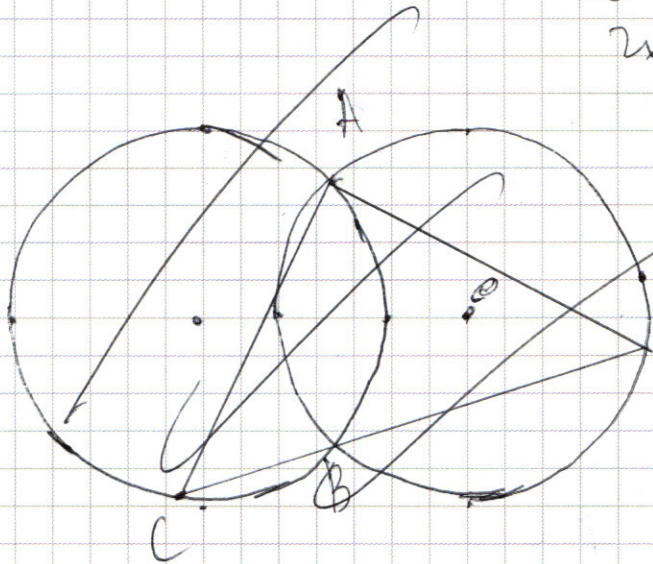
lg y = x

$$x^2 = -y^2 + 3xy$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 4y^2 = 5y^2$$

$$x = \frac{3y \pm \sqrt{5}y}{2}$$



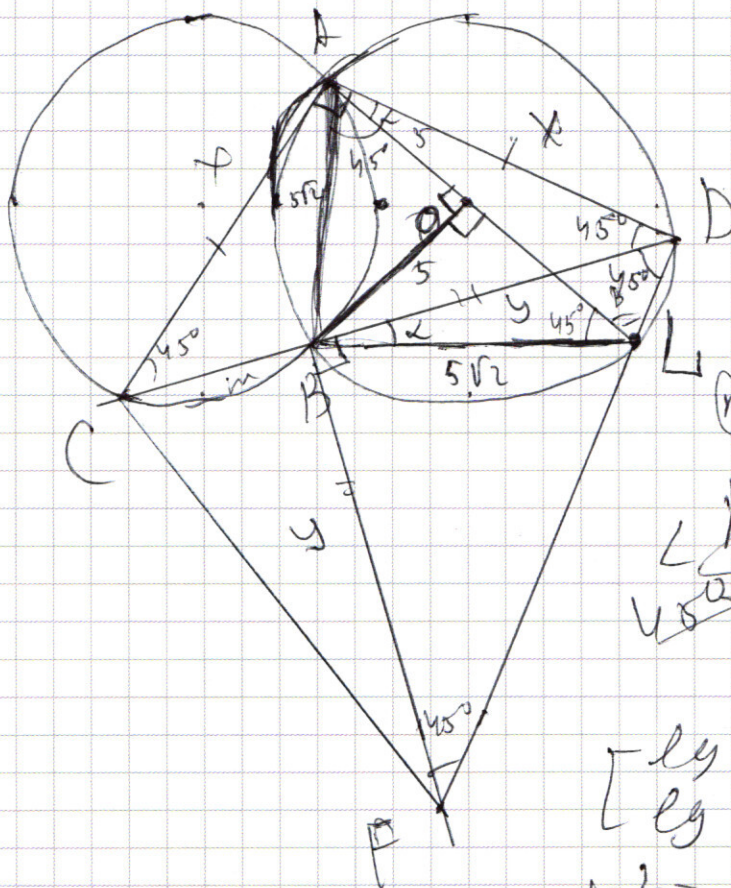
AC ⊥ PD

ACFD — ромб

$$90^\circ - 2$$

$$180^\circ - 90^\circ + 2 = 90^\circ + 2$$

AL — диаметр



$$\angle A + \angle L = 180^\circ$$

$$45^\circ + 2 + 45^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\lg y = \lg(u-y)$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$p = 1 + 1 = 2$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x &= y^3 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\text{ОПЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\lg xy = \lg x + \lg y$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = y^2 \lg x \cdot y^3 \lg y$$

$$\frac{y^5 \lg x}{y^2 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4(y+2)^2 - 4(-3y^2 + 12y) = 4(y^2 + 4y + 4) - 48y + 48 = 4y^2 - 32y + 56 = 4(y^2 - 8y + 14) = 4(y-4)^2$$

$$x = \frac{2(y+2) \pm 2(y-4)}{2} = \frac{2y+4 \pm 2y-8}{2} = \frac{4y-4}{2} = 2y-2$$

$$x = \frac{2y+4 - 2y+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x = \frac{2(y+2) + 4y-4}{2} = \frac{6y+4-4}{2} = 3y$$

$$x = \frac{2(y+2) - 4y^2 + 4}{2} = \frac{-4y^2 + 4y + 8}{2} = -y^2 + 2y + 4$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x = 3y$$

$$y^{3 \lg 3y} = (3y)^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y} \quad \lg(y^{\lg 3y}) = \lg 3^{\lg 3y}$$

$$\frac{y^{3 \cdot \lg 3y}}{y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg 3y}} = 3^{\lg 3y}$$

$$\begin{aligned} \lg 9 \cdot \lg y &= \lg 3y \cdot \lg 3 \\ 2 \lg 3 \cdot \lg y &= \lg 3y \cdot \lg 3 \\ \lg 3 (2 \lg y - \lg 3y) &= 0 \\ 2 \lg y &= \lg 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{2 \lg 3y - \lg 3y - \lg 3y} &= 3^{\lg 3y} \\ y^{2(\lg 3y - \lg y)} &= 3^{\lg 3y} \\ y^{2 \cdot \lg 3} &= 3^{\lg 3y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{\lg 9} &= 3^{\lg 3y} \\ \underline{y=3} \\ \underline{x=9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{\lg 3y} &= 3^{\lg 3y} \\ \lg 3 + \lg y &= \lg 3 + \lg y \\ 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} &= 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= y^{2 \lg 3} - 3^{\lg 3y} \\ f'(y) &= 2 \lg 3 \cdot y^{2 \lg 3 - 1} - 3^{\lg 3y - 1} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^6 &\Rightarrow \text{функция монотонно возрастает} \\ 2 \lg y &= \lg 3 + \lg y \\ \lg y &= \lg 3 \Rightarrow \underline{y=3}, \underline{x=9} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 (продолжение)

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) & (1) \\ \lg(y) = \frac{\lg(4-y)}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad y = 4-y \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$(2) \quad y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad \text{— не подходит по ОДЗ}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

Задание 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=6 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}$$

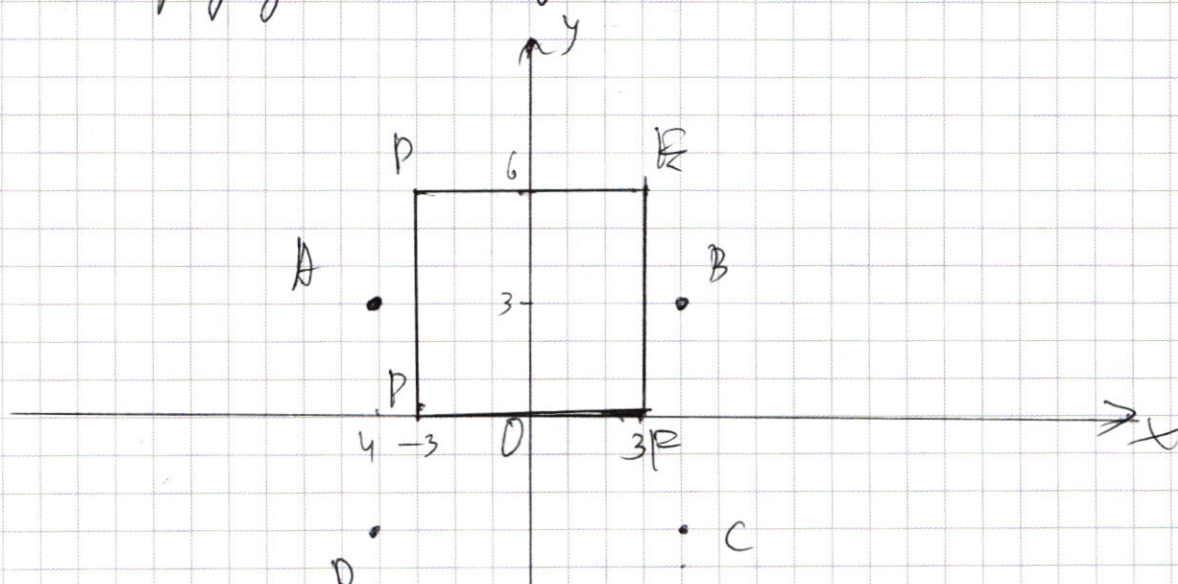
$$\begin{cases} y=6 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y \in [0; 6] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3 \\ y \in [0; 6] \end{cases}$$

(2) Это уравнение четырёх окружностей с центрами соответственно $(4; 3); (-4; 3); (4; -3); (-4; -3)$ и радиусами $\sqrt{a} \Rightarrow a \geq 0$.



A, B, C, D - центры окр. будут только в углах. Два решения будут только в углах. Когда окр. с центрами A и B будут касаться квадрата DEFP. Это будет при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Разложить 3375 на простые
множители.

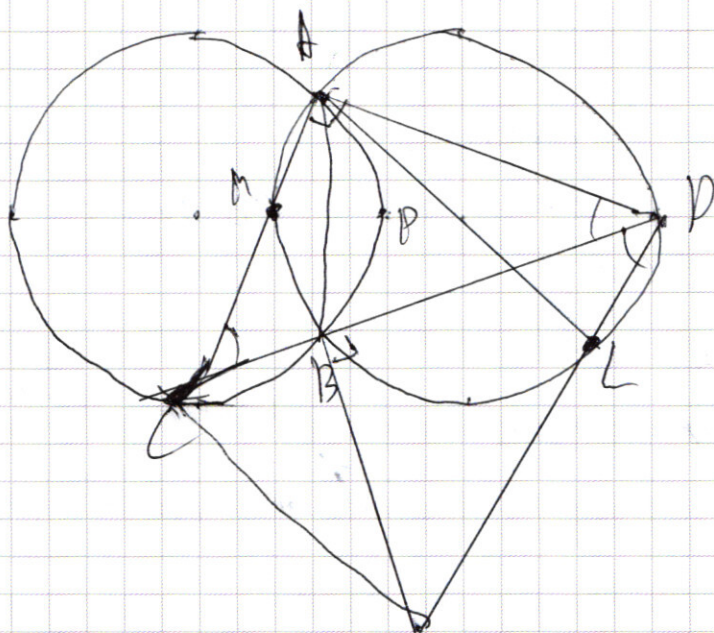
$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Значит числа могут быть
составлены из двух наборов чисел:

- 1) $1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5$
- 2) $1, 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5$

Далее считаем сочетания
 C_n^k для каждого набора и
суммируем. Получается 15768 .Ответ: 15768 .

Задача 8.



- 1) $\angle AMB = \angle APB$ равные дуг равных радиусов. Значит, углы $\angle ACD$ и $\angle ACP$ тоже равны, так как опираются на равные дуги.
- 2) Из 1) $\triangle ACD - \text{пр}$ и $\angle ACD = \angle ACP = 45^\circ$
- 3) $\angle BPD = \angle BDF$, так. $\triangle BDF - \text{пр}$ (т.к. по упр. $BP \neq BF$)
- 4) Значит, $\angle BPD = \angle BDF = 45^\circ$
 $\angle ACP = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DP$
- 5) $\angle ALD = \angle APD$ (опираются на одну дугу) ($\angle CAD + \angle ADF = 90^\circ$)
 $\angle APD = \angle CPD \Rightarrow \angle CPD = \angle ALD \Rightarrow AL \parallel CP$
- 6) Из 4) и 5) $AL \parallel CP$, $AC \perp DP \Rightarrow AC \perp AL$ - параллельно $\Rightarrow CP = AL$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6 (прод.)

2) $\angle APL = 90^\circ \Rightarrow PL - \text{кас.}$

$\Downarrow$

$AL = 10 \Rightarrow \underline{CP = 10}$

Ответ а) 10.

б) $BC = 6 \Rightarrow AO$ т. пер. AB и AC .

$BP = 8.$

$AB = 5\sqrt{2}.$

AO т. пер. AB и AC .

$AC = \sqrt{24}$

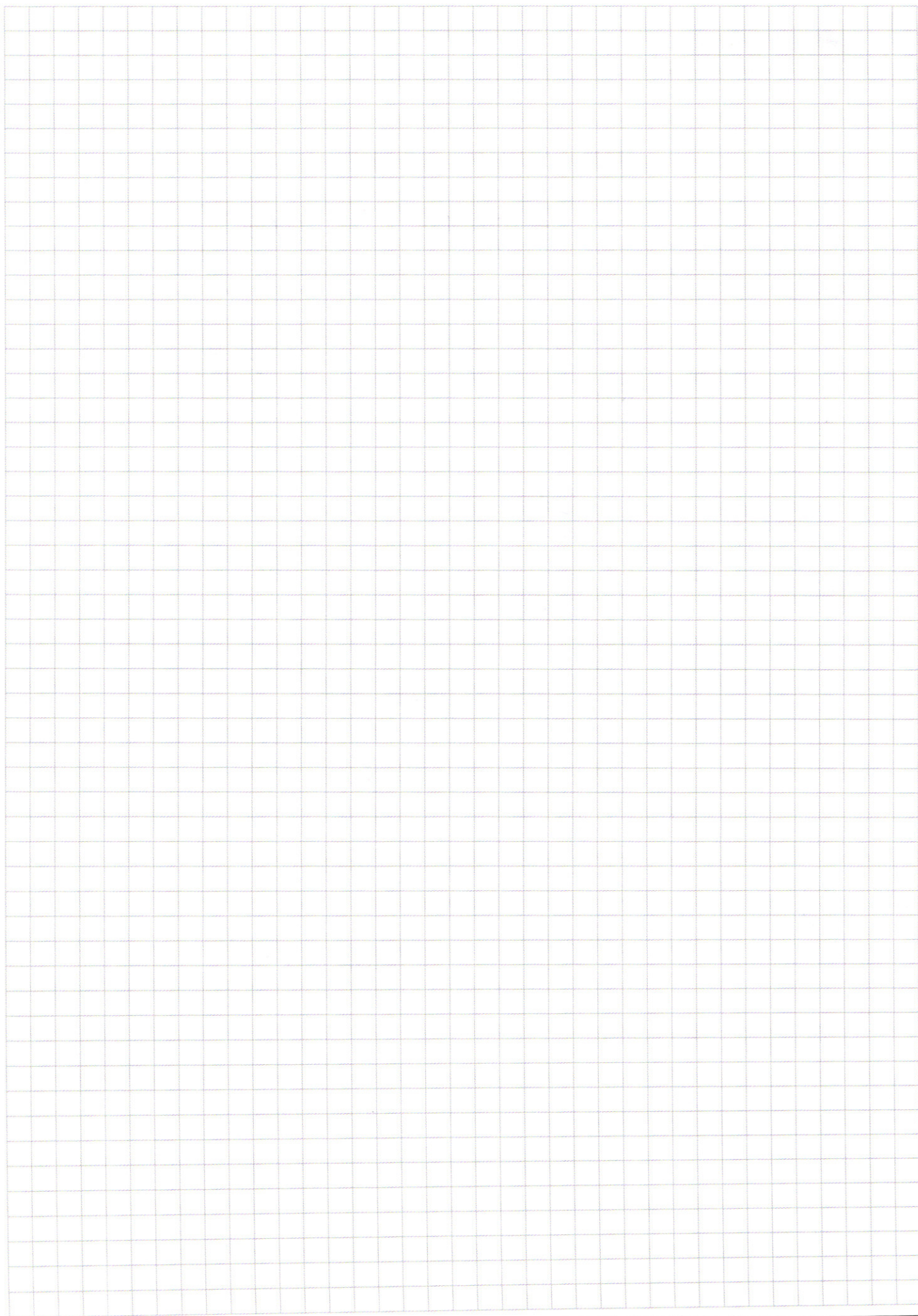
$AP = 2\sqrt{32}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{a+b+c}{2}$ где $\triangle ABC$

Ответ а) 10

б) ...



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

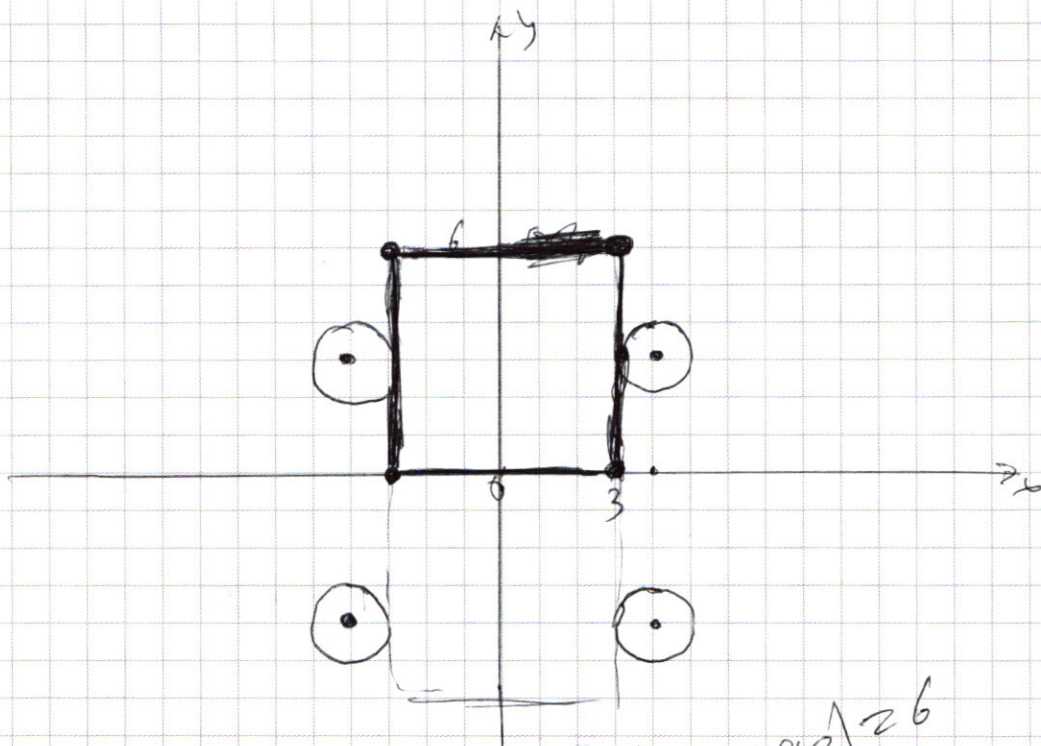
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten work on graph paper, including a geometric diagram and various numerical sequences.

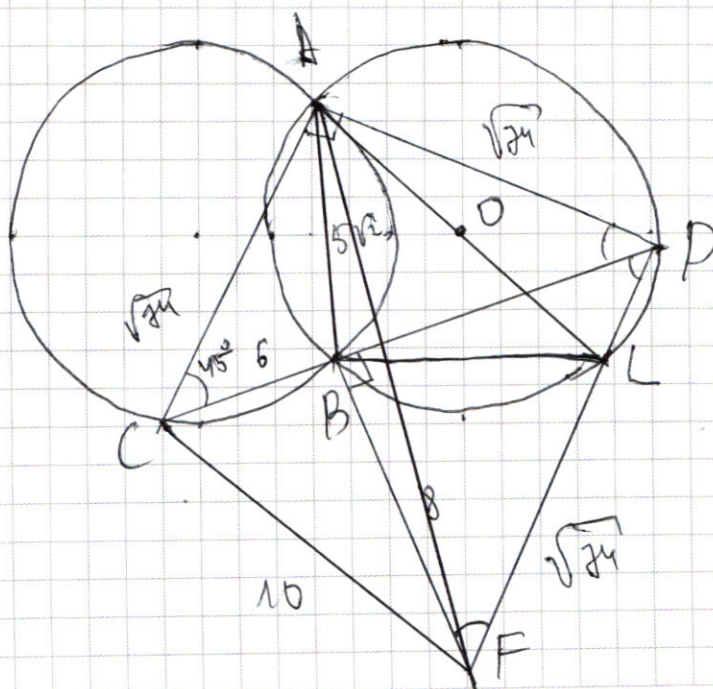
Geometric Diagram: A large triangle with vertices labeled C_3 (top-left), B (top-right), and S (bottom-left). Inside the triangle, there are points labeled K , O , and L . Dashed lines connect these points and extend towards the vertices. A point A_1 is marked near C_3 .

Numerical Sequences and Notes:

- Top right: $111 \ 333 \ 555$
- Below that: $1 - 3 - 3 - 3 - 5 - 5 - 5 - 7$
- Below that: $111 \ 3 \ 9 \ 555$
- Below that: $4.$
- Below that: $9(1)$
- Below that: $111 \ 555$ (crossed out)
- Below that: $15 \ 15 \ 15$ (crossed out)
- Below that: 115515
- Below that: $15 \ 15 \ 15$
- Below that: C_4
- Below that: $5 \ 5 \ 5$
- Bottom left: A tree diagram starting from 9 and branching into $1, 3, 5$, with further sub-branches.
- Bottom center: $3 \ 9 \ 1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 5$



$$\begin{aligned}
 &|7-3-4| + |7-3-4| = 6 \\
 &|4-6| + |4-6| = 6 \\
 &|6-4| + |6-4| = 6 \\
 &|6-4| + |6-4| = 6 \\
 &[0, 0] \\
 &26 \\
 &26
 \end{aligned}$$



$$a = R^2$$

$$R = 1$$

$$a = 1$$

$$\begin{aligned}
 &10 \\
 &50 = 36 + R^2 - 2 \cdot 6 \cdot R \cdot \cos 60^\circ \\
 &14 = R^2 - 5.12 \\
 &R^2 = 74 \\
 &R = \sqrt{74}
 \end{aligned}$$

$$AF = 2\sqrt{32}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (2) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (1) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \\ x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y &= 0 \\ D &= (y+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = -y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} &= y^{2 \lg xy} \\ \frac{y^{5 \lg x}}{y^{2 \lg x}} &= x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y} \\ y^{3 \lg x} &= x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y} \end{aligned}$$

Подставим $x = 3y$:

$$\begin{aligned} y^{3 \lg 3y} &= (3y)^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y} \\ \frac{y^{3 \lg 3y}}{y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg 3y}} &= 3 \end{aligned}$$

$$y^{3 \lg y - 2 \lg y - \lg 3y} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^2 (\lg 3y - \lg y) = 3^{\lg 3y}$$

$$y^2 \lg 3 = 3^{\lg 3y}$$

~~Прологарифмируем~~ Прологарифмируем обе части!

$$\lg(y^{2 \lg 3}) = \lg(3^{\lg 3y})$$

$$2 \lg 3 \cdot \lg y = \lg 3y \cdot \lg 3$$

$$\lg 3 (2 \lg y - \lg 3y) = 0$$

$$2 \lg y = \lg 3y$$

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg y = \lg 3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

Подставим

$$x = -y + 4$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{\lg(\frac{(4-y)^3}{y^2})} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{\lg(\frac{(4-y)^3}{y^2})} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

~~Прологарифмируем~~ Прологарифмируем обе части!

$$\lg(\frac{(4-y)^3}{y^2}) \cdot \lg y = \lg^2(4-y)$$

$$\lg(4-y) (\lg y - \lg(4-y)) = - \lg y \cdot \lg(\frac{(4-y)^2}{y})$$

$$\lg(4-y) \cdot (\lg y - \lg(4-y) + \lg 2y) = 2 \lg y$$

$$\lg(4-y) \cdot (3 \lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg^2 y$$

Обозначим $\lg y = t$, $\lg(4-y) = m$

$$2t^2 - 3tm + m^2 = 0 \quad \begin{cases} t = m \\ t = \frac{m}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$1. -2\sin 7x + \sin 4x = \cos 11x - \cos 3x$$

$$2. \sin 3x - \sin 11x = -2\sin 4x + \cos 7x$$

$$3. \cos 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

Следовательно из 1, 2 и 3:

$$-2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2\sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 7x = -\cos 7x \quad (2) \\ \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x - \cos 7x) \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 4x &= \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x \\ \sin 4x &= \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{11}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \sin 7x = -\cos 7x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m, m \in \mathbb{Z}$$

Answers

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$