МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$ => искомые восьмизначные числа состоят из двух единиц, трёх 5 и трёх 3. Всего вариантов перестановок $8!$ Но т.к. если переставлять 5 друг с другом ~~что~~ то них ничего не изменится => с учётом этого вариантов $\frac{8!}{3!}$ Но также существует $3!$ перестановок троек и $2!$ - единиц => искомое кол-во чисел: $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$ = (полиномиальный коэффициент, по сути) =

$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 2} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2 = \boxed{560}$

Ответ: 560 чисел

Задача №3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

1) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$

$y^{5\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$

$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x} \iff 10^{\lg y(3\lg x - 2\lg y)} = 10^{\lg^2 x} \iff \lg(y)(3\lg x - 2\lg y) = \lg^2 x$

$\lg^2 x - 3\lg x \lg y + 2\lg^2 y = 0 \Rightarrow \lg x = \frac{3\lg y \pm \sqrt{9\lg^2 y - 8\lg^2 y}}{2} = 2\lg y \,//\, \lg y$

2) • $\lg x = 2\lg y \iff \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow$ Подставляя в у-ие (2)

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$

Т.к. $y \neq 0$, то

$y^3-2y^2-7y+12=0$ Заметим, что $y=3$ подходит под корень. Имеем:

$(y^2+y-4)(y-3)=0 \Rightarrow y=3 // \frac{-1+\sqrt{17}}{2} // \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$ тк $y>0$, то

$(x;y)=(9;3)//\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

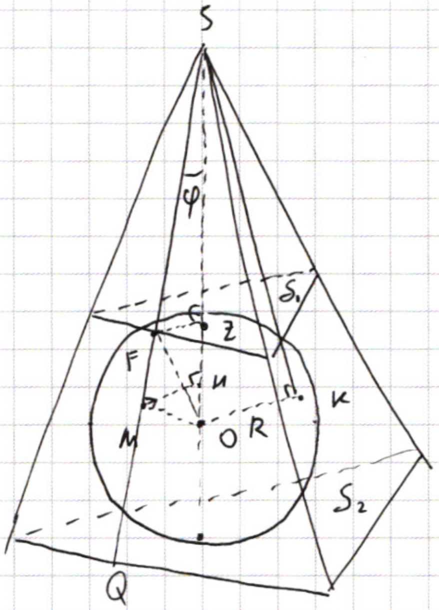
- $\lg x=\lg y \Leftrightarrow \begin{cases} x,y>0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x^2-2x^2-4x-3x^2+12x=0$

$-4x^2+8x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0//2 \Rightarrow$ под систему подходит лишь $x=2 \Rightarrow (x;y)=(2;2)$

Ответ: $(x;y)=(9;3)//(2;2)//\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Задача № 4



1) • Пусть R – радиус окружности, а S_1 и S_2 – данные сечения площади 1 и 4 соответственно; $\varphi=\angle MSO$

Тогда, тк S_1 и $S_2 \perp OS$, то $\frac{S_{S_1}}{S_{S_2}}=\left(\frac{SF}{SQ}\right)^2=$

$=\left(\frac{(SO-R)}{\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{SO+R}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SO-R}{SO+R}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2SO-2R=SO+R$

$SO=3R$

• Следует отдельно сказать про точку Z – точку касания сферы с сечением S_1. Т.к $S_1 \perp OS$ и $S_1 \perp OZ=R$, то $Z \in OS$

2) • Рассмотрим $\triangle KSO, \triangle MSO, \triangle LSO$: SO - общая, $OM=OL=OK=R$, один угол прямой $\Rightarrow \triangle KSO=\triangle MSO=\triangle LSO \Rightarrow \angle KSO=\angle MSO=\angle LSO=\varphi$

• $\triangle OMF=\triangle OZF$, тк $MF=FZ$ как касательные из одной точки и $\triangle SFZ \sim \triangle SOM \Rightarrow \frac{SF}{SO}=\frac{FZ}{MO}=\frac{SZ}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{SO}=\frac{SZ\cdot\operatorname{tg}\varphi}{MO}$

$\frac{1}{3\cos\varphi\cdot R}=\frac{\sin\varphi}{R\cos\varphi} \Rightarrow \sin\varphi=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\varphi=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) • Опустим перпендикуляр MH_m из M к OS, аналогично проведём LH_L и KH_K. Заметим, что $\triangle LH_LS$, $\triangle MH_mS$ и $\triangle KH_KS$ равны по катету и остр углу $\Rightarrow$ $SH_m = SK_K = SH_L = SH$ $\Rightarrow$ $MKL \perp OS$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow MKL \parallel S_1$

• Отсюда получаем:

$$\frac{S_{MKL}}{S_{S_1}} = \left(\frac{SM}{SF}\right)^2 \Rightarrow S_{MKL} = S_{S_1}\cdot\left(\frac{OS\cdot\cos\varphi}{\frac{SZ}{\cos\varphi}}\right)^2 = S_{S_1}\cdot\left(\frac{3R\cdot\cos^2\varphi}{2R}\right)^2 =$$

$$= 1\cdot\frac{9}{4}\cdot\cos^4\varphi = \frac{9}{4}\cdot(1-\sin^2\varphi)^2 = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^4 = \frac{9}{4}\cdot\frac{8^2}{9^2} = \boxed{\frac{16}{9}}$$

Ответ: $\angle KSO = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, $S_{MKL} = \frac{16}{9}$

Задача № 5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x| = 6 & (1)\\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2 = a & (2)\end{cases}$$

1) Рассмотрим ур-ие (1):

• $\begin{cases} y-3-x \geq 0\\ y-3+x \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 3+x\\ y \geq 3-x\end{cases} \Rightarrow y-3-x+y-3+x=6 \Rightarrow y=6$

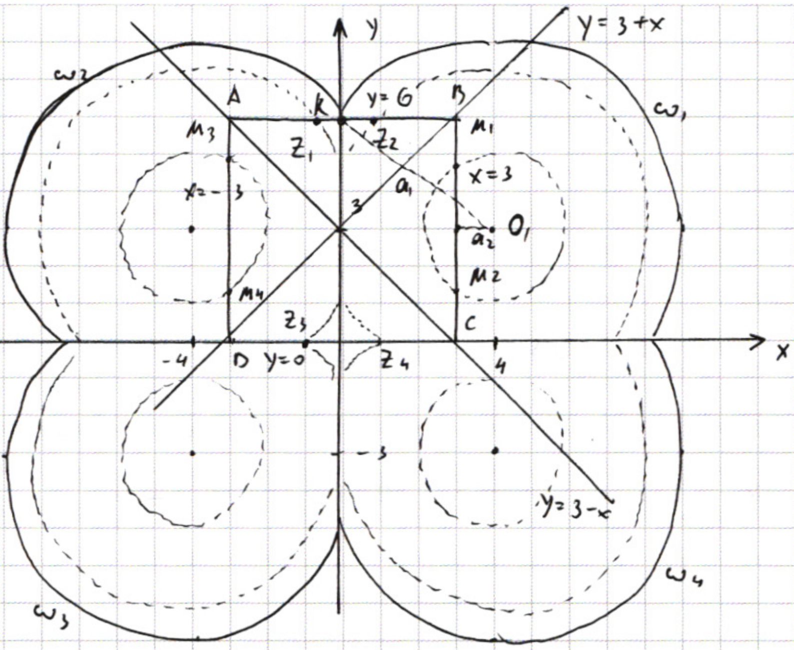
• $\begin{cases} y < 3+x\\ y \geq 3-x\end{cases} \Rightarrow x-y+3+y-3+x=6 \Rightarrow x=3$

• $\begin{cases} y \geq 3+x\\ y < 3-x\end{cases} \Rightarrow y-3-x+3-x-y=6 \Rightarrow x=-3$

• $\begin{cases} y < 3+x\\ y < 3-x\end{cases} \Rightarrow 3+x-y+3-y-x=6 \Rightarrow y=0$

2) Теперь построим множество решений у-ия (1) на графике и графи у-ия (2). Для этого надо построить окр радиуса $\sqrt{a}$ с центром в т $(4;3)$ и симметрично её отразить относ Ox и потом Oy

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



• Решения у-ия (1) образуют квадрат $ABCD$.

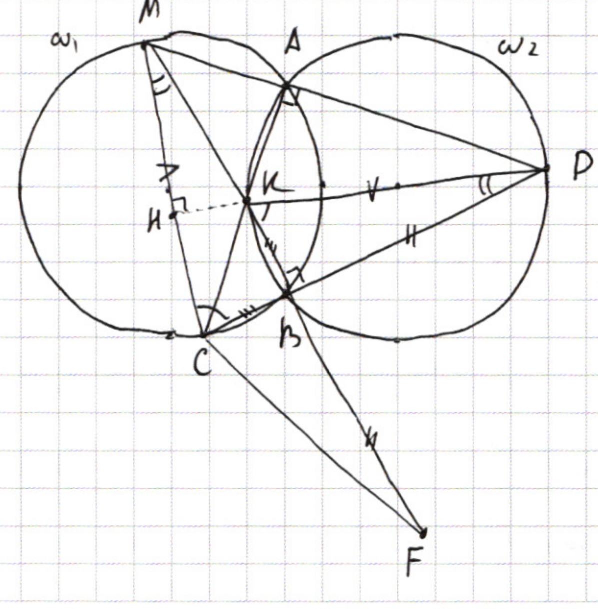
• Теперь заметим, что в силу симметрии отн-с $y=3$, если система имеет решения Z_1 и Z_2, то она имеет и решения Z_3 и Z_4 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ для достижения условия требуется, чтобы точки Z_1 и Z_2, Z_3 и Z_4 — совпадали $\Rightarrow \sqrt{a} = O_1K = \sqrt{4^2+3^2} =$ $= 5 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $a = 25$

• Если же окружности ω_1 и ω_2 пересекают не AB и CD, а AD и BC, то будут, по аналогии с предыдущим пунктом, и решения M_1, M_2, M_3 и M_4, если только M_1 и M_2, M_3 и M_4 не совпадают $\Rightarrow$ 2 решения будет, если ω_1 и ω_2 будут касаться $ABCD \Rightarrow \sqrt{a} = 4-3 = 1 \Rightarrow a = 1$

Ответ: при $a =$ ~~[illegible]~~ $25 \,||\, 1$

Задача № 6

(а)



1) • Продлим BF до пересечения с ω_1 в т. M. Т.к $\angle MBC = \frac{\pi}{2}$, то CM — диаметр.

• Т.к $\angle CAD = \frac{\pi}{2}$ и $\angle CAM$ опирается на диаметр, то $A \in MD$

• Получаем, что CA и MB — высоты в $\triangle CMD$

$K = MB \cap AC \Rightarrow DK$ — тоже высота: $H = DK \cap MC$, $DK = 2R = 10$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) • Рассмотрим $\triangle CMD$: $\triangle CHD \sim \triangle KBD$ – по ~~углу~~ остр. углу $KDB \Rightarrow \angle BKD = \angle HCD \Rightarrow \triangle CMB = \triangle KDB$: $KD = CM = 2R$, $\angle MCD = \angle BKD \Rightarrow KB = CB = x$, $MB = BD = y$.

• $MB^2 + CB^2 = CM^2 \Rightarrow CM^2 = 100 = y^2 + x^2 = BD^2 + CB^2 = FB^2 + CB^2 =$
$= CF^2 \Rightarrow \boxed{CF = 10}$

б) • т.к. $BD = BM$, то $\triangle BMD$ – р/б $\Rightarrow MD = \sqrt{2} \cdot BD$
$CB^2 + BD^2 = 100 \Rightarrow BD = \sqrt{100 - 36} = 8$ $\Big\} \Rightarrow MD = 8\sqrt{2}$

• $MK = MB - KB = BD - BC = 2 \Rightarrow$ т.к. $\angle MKA = \angle CKB = \frac{\pi}{4}$, то
$MA = AK = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{KD^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 2} = \sqrt{98}$

• $S_{MCF} = \frac{1}{2} CB \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48$
$S_{MDF} = \frac{1}{2} DB \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$
$S_{CMA} = \frac{1}{2} MA \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{CM^2 - AM^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = \frac{1}{2}\sqrt{196} = 7$

• $\triangle CBK$ – р/б, $\triangle FBD$ – р/б, $CK \perp MD \Rightarrow FD \perp MD \Rightarrow \triangle FAD$ – пр. уг. $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{FAD} = \frac{1}{2} FD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = 4 \cdot \sqrt{196} = 4 \cdot 14$

• $S_{ACF} = S_{MCF} + S_{MDF} - S_{MAC} - S_{FAD} = 48 + 64 - 7 - 4 \cdot 14 =$
$= 112 - 63 = \boxed{49}$

Ответ: $CF = 10$ $S_{ACF} = 49$

Задача № 2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\sqrt{2}\left(\left(\cos 11x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(11x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(\cos 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(14x)$

☐ черновик ☐ чистовик

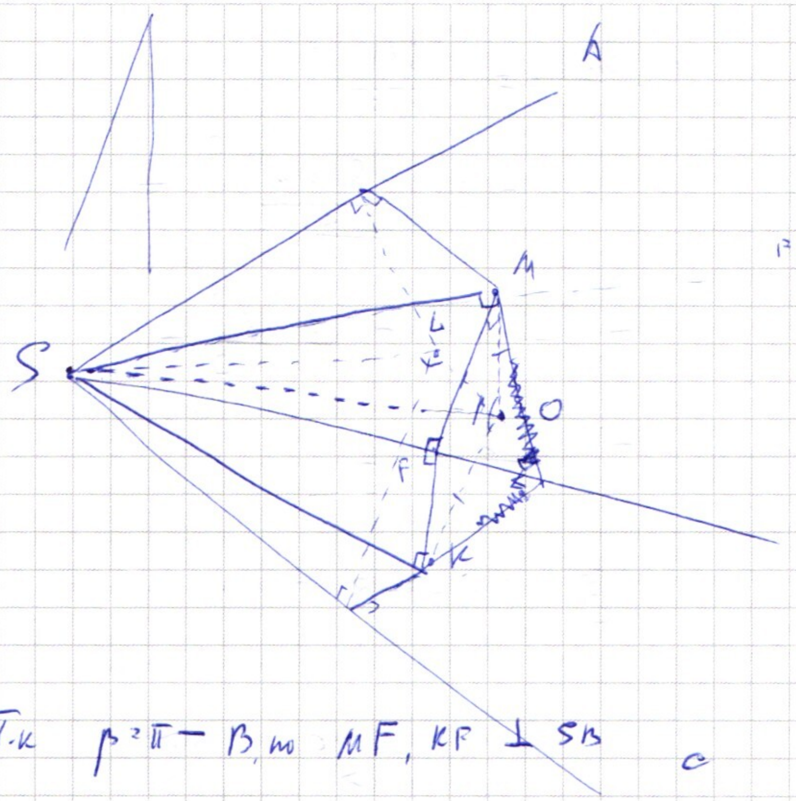
(Поставьте галочку в нужном поле)

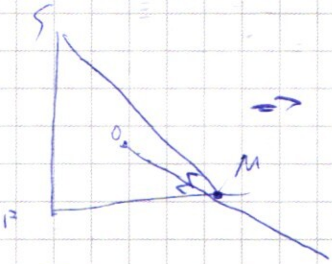
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

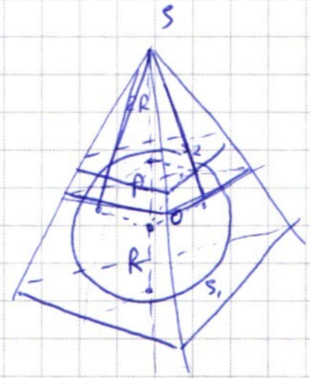
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



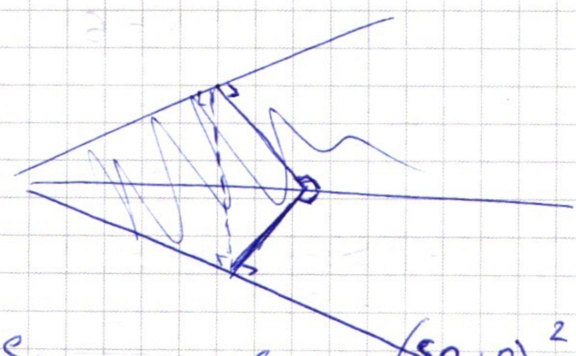


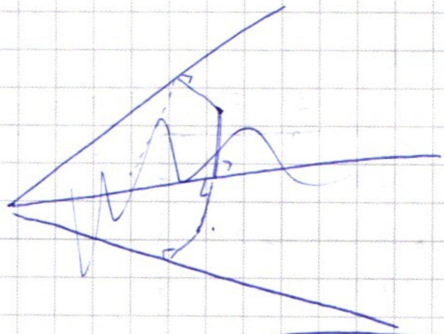
⇒ по т. о трёх перп



• Т.к. $\beta = \pi - B$, то $MF, KF \perp SB$

•





1) $\frac{S_1}{S_2} = 4$; $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{SO+R}{SO-R}\right)^2 \Rightarrow \frac{SO+R}{SO-R} = 2 \Rightarrow \boxed{3R = SO}$

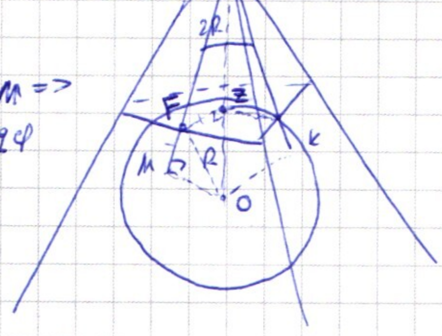
2) • Т.к. SO − б.у., а $OK = OM = OL = R$, то $\triangle KSO = \triangle MSO = \triangle LSO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \angle MSO = \angle LSO = \varphi$

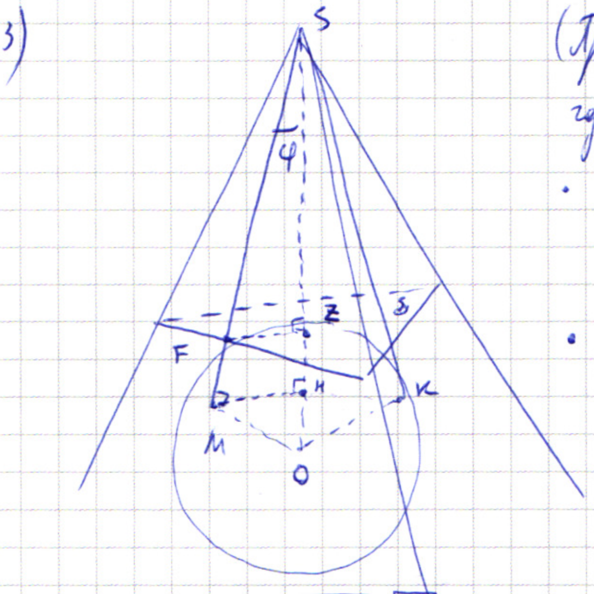
• $\triangle OMF = \triangle OFZ \Rightarrow$, $\triangle SFZ \sim \triangle SOM \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SF}{SO} = \frac{FZ}{MO}$; $\frac{2R}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{3R} = \frac{2R \cdot tg\varphi}{R}$

$\frac{2}{3} = 2\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\sin\varphi = \frac{1}{3}}$



3)



(Прямая т.к. $\delta \perp OS$ и $\delta \perp OZ$, то $Z \in OS$, где Z - точка кас сферы и δ)

• Опустим перп MH из M к OS, т.к. все огр MSO равны, то $MKH \perp OS$

• $\dfrac{S_{MKH}}{S_\delta} = \left(\dfrac{SM}{SF}\right)^2$

$S_{MKH} = 1 \cdot \left(\dfrac{3R\cos\varphi}{\frac{2R}{\cos\varphi}}\right)^2 =$

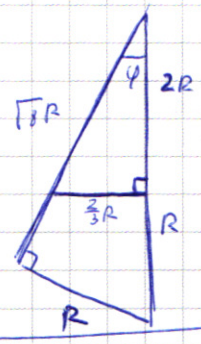
$= \dfrac{9}{4}\cos^4\varphi = \dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{8^2}{92} =$

$= \dfrac{8\cdot 2}{9} = \boxed{\dfrac{16}{9}}$ $\quad \dfrac{8\cdot 2}{9}$

$\sin\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$\cancel{\frac{3}{8}\sqrt{8}\sqrt{\frac{9\cdot 2}{8}}}$

$\frac{1}{3}\sqrt{\cancel{\frac{9\cdot 2}{8}}}$



$9R^2 - R^2 = 8R^2$

$4R^2 + \frac{4}{9}R^2 =$

$= \frac{36+4}{9} \cdot \sqrt{\frac{40}{9}} =$

$= \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{\sqrt{40}}{3}$

⑤ $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

1) • $\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 3+x \\ y > 3-x \end{cases}$

$2y = 12 \Rightarrow \underline{y = 6}$

• $\begin{cases} y < 3+x \\ y > 3-x \end{cases}$; $3+x-y+y-3+x = 6$

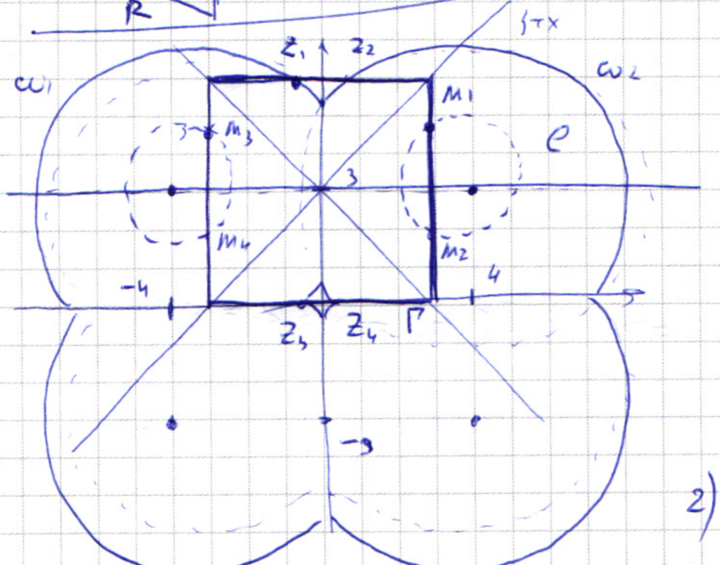
$\underline{x = 3}$

• $\begin{cases} y > 3+x \\ y < 3-x \end{cases}$ $\quad \cancel{y}-3-x+3-\cancel{y}-x = 6$

$\underline{x = -3}$

• $\begin{cases} y < 3+x \\ y < 3-x \end{cases}$ $\quad 3+x-y+3-x-y = 6$

$\underline{y = 0}$



2) Заметим, что отн прямой C верхняя часть графика симметрична => если есть реш Z_1 и Z_2, то есть и реш Z_3, Z_4 - не подходит. Аналогично, если есть решение M_1 и M_2, то есть решение M_3 и M_4 => => окружности ω_1 и ω_2 должны касаться квадрата Г => $\boxed{a = \pm 1}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x =$

$= \sqrt{2}\cos(11x)\cdot\cos(3x) - \sqrt{2}\sin(11x)\cdot\sin(3x)$

$\cos 60 - \cos 30 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) =$

$\left(\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{11x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{11x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right) =$

$= \sin^2\left(\frac{11x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{11x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) = \left(1-\cos^2\left(\frac{11x}{2}\right)\right)\cos^2\frac{3x}{2} - \cos^2\left(\frac{11x}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{3x}{2}\right) =$

$= 2\left(\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) + \ldots - \cos^2\left(\frac{11x}{2}\right)^2\right) =$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= 1 + \cos 3x \;\; -1 - \cos 11x$

• $\cos 11x - \cos 3x = 2\sin(7x)\sin(-8x)$

$\sin 3x - \sin 11x =$ ~~$2\sin(7x)\cos(-8x)$~~ $2\sin(-8x)\cos(7x)$

• $-2\sin(7x)\sin(8x) - 2(\sin 8x)\cos(7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-\sqrt{2}\sin(8x)\cdot(\sin(7x) + \cos(7x)) = \cos(2\cdot 7x) = 2\cos^2(7x) - 1$

$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2}\cdot\left(\cos 11x\cdot\cos\left(+\frac{\pi}{4}\right) - \sin 11x\cdot\sin\left(+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 3x + \cos 3x = -\sqrt{2}\left(\cos 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

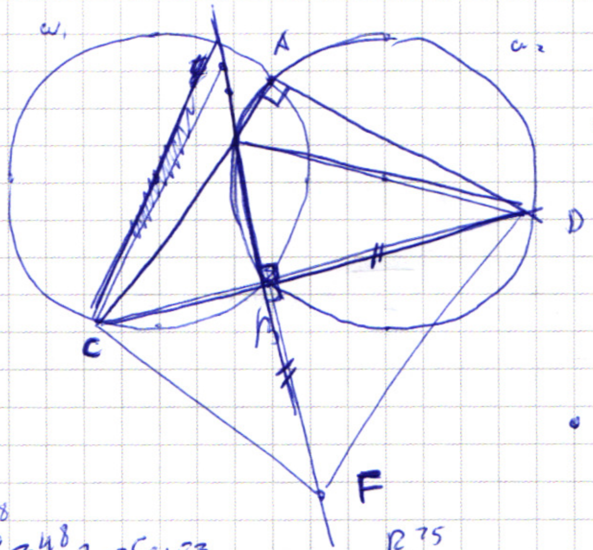
$\Rightarrow \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(14x)$

~~2sin~~

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

⑥ a)



- $\begin{cases} CB^2 = 10^2 - MB^2 \\ BD^2 = 10^2 - BK^2 \\ CF^2 = CB^2 + BD^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow CF^2 = 2\cdot 10^2 - MB^2 - BK^2$

- $\triangle BCK \sim \triangle MAK \Rightarrow \frac{BC}{MA} = \frac{BK}{KA}$

$AK^2 = 10^2 - AD^2 =$

$= 10^2 - ((CB+BD)^2 - CA^2) =$

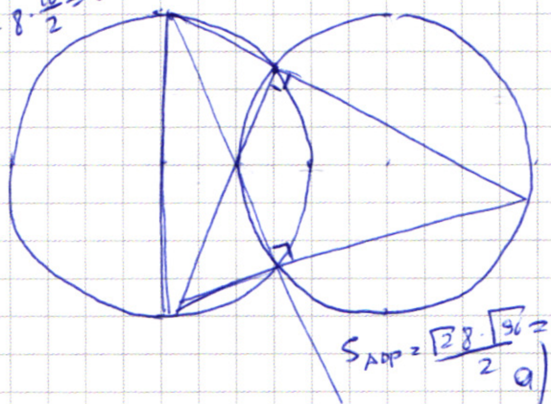
$= 10^2 - (CB+BD)^2 + 10^2 - MA^2$

- $\frac{BC^2}{MA^2} = \frac{BK^2}{2\cdot 100 - MA^2 - (CB+BD)^2}$

$S_{CMA} = \frac{2\cdot\sqrt{104}}{2} = \sqrt{104}$

$S_{CMF} = \frac{6\cdot 16}{2} = 48$ (8)
$S_{MDF} = 8\cdot\frac{16}{2} = 64$ $\Rightarrow S_{CAF} =$

$R = 5$



$S_{ADP} = \frac{\sqrt{28}\cdot\sqrt{96}}{2} =$

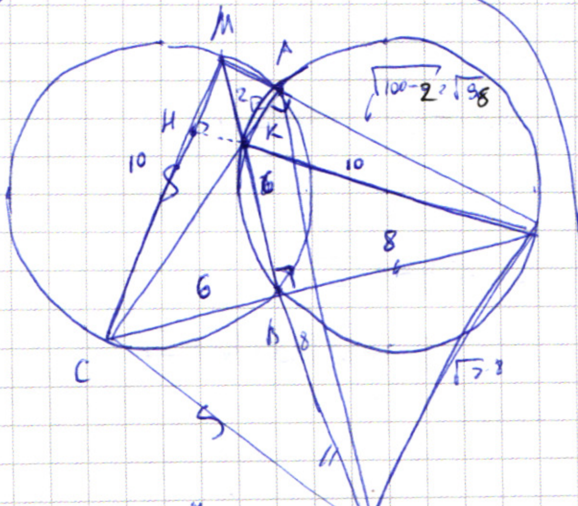
a)

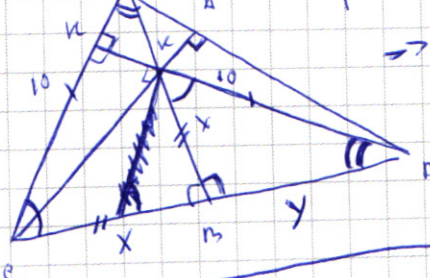
1) $\angle BKD = \angle MCD \Rightarrow \triangle CMB = \triangle KDB \Rightarrow$

$\Rightarrow KB = CB = x,\ MB = BD = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CKB$ – р/б, $\triangle MBD$ – р/б

2) $y^2 + x^2 = 100$



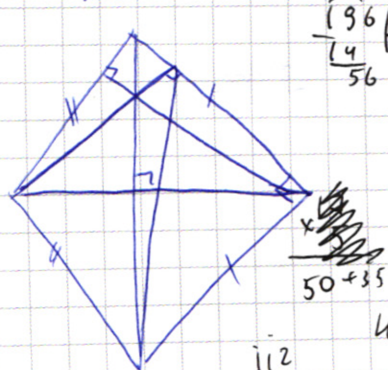


$\Rightarrow \triangle CKB$ р/б

б) $CB = BK = 6,\ BF = MB = BD = 8$

$\triangle MAK$ – р/б $\Rightarrow MA = AK = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CA = \sqrt{104}$ $MD =$



$\sqrt{196} = 14$

63

7-9

50+35

40+16

56+7² = 63

112 − 63 = 49

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $3375 = 5^2 \cdot 131$

$3375 = 5 \cdot 675 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$ число соч

из

2 : 1

3: 5 3

Итого вариантов: $\dfrac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3!\cdot 2}^2 = \boxed{560}$

~~2) ... $\sqrt{2}\cos 14x$~~

3) $\begin{cases} \left(\dfrac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

1) $y^{5\lg x} = y^{2\lg xy} \cdot x^{\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$

$y^{3\lg x} = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x} \Rightarrow y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$

~~$(x^2 - 2xy + y^2) = 4y^2 + 4x - 12y$~~

~~$x^2 - x(2y+4) + 12y - 3y^2 = 0$~~

~~$x = (y+2) \pm (y^2+4y+4 - 12y + 3y^2)^{\frac{1}{2}} = (y+2) \pm (13y^2 - 4y + 4)^{\frac{1}{2}}$~~

$10^{\lg(y)\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = 10^{\lg^2(x)} \Rightarrow \lg(y)\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \lg^2(x)$

$\lg(y)\,(3\lg(x) - 2\lg(y)) = \lg^2(x)$

$3\lg(x)\cdot\lg(y) - 2\lg^2(y) = \lg^2(x)$

$\lg^2(x) - 3\lg(x)\cdot\lg(y) + 2\lg^2(y) = 0$

$\lg(x) = \dfrac{3\lg(y) \pm \sqrt{9\lg^2(y) - 8\lg^2(y)}}{2} = \dfrac{3\lg(y) \pm \lg(y)}{2} = 2\lg(y) \,//\, \lg(y)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

2) $\begin{cases} \lg(x) = \lg(y) \;//\; 2\lg(y) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

• Имеем: $\lg(x) = \lg(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x^2 - 4x + 3x^2 + 12x = 0$

не подходит по ОДЗ

тоже нет

$2x^2 + 8x = 0, \quad x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \;//\; -4$

• $x = y^2 \Rightarrow y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

~~$y^4 - 7y^2 + 12y = 0$~~

~~$y = 0$ нет~~

~~$y^3 - 7y + 12 = 0$~~

~~$x^2 + 4x = -4$~~

| $y = 3$: ~~$27 - 21 + 12$~~

$y = 2$: $8 - 14 + 12 \neq 0$

~~$y = 4$: $64 - 28 + 12 = 0$~~

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$

т.к. $y \neq 0$:

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$ | $y = 1$: $1 - 2 - 7 + 12$ ✗ | ~~$y = -1$: $-1 - 2 +$~~

$y = 2$: $8 - 8 - 14 + 12$ ✗

$y = -2$: $-8 - 8 + 14 + 12$ ✗

$\boxed{y = 3}$ $27 - 18 - 21 + 12 = 0$ ✓

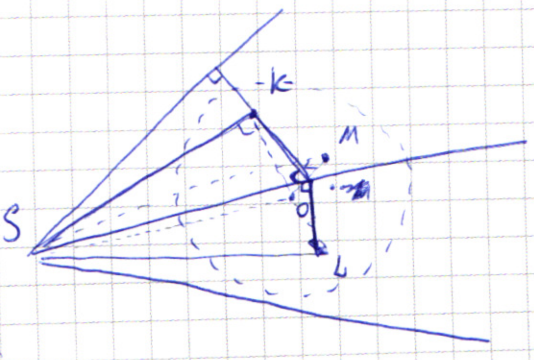
$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y - 3 \\ \hline -(y^3 - 3y^2) & y^2 + y - 4 \\ y^2 - 7y & \\ -(y^2 - 3y) & \\ -4y + 12 & \\ -(-4y + 12) & \\ 0 & \end{array}$$

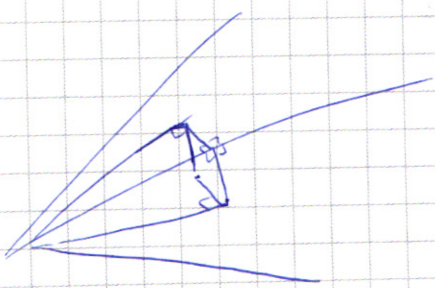
$\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)^2 = 17$

$(y - 3)(y^2 + y - 4) = 0 \Rightarrow y = 3 \;//\; \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9 \;//\; \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \;//\; \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4}$

4





☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

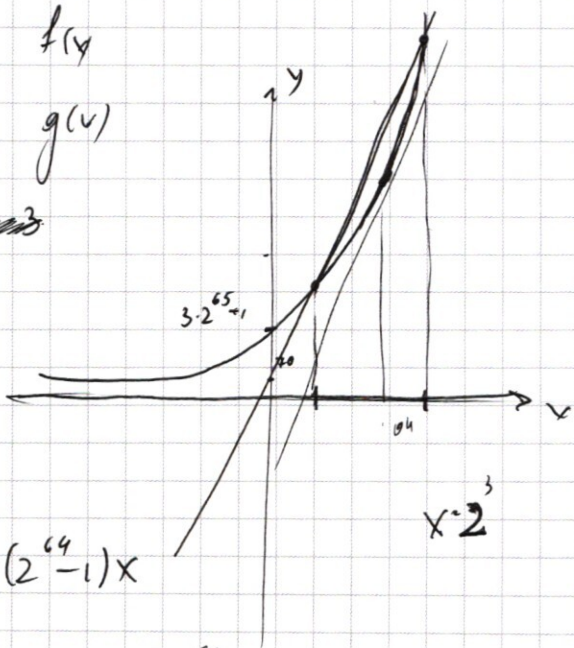
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} & f(x) \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x & g(x) \end{cases}$$

$2^{66} + 2^{65} + 2^x$



$x = 2^3$

$$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + (2^{64}-1)x$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 2^x \\ g'(x) &= 2^{64}-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ при } \begin{aligned} x < 64 &: g'(x) > f'(x) \\ x \ge 64 &: g'(x) < f'(x) \end{aligned}, \quad x \in Q$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)