

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 70$
 $y > 2^{70} + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot 70$

$y > 2^x / (1 + 3 \cdot 2^{(65-x)})$
 $y \leq 70 + 2^{64} x - x$

$y > 2^{65} / (32 + 3)$
 $y \leq 70(1 + 2^{64} - 1)$

$x < 70$

$x = 63$
 $y > 2^{63} + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot 63$
 $y > 2^{63} \cdot 13$
 $y \leq 2^{64} \cdot 63 + 7$

$\cos 14x \cdot \cos 3x + \sin 14x \cdot \sin 3x - \cos 3x - \sin 14x \cdot \cos 3x +$
 $+ \sin 3x \cdot \cos 14x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$
 $a \cdot b + c \cdot d - b - c \cdot b + d \cdot a + d = \sqrt{2} a$
 $ab + ad + (c+1)(b+d) = \sqrt{2} a$
 $(a+c+1)(b+d) = \sqrt{2} a$

$(\cos 14x + \sin 14x + 1)(\cos 3x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$
 $(\cos 14x + \sin 14x + 1) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 14x$
 $\sin(\frac{\pi}{4} + 3x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{3}$
 $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{5\pi}{12}$
 $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$
 $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$
 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
 $\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$
 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$
 $1 + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 $1 + 2\sqrt{3} + 3 = 2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$
 $4 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
 $3 = 4 + 8\sqrt{3}$

$\cos 11 - \cos 3 - \sin 11 + \sin 3 = \sqrt{2} \cos 11 \cdot \cos 3 - \sqrt{2} \sin 11 \cdot \sin 3$
 $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2}$
 $\sin(a+b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
 $\frac{30}{150} \cdot \frac{120}{150} \cdot \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 4 - 3 = \frac{1}{2}$

1. $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$ восьмизначное число может состоять из: $5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1$ ①
 количество способов расставить цифры из ① набора:

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

количество способов расставить цифры из ② набора:

$$\frac{8!}{3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1120$$

$$560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел.

5. $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$

раскроем модули:

① $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-3-x+y-3+x=6 \\ 2y-6=6 \\ y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ -y+3+x+y-3+x=6 \\ 2x=6 \\ x=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq y-3 \\ x \geq 3-y \\ 2y=12 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y=6 \end{cases}$

$\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq 3-x \\ 2x=6 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 6 \\ y \geq 0 \\ x=3 \end{cases}$

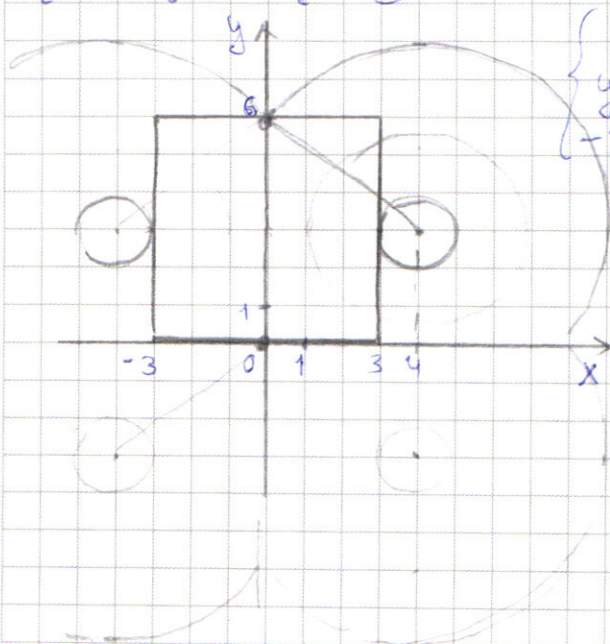
3) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \\ y-3-x-y+3-x=6 \\ -2x=6 \\ x=-3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ -y+3+x-y+3-x=6 \\ -2y=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < 3-x \\ -2x=6 \\ x=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq 0 \\ y < 6 \\ x=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x > y-3 \\ x < 3-y \\ -2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 3 \\ y=0 \end{cases}$



② функция является окружностью: $O(4; 3); R = \sqrt{a}$, симметрично относительно осей X и Y

из графика видно, что функции имеют 2 общие точки только при

$R=1 \Rightarrow a=1$ и $R=5 \Rightarrow a=25$

Ответ: 1; 25.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Дано:
 $R=5$
 $\angle CAD=90^\circ$
 $BF \perp CD$
 $BF=BD$
 а) $CF=?$
 б) $BC=6$
 $S_{DAEF}=?$

Решение:
 а) $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle CMA$
 (вписанный)
 $\angle ABD = 180^\circ - \angle ABC =$
 $= 180^\circ - \frac{\angle CMA}{2} = \frac{360^\circ - \angle CMA}{2} =$
 $= \frac{\angle ABC}{2}$
 $\angle ABD = \frac{\angle ACD}{2} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACD$
 $\Rightarrow AC=AD$ (исходя из симметричности равных дуг)
 $\triangle ACD$ - р/б; н/у $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
 $\angle BAD = \alpha$; $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$
 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{AD \cdot AB \cdot \sin \alpha} = \frac{BC \cdot h}{BD \cdot h}$
 $\frac{BC}{BD} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\tan \alpha = \frac{BD}{BC}$; $BD=BF \Rightarrow \tan \alpha = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \angle FCB = \alpha$
 $\triangle ABC$: по теореме синусов: $\frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow BC = 10 \cdot \cos \alpha$
 $BD = \frac{BC \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 10 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 10 \sin \alpha = BF$
 $BF \perp CD \Rightarrow \triangle CBF$ - н/у $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{BF}{CF} \Rightarrow CF = \frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \alpha}{\sin \alpha} = 10$
 б) $\triangle ACB$: по т. синусов: $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$; $AB = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$
 по т. косинусов: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$
 $50 = AC^2 + 36 - \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot AC$ $AC^2 - 6\sqrt{2}AC - 14 = 0$
 $D = 72 + 56 = 128$
 $AC = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$
 $S_{DAEF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2}$ $\triangle BCF$ - н/у $\Rightarrow \cos \alpha = 0,6$; $\sin \alpha = 0,8$
 $\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cos \alpha + \sin \alpha \cos 45^\circ = 0,7 \cdot \sqrt{2}$

$$\cos(11x+3x)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{30+60}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$1) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6 \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$2) \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$-y+3+x+y-3+x=6$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

$$\begin{cases} y < 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{\lg x} \cdot y^{-\lg x}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{\lg y}$$

$$(x-y)^2 - y^2 - 4(x-y) + 8y$$

$$3) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$$

$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$-2x=6$$

$$\begin{cases} x=-3 \\ y \geq 0 \\ y < 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y=0$$

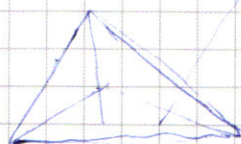
$$\begin{cases} y=0 \\ x > -3 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$(x-y)(x-y-4) - 4y(y^2-2)$$

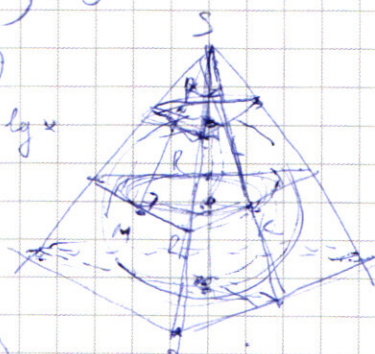
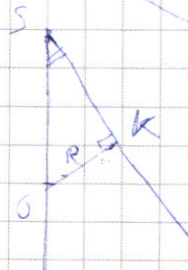
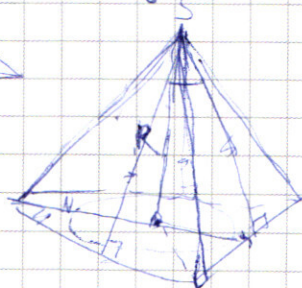
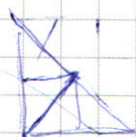
$$x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 4x + 4y - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(x-y) - 4(y+4) - 3y(y-4) = 0$$

$$(x-y)(x-y-4) - y(4y-8) = 0$$



$$x^2 - 4x + 4 - 4$$



$$\sin 60 - \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\cos \alpha + \beta$$

$$\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

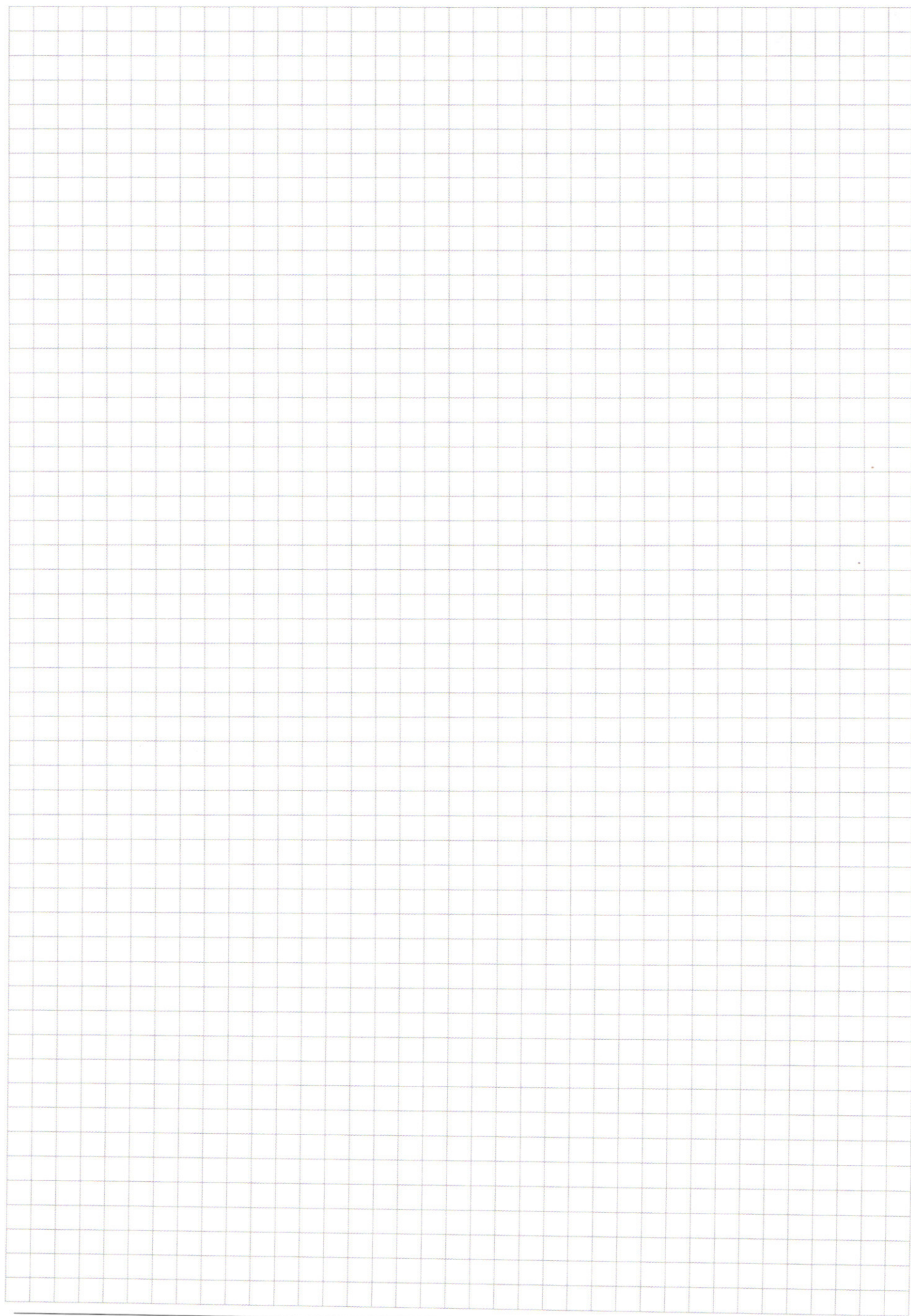
$$\frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\text{ОАСР}} = \frac{75\% \cdot 10 \cdot 0,75}{\%} = 49$$

Ответ: а) 10 ; б) 49.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$675 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$135 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

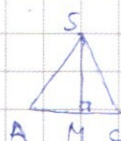
$$27 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$555 = 333 \cdot 11$$

$$555 = 33 \cdot 111$$

$$A_{3,3,2}^8 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 10 + 56 \cdot 20 = 56 \cdot 30 = 1680$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\sin \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y - 3 - x \geq 0$$

$$y \geq x + 3$$

$$\sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x$$



$$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x - \sin 11x = 0$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg xy$$

$$x=3$$

$$x=1$$

$$|y-3|=3$$

$$|y-4|+|y-2|=6$$

$$y=6$$

$$xy > 0$$

$$y=6$$

$$y=12$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$y-3-x=0$$

$$y=x+3$$

$$y-3+x=0$$

$$y=-x+3$$

$$1. y \geq 3$$

$$|1-x| + |1+x| = 6$$

$$2. x \geq 0$$

$$3. \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$4. x < 0$$

$$\log_2 2^{64}$$

$$2^{x-64} < x-6$$

$$64 \cdot 1 \cdot 58$$

$$65 \cdot 2 \cdot 59$$

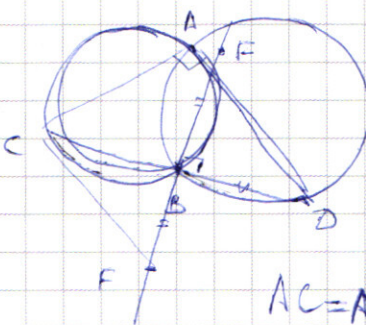
$$66 \cdot 4 \cdot 60$$

$$67 \cdot 8 \cdot 61$$

$$68 \cdot 16 \cdot 62$$

$$69 \cdot 32 \cdot 63$$

$$70 \cdot 64 \cdot 64$$



$$AC=AD$$

$$\frac{AB}{\sin 45} = 2k$$

$$AB = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{AC}{\sin(45+\alpha)} = 10$$

$$\frac{BC}{\sin(90-\alpha)} = 10$$

$$\frac{BC}{\cos \alpha} = 10$$

$$BC = 10 \cos \alpha$$

$$\frac{BD}{10 \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$BD = 10 \sin \alpha = BF$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \tan \alpha$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin(90-\alpha)}{x \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin \alpha} = \frac{BC}{BD}$$

$$3+5+6=14$$

$$\frac{BF}{CF} = \sin \alpha$$

$$CF = \frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\sin \alpha = 0.8$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2}$$

$$50 = 36 + AC^2 - 12 AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC^2 - 6\sqrt{2} AC - 14 = 0$$

$$D = 72 + 56 = 128$$

$$AC = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin(45+\alpha)}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 0.6^3 + \sqrt{2} \cdot 0.8^3}{2} = 0.7\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 0.7\sqrt{2}}{2} = 49$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y > 1 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70$$

$$2^x \leq 70 - 3 \cdot 2 \cdot 2^{64} + 2^{64}x - x$$

$$2^x \leq 2^{64}(x-6) + 70 - x$$

$$2^x \leq (x-6)(2^{64} - 2^6) < (x-6)2^{64}$$



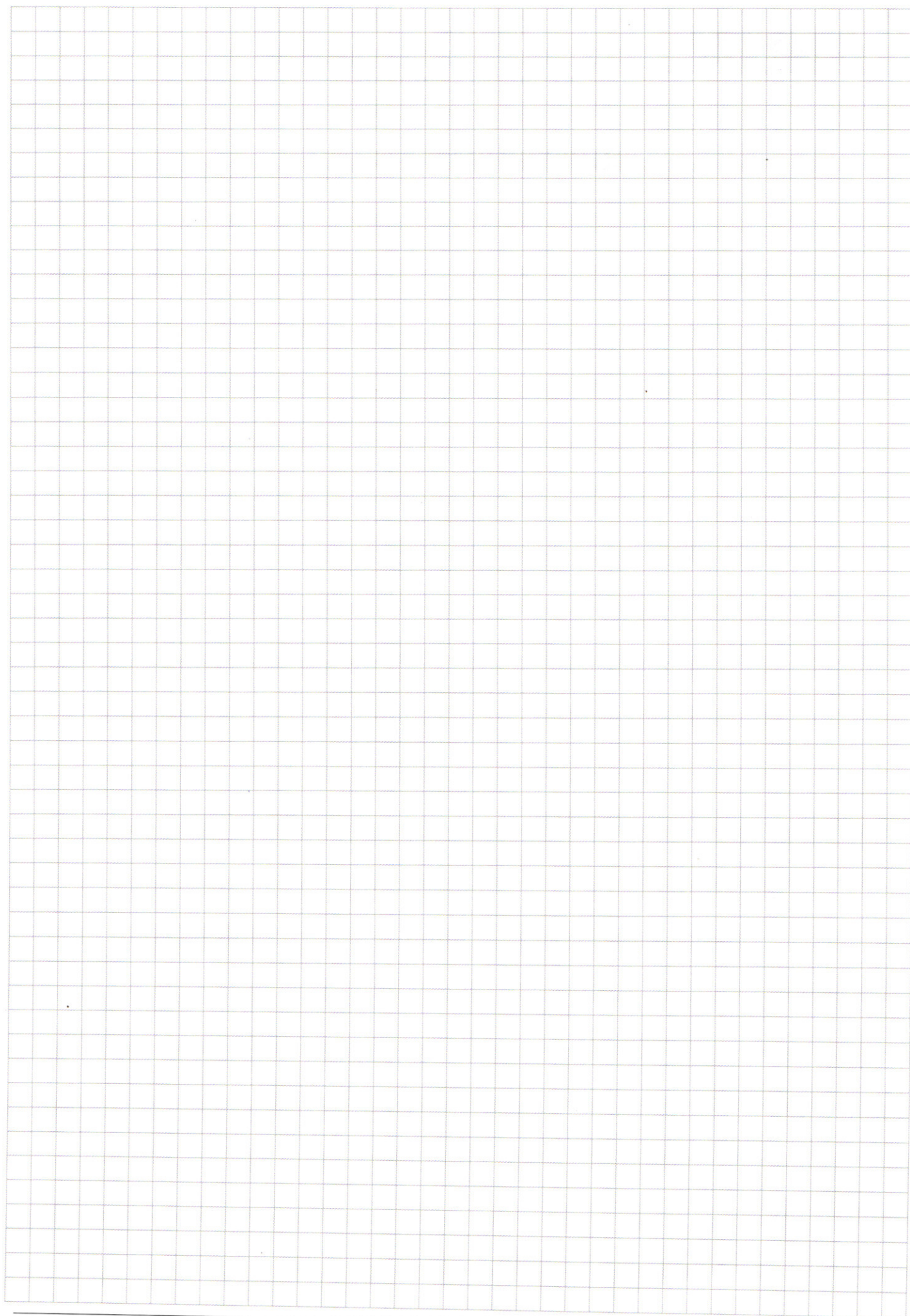
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)