

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Число 3325 представимо в виде $3325 = 3^3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 9 \cdot 5^3$, иных множителей кроме 1, 3, 5, 9 не имеющих 10, т.е. не имеющих в разложении цифр 0 оно не имеет. Тогда ясно, что числовые восьмизначные числа содержат в себе три тройки, три ~~два~~ пятёрки и две единицы, либо две тройки, три пятёрки и одну единицу. Для первого случая число таких чисел найдется так:

$$\underbrace{C_8^3}_{\text{расставлен тройки}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{расставлен пятёрки}} \cdot \underbrace{C_2^2}_{\text{оставшиеся только единицы}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 1 = 56 \cdot 10 = 560$$

Для второго случая:

$$\underbrace{C_8^2}_{\text{расставлен двойки}} \cdot \underbrace{C_7^3}_{\text{тройки}} \cdot \underbrace{C_5^3}_{\text{пятёрки}} \cdot \underbrace{C_2^1}_{\text{только единицы}} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 1680$$

Итого получается $560 + 1680 = 2240$ Ответ: 2240.

№5.

Рассмотрим первое уравнение системы:

при $\begin{cases} y-3 > x \\ y-3 > -x \end{cases}$	при $\begin{cases} y-3 < x \\ y-3 > -x \end{cases}$	при $\begin{cases} y-3 < x \\ y-3 < -x \end{cases}$	при $\begin{cases} y-3 < -x \\ y-3 > x \end{cases}$
$y-3-x+y-3+x=6$	$3-y+x+y-3+x=6$	$-y+3+x-y+3-x=6$	$y-3-x-y+3-x=6$
$2y=12$	$x=3$	$y=0$	$x=-3$
$y=6$			

Получается, что на координатной плоскости это уравнение задает квадрат с вершинами $(-3; 0)$; $(3; 0)$; $(3; 6)$; $(-3; 6)$.

$$3) \left[\begin{matrix} x=3y \\ x=-y+y \end{matrix} \right] (2^x + 3 \cdot 2^{65})^1 =$$

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$a^x = x \ln a - a^x \ln a \left(\frac{y^5}{3} \right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$y \lg(4-y)^5 = (4-y) \lg(4-y) \cdot y \lg(4-y)^2$$

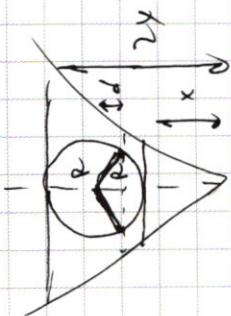
$$y \lg \frac{(4-y)^5}{y^2} = (4-y) \lg(4-y)$$

$$\lg \frac{(4-y)^5}{y^2} \lg y = \lg(4-y) \lg(4-y)$$

$$(\lg(4-y)^5 - \lg y^2)(\lg y) = \lg(4-y)$$

$$\frac{a^{x \ln y} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{x \ln y} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a \frac{h}{x} = f'$$

$$\frac{91}{32} = \frac{h}{x} = \frac{h}{x} - x^2 = \left(\frac{h}{x} + \frac{2}{x} \right)^2 - x^2 = 9$$



$$\lg(4-y)^3 \cdot \lg y - \lg^2(4-y) - 2 \lg y^2 = 0$$

$$\lg^2(4-y) - 3 \lg(4-y) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$2^x \ln 2 = 2^{65} - 1$$

$$2^x = 2^{65} - 1$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} = 1; \frac{1}{2}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{h}{x} - x^2 = 5 \Rightarrow x = 63$$

$$\frac{h}{x} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{x} = 7$$

$$1: y \lg 3y^2$$

$$y \lg 81y^4 = 3 \lg 3y \cdot y \lg 3y^2$$

$$y \lg \frac{81}{9} = 3 \lg 3y$$

$$y \lg 9 = 3 \lg 3y$$

$$\lg 9 \lg y = \lg 3 \lg 3y$$

$$2 \lg y = \lg 3y$$

$$2 \lg y - \lg y = \lg 3$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

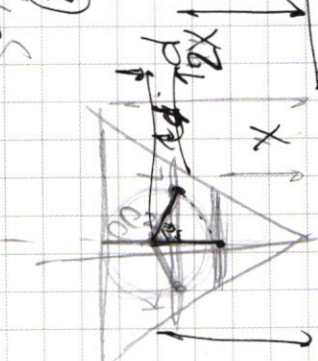
Σ

$$y^2 - \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} = 0$$

$$+ 12 \lg 4 = 4 \lg 4$$

$$0.5 \lg 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \lg 4 = 4 \lg 4$$

$$h_2 = 0 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 27$$

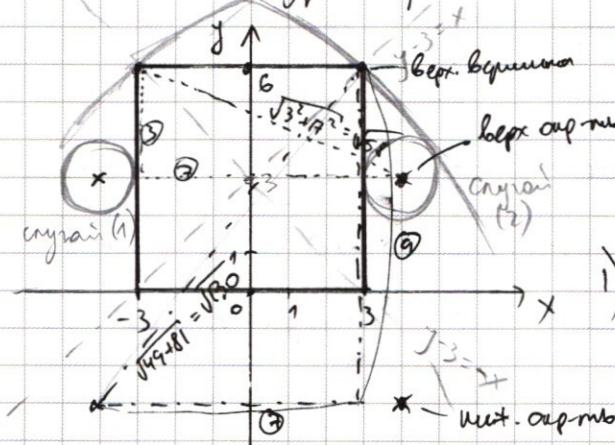


$$\frac{12 \lg 3}{19} = \frac{19 \lg 3}{19}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

Второе уравнение системы задает 4-ре окружности (при $a=0$ только)
радиуса a ($a \geq 0$ если решение есть) с центрами $(4;3); (-4;3); (4;-3);$
Совместим уравнения графика на коор-динат-пл-ти: $(-4;-3)$.



Видно, что при увеличении параметра
радиусы окр-тей возрастают, причем
вся система зеркальна относительно ОУ.
1) При $a=1$ видно, что верхние
окр-ти касаются сторон квадрата,
т.е. имеем 2 решения.

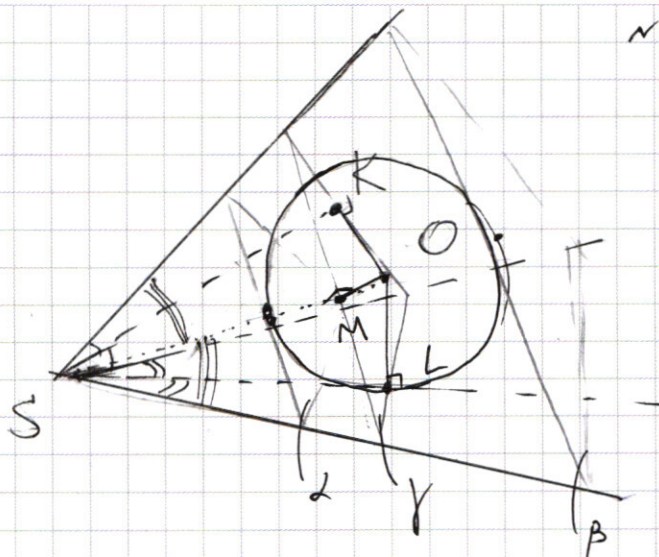
Далее видно, что при $a \leq \sqrt{58}$ наблюдается пересечение верхних
окр-тей с квадратом более, чем в одной точке для каждой,
в силу симметрии квадрата прямой $y=3$, на которой лежат центры
окр-тей верхнего ряда для верх. окр-тей выполнялись какие
не будут. При $a > \sqrt{58}$ верхние окр-ти не пересекают квадрат

2) При $a = \sqrt{50}$ нижние окр-ти проходят через нижние
вершины квадрата, "

2) При $a = \sqrt{130}$ нижние окр-ти проходят через противоположные
вершины квадрата и очевидно, имеют каждая по одной другой
точке с осью, т.е. всего 2 решения.

При $a > \sqrt{130}$ Все окр-ти не пересекают квадрат.

Ответ: при $a=1$; $a=\sqrt{130}$.



№4. ~~Пусть f — сечение конуса~~ $f = (KLM)$

Пусть данные в условии

касательные α и β ,

тогда т.к. $\alpha \perp SO$ и $\beta \perp SO$

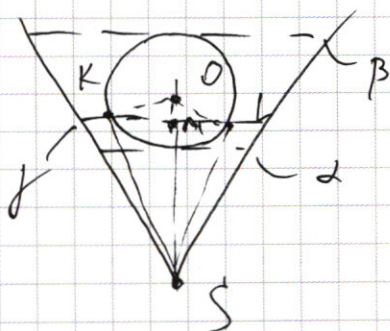
$\alpha \parallel \beta$, причем известно, что

плоскости касания α и β со

сферой лежат на прямой SO .

По условию заданы плоскости угла трехгранного угла различны, но в силу условия касания $KS = SM = SL$, тогда известно, что $\angle KSO = 30^\circ$, т.к. SO — биссектриса угла в 60° . Тогда рассмотрим

проекцию картины на плоскость, параллельную SO . В силу подобия элементов конструкции известно, что площади сечений будут относиться как $\sqrt{\text{расстояний}}$ от точки S до плоскостей этих сечений в рассматриваемой линии проекции.



$\triangle KSO$ прямоугольный (KO — радиус $\perp$ касательной)

$$\angle KOS = \frac{1}{2} 60^\circ = \angle KSO = 30^\circ. \quad (1/4)$$

Пусть $p(S, \alpha) = x$, тогда $p(S, \beta) = 2x$,
при этом $p(S, \beta) - p(S, \alpha) = 2x - x = x = 2R$,

где R — радиус сферы, тогда

$$\text{из } \triangle KOS : p(O, f) = R \cdot \cos 60^\circ = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{4},$$

$$\text{тогда } p(S; f) = x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}. \quad \text{Из подобия площадей}$$

$$\text{исходного сечения будет равна: } \frac{S_f}{S_\alpha} = \left(\frac{p(S; f)}{p(S, \alpha)} \right)^2 = \left(\frac{5x/4}{x} \right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\text{Ответ: } \frac{25}{16}; \angle KSO = 30^\circ.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} - 2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos(7x) \cdot 2$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = 0 & (b) \end{cases}$$

(a): при $\cos 7x = 0$ $\sin 7x = \sqrt{1-0^2} = 1$, тогда $1+0=0$ - не верно,
т.е. $\cos 7x = 0$ - не верно, тогда

$$\frac{\sin 7x}{\cos 7x} + \frac{\cos 7x}{\cos 7x} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 7x = -1 \Rightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

тогда из (a): $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

(b): заменим, тогда $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$, тогда:

$$\sin 7x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x = 0$$

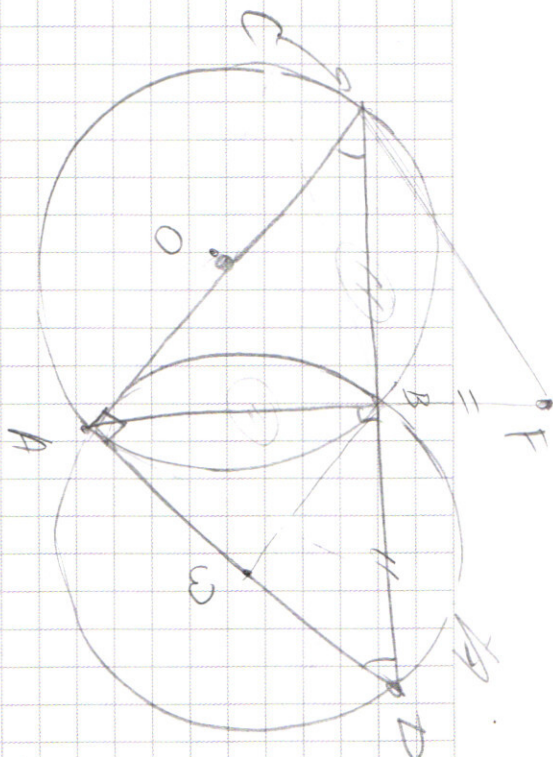
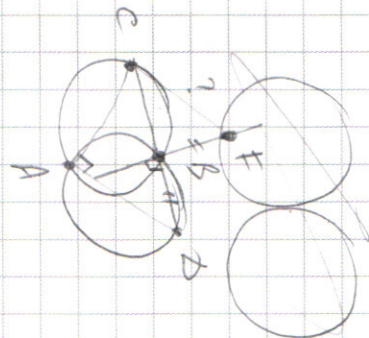
$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2} \cos \frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} \sin \left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi n \\ \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi l \end{cases}$$

Собирая решения (1) получаем ответ:

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{1}{7} \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11} \pi l \end{cases}, \text{ где } k, n, l \in \mathbb{Z}$$



$\angle BDA = \frac{\angle A\hat{B}}{2}$
 $\angle BCA = \frac{\angle A\hat{B}}{2} \Rightarrow \angle BDA = \angle BCA$

$\triangle ACD$
равност.

$OE \perp AC$
 $OD \perp AD \Rightarrow \angle OBD = \angle ODA = 90^\circ$
 $\angle AOB = 90^\circ$

$\angle C = X$
 $m.c. \angle B \perp CD \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

исходно



$0 = 0.6 - 0.9 \cdot 2 - 9$
 $0 = 0.6 - 0.9 \cdot 2 - 2 + 2$

$2 > 2$
 $2 + 2$

$0 = 0.6 - (0.9 + X) \cdot 0.9 \cdot 2 - X + X^2$
 $0 = 0.6 - 0.9 \cdot 2 \cdot 9 - X + X \cdot 0.9 \cdot 2 - X^2$

$X - X \cdot 0.9 \cdot 2 + 0.6 = 0.9 \cdot 2 \cdot 9 + X^2$

$\rightarrow 0.6 - X + 0.9 \cdot 2(X - 9) + X^2$
 $\rightarrow 0.6 - X + 1.8(X - 9) + X^2$

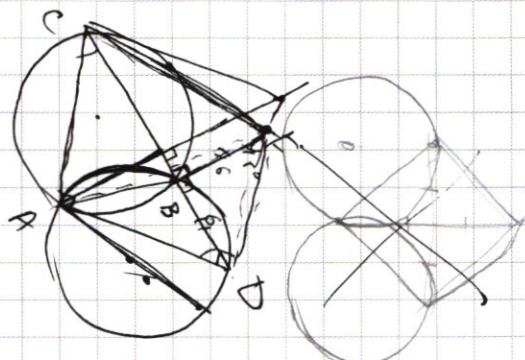
$2X - 0.9 + X^2$

$X - X \cdot 0.9 \cdot 2 + 0.6 \rightarrow 0.9 \cdot 2 \cdot 9 + X^2$

$X(1 - 0.9 \cdot 2) + 0.6 = 0.9 \cdot 2 \cdot 9 + X^2$
 $0.9 \cdot 2 \cdot 9 + X^2 < 0$

$0.9 \cdot 2 \cdot 9 + X^2 < 0$

$\frac{1}{1.2}$
 $\frac{1}{1.2}$



$0 = 0.6 - 0.9 \cdot 2 - 9$
 $0 = 0.6 - 0.9 \cdot 2 - 1 + X + X^2$

конкретно так же

$CB = BD = BA$

(f(x) дог-во)

(c)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное отн. x :

$$x^2 - 2(y+2) \cdot x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\Delta/4 = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2 = (2y-2)^2$$

$$(a) \quad x = \frac{y+2 + (2y-2)}{1} = 3y$$

$$(b) \quad x = \frac{y+2 - (2y-2)}{1} = -y+4$$

ОДЗ первого равенства: $\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \in (0; 4)$

Подставим корень (a) в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$y^{4 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg 3y^2}$$

$$y^{\lg 81y^4} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y^4} \quad (*)$$

$$y^{\lg 81} = 3^{\lg 3y}$$

$$\lg(y^{\lg 81}) = \lg(3^{\lg 3y})$$

$$2 \lg 3 \cdot \lg y = \lg 3y \cdot \lg 3$$

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3 \quad (3 \in (0; 4))$$

$$x = 3y = 9$$

Подставим корень (b) в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$y^{\lg(4-y)^5} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg(4-y)^2 y^2} \quad (*)^2$$

$$y^{\lg \frac{(4-y)^5}{y^2}} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\lg y \cdot (\lg(4-y)^5 - \lg y^2) = \lg^2(4-y)$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg y \cdot \lg(4-y) + \lg^2(4-y) = 0 \quad (*)$$

$$2 \left(\frac{\lg y}{\lg(4-y)}\right)^2 - 3 \frac{\lg y}{\lg(4-y)} + 1 = 0$$

$$\frac{\lg y}{\lg(4-y)} = 1$$

$$y = 4-y$$

$$y = 2 \quad (2 \in (0; 4))$$

$$x = -2 + 4 = 2$$

$$-\frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\frac{\lg y}{\lg(4-y)} = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$-\frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee 4$$

$$-\frac{1-\sqrt{17}}{2} \vee 8$$

$$\sqrt{17} \vee 9$$

$$17 < 81$$

$$y = -\frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

~1.

кон-во восьмизначных.

преобразование чисел 3375

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 3375 \div 3 = 1125 \\ 1125 \div 3 = 375 \\ 375 \div 3 = 125 \\ 125 \div 5 = 25 \\ 25 \div 5 = 5 \\ 5 \div 5 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \div 3 = 1125 \\ 1125 \div 3 = 375 \\ 375 \div 3 = 125 \\ 125 \div 5 = 25 \\ 25 \div 5 = 5 \\ 5 \div 5 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Нельзя было решить 3 уравнения и 3 алгебры, основанные на единицах

Для графиков есть 8 7.6 неясно

Для уравнений есть 5.4.3 неясно

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Можно решить 3 "3" и 3 "5"

1 "5" ; 2 "3" ; 3 "5" ,

$$8 \cdot 7 \cdot 6 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3! \cdot 5!} =$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{8}{56 \cdot 10} = 560$$

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 6} = 8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$$

$$1680 + 560 = 2240$$

~2.

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2} - 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) / (-2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha =$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$\sin 4x + \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos (4x + 3x) - \sqrt{2} \sin (4x + 3x) = 0$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 4x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 4x \sin 3x - \sqrt{2} \sin 4x \cos 3x - \sqrt{2} \cos 4x \sin 3x = 0$$

$$\sin 4x (2 - \sqrt{2} \sin 3x)$$

$$\frac{1680}{560} = 3$$

$$56 \cdot 30 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

Ищем точку: $(9; 3)$; $(2; 2)$; $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2})$.

По ходу решения мы неоднократно делили в (*) левую часть на x и получали:

(*)¹: ~~если~~ $y^{\lg y} \neq 0$, поскольку $f(y) = y^+$ — показательная ч. всегда > 0 .

(*)²: $y^{\lg(4-y)^2 y^2} \neq 0$, поскольку

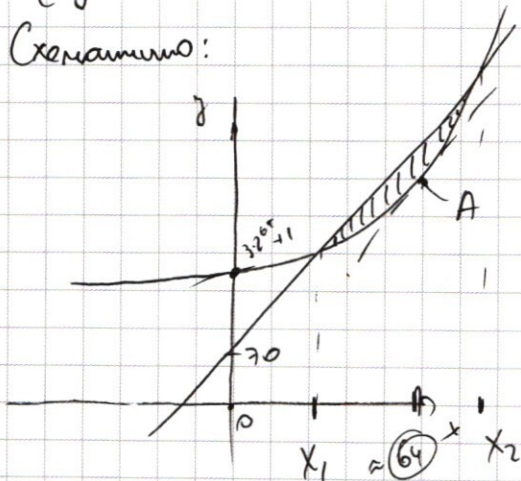
(*)³: $\lg^2(4-y) = 0$ тогда $4-y = 1$, т.е. $y = 3$, но этот корень мы уже рассматривали.

Ответ: $(9; 3)$; $(2; 2)$; $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2})$

№7

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$ — показательная возраст. функция через точку $(0; 3 \cdot 2^{64} + 1)$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$ — прямая с коэф-том наклона $(2^{64} - 1)$ через точку $(0; 70)$

Схематично:



Для начала найдем точку пересечения границ:

$$2^x + 3 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{64} - 2^{64} \cdot x + x = 70 \quad \vee$$

Значит, это x_1 и x_2 — корни уравнения

относительно x в котором

Найдем точку A, в которой функции сравняются.

$$(2^x + 3 \cdot 2^{64})' = 2^x \ln 2$$

$$(70 + (2^{64} - 1)x)' = 2^{64} - 1$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{64}$$

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$$

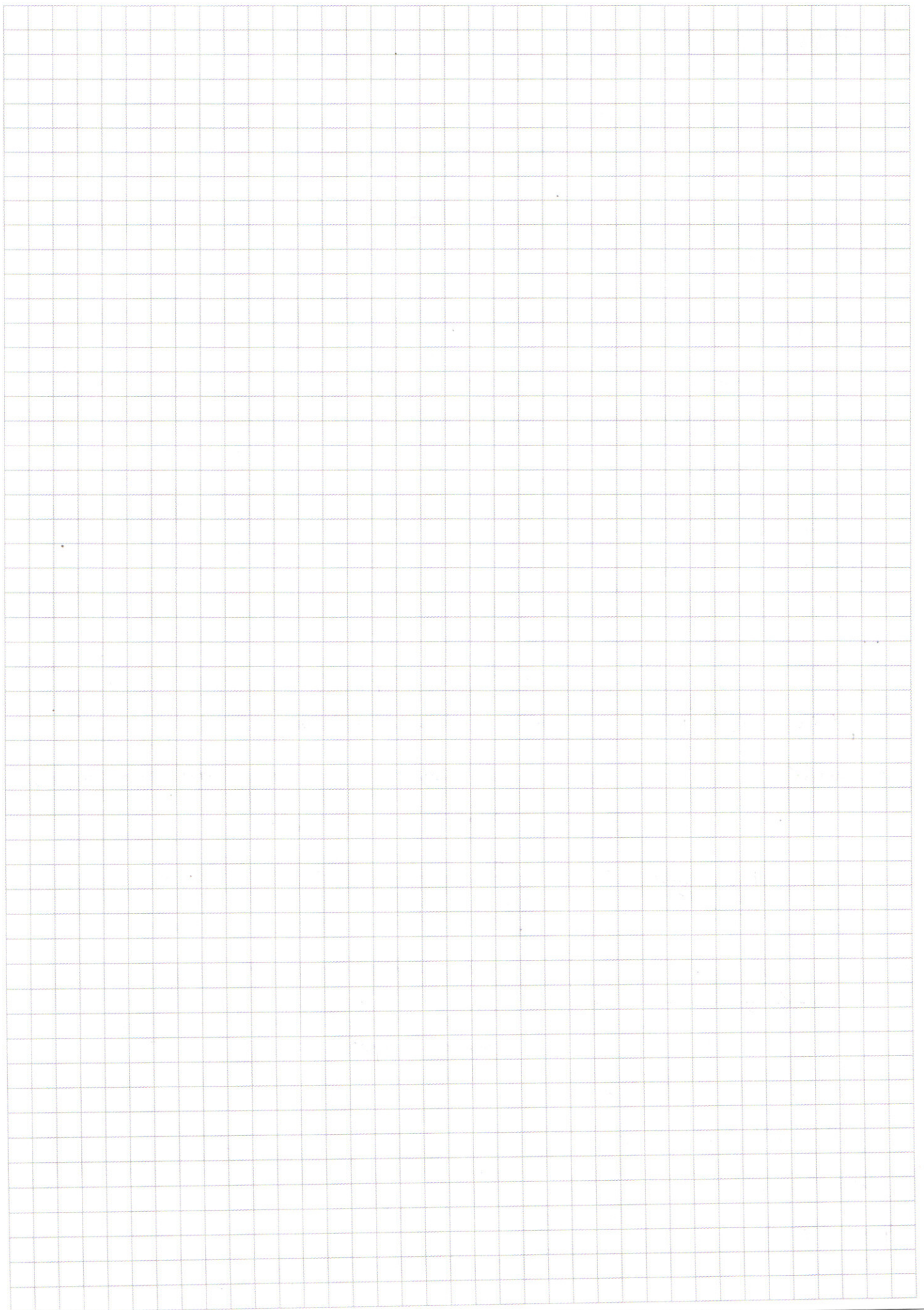
$$2^x \ln 2 = 2^{64} - 1$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}, \quad \ln 2 \approx 0.8 \Rightarrow x \approx 64.$$

$$f(64) = 2^{64} + 3 \cdot 2^{64} = 7 \cdot 2^{64}$$

$$g(64) = 70 + 2^{64} \cdot 2^6 - 64 = 6 + 2^{70}$$

(продолжение стр. №8)



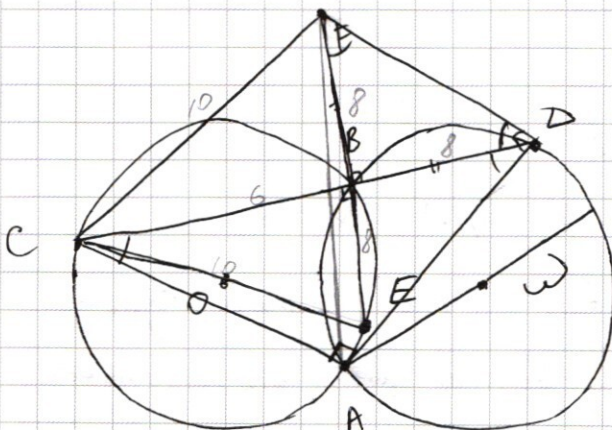
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

Пусть центры сфер-мн. ω и ω' . Поскольку $BO = OA$ и по условию $BO = OA = AW = WB = 5$, то треугольники $\triangle BOA = \triangle AOW$, отсюда $\angle BOA = \angle BWA$ — центральные углы в сферах, опущ. на дугу AB . Тогда $\angle BCA = \frac{\angle BOA}{2}$ и $\angle CDA = \frac{\angle BWA}{2}$, тогда (впис. углы), тогда $\angle BCA = \angle CDA$, но т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то в $\triangle CAD$ $\angle ACD = \angle CDA = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$, к тому же получим, что $\triangle CDA$ — равнобедренный. Рассмотрим $\triangle FBD$, по условию он равнобедренный ($FB = BD$) и прямоугольный ($\angle FBD = 90^\circ$), тогда $\angle FDB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, но тогда $\angle ADF = \angle ADC + \angle BDF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, тогда получаем, что $FD \perp AD$ и $CA \perp AD$, т.е. $FD \parallel CA$.



Пусть $m.E = CO \cap AB$, тогда

CE — диаметр и $\angle CBE = 90^\circ$.

В силу симметрии $\triangle CFB = \triangle BCE$,

тогда $CF = CE = 2 \cdot 5 = 10$

Из прямоугол. $\triangle FCB$: $FB = \sqrt{100 - 36} = 8$

$\angle FBC = 90^\circ$, но и $\angle CBE = 90^\circ$,

значит FB и FE , т. B и $m.E$ лежат на одной прямой $FE = 2 \cdot 8 = 16$

По теореме об отрезках касательных: $DE^2 = DC \cdot BD$

$DE = \sqrt{14 \cdot 8} = \sqrt{112}$; $\angle DCA = 45^\circ$, $\angle FCB = \arctg(\frac{4}{3})$

$AC = \frac{CD}{\sin \angle CDA} = \frac{14}{\sin 45^\circ}$

$S_{FCA} = \frac{CF \cdot AC \cdot \sin \angle FCA}{2}$

$S_{FCA} = \frac{10 \cdot 14}{2 \sin 45^\circ} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \arctg(\frac{4}{3})) = (\text{на обороте})$

№6 (продолжение)

$$\sin \angle FCB = \frac{4}{5} \quad \cos \angle FCB = \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \angle FCB\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$= S_{FCA} = \frac{140}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49 \quad \underline{\text{Ответ: } 10 ; 49.}$$

№7. (продолжение)

$$g(64) - f(64) = 6 + 2^{70} - 7 \cdot 2^{64} = 6 \cdot 2^{70} - 2^3 \cdot 2^{64} + 2^{64} =$$

$$= 6 \cdot 2^{70} - 2^8 \cdot 2^{62} = 48 \cdot 2^{62} - 2^{67} + \frac{1}{128} \cdot 2^{67} \approx 47 \cdot 2^{62}$$

$$f(63) = 2^{63} + 3 \cdot 2^{61} = 2^{63} + 12 \cdot 2^{63} = 13 \cdot 2^{63}$$

$$g(63) = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 63 = 7 + 2^{64} \cdot 63 = 7 + 2^{64} \cdot (2^6 - 1) = 7 + 2^{70} - 2^{64}$$

По сути, надо найти в скольких местах $g(x) - f(x) \geq 0$

$$70 + 2^{64}x - 2^{64} - 2^x - 3 \cdot 2^{61} \geq 0 \quad \text{и посчитать кол-во решений.}$$

$$70 + 2^{64}x - 2^x - 7 \cdot 2^{64} \geq 0$$

$$g(63) - f(63) = 2^{70} - 2^{64} + 7 - 13 \cdot 2^{63} = 128 \cdot 2^{63} - 2 \cdot 2^{63} - 13 \cdot 2^{63} + 7 =$$

$$= 113 \cdot 2^{63} + 7$$

$$g(62) = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 62$$

$$f(62) = 2^{62} + 3 \cdot 2^{61}$$

$$g(62) - f(62) = 70 + (2^{64} - 1)(2^6 - 2) - 3 \cdot 2^{61} - 2^{62}$$

У всех решений: Выходит при наших x_i : $g(x_i) - f(x_i) \geq 0$ и

посчитать все суммы $\sum_i g(x_i) - f(x_i)$, т.е. значения сумм,

удовлетворяющих условию. Ну а это берем, то все считаем.

$$\text{т.е. } (70 + (2^{64} - 1) \cdot 64 - 2^{64} + 3 \cdot 2^{61}) + (70 + (2^{64} - 1) \cdot 63 - 2^{63} - 3 \cdot 2^{61}) +$$

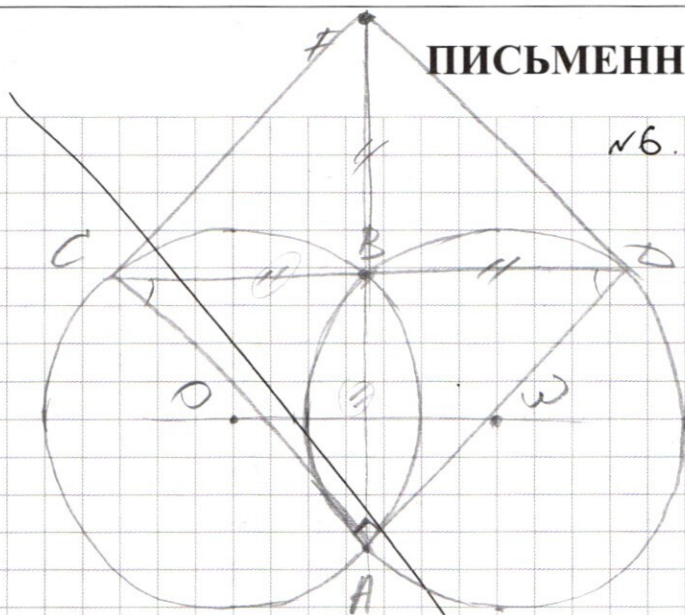
$$+ 70 + (2^{64} - 1) \cdot 62 - 2^{62} - 3 \cdot 2^{61} | \dots =$$

$$= 2^{64} - 1$$

$$\underline{\text{Ответ: } 2^{64} - 1.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6



Риски истражи одружението $\tau_{0,1,2}$

Заметим, что $\angle BCA = \frac{\angle BA}{2}$
 [рассматриваемые дуги равны тогда и только тогда, когда
 (впис. угол опир. на дугу)
 разности дуг равны.]

$\angle BDA = \frac{BA}{2}$ (anterior)

morgan $\angle BCA = \angle BDA$

но в прямоугольном $\triangle ADE$ ($\angle A = 90^\circ$)

$$\angle DCA + \angle CDA + \angle CAD = 180^\circ$$

тогда $\angle DCA = \angle ADC = 45^\circ$, при этом $\triangle CAD$ равнобедренный, а так как $OB = OD = OA = AD$ AB — ось симметрии

В любой мере, $OB = BO = OA = AO$, $AB -$

- средний перпендикуляр к OW . Тогда в силу симметрии картины и данных выше утверждений AB - тис-са, высота и медиана в равноб. $\triangle ACD$ а также $OW \parallel CD$.

Менее ясно, что $\tau.A$, $\tau.B$ и $\tau.F$ лежат на одной прямой.

m.k. ~~CB = BD~~ BA - negyana, no ~~CB = BD = FB~~, a máxre

по св-ву равенства /прямых углов/ $\angle CAD$ $AB = CB = BD$,

получим, что $CB = BD = AB = FB$, тогда $ACFD$ — прямоугольник по признаку равенства отрезков диагоналей.

Примечание: $AC \neq AD$ (ΔCAD разное), норма

Из прямоугольного $\triangle BCF$ (гипотенуза в квадрате $\perp$):

$$\#C = \sqrt{BC} \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} CB \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 2BC = BC^2 = 36$$

Doubt: $6\sqrt{2}$; 36.

3)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2gx} = y^{2g}x^{2gx}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

ОДЗ: $x > 0$
 $xy > 0$
 $y > 0$

$$y^{2gx} = x^{2gx} \cdot y^{2gx}$$

$$x^2 - 2xy + 1 - 4x - 3y^2 + 12y - 12 = 1 - 12$$

$$(x-1)^2 - 3(y-2)^2 = 4x-11$$

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D/y = y^2 + 2y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$x = \frac{y+2 \pm (2y-1)}{2}$$

$$y+2 + y-2 = 2y$$

$$y+2 - y+2 = 2$$

$$\sqrt{38} = 1$$

$$x < x+3$$

$$y > -x-3$$

$$x < x+3$$

$$y > -x-3$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

$$x = 3$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6$$

$a = 1$ (везде)
 $a = \sqrt{10}$ (везде)
 $a = \sqrt{8+12} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$y-3 < x$$

$$y-3 < -x$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$y-3 < x$$

$$y-3 > -x$$

$$y-3 > x$$

$$y-3 > -x$$

$$x > 3$$

$$x > 3$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

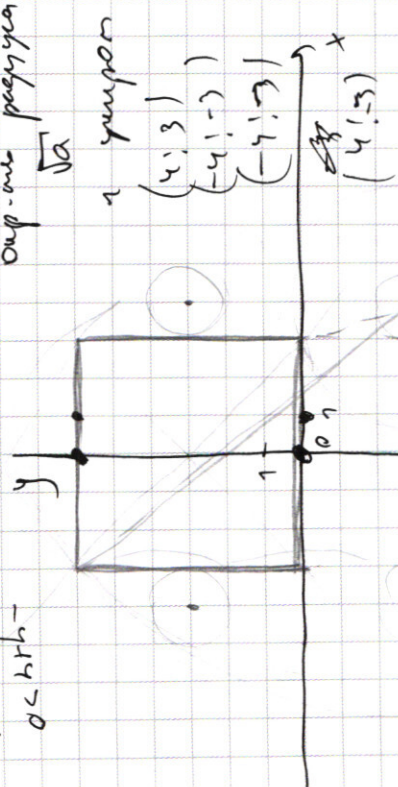
$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$

$$y = f$$



$$y^{2gx} = y^{2gx}$$

$$y^{2gx} = y^{2gx}$$

$$y^{2gx} = y^{2gx}$$

$$y^{2gx} = y^{2gx}$$