

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^2 \lg xy$$

$$\lg x \cdot (\lg y^5 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \cdot \lg y$$

$$5 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y + \lg y}{2} = 2 \lg y \quad \text{или} \quad \lg x = \frac{3 \lg y - \lg y}{2} = \lg y$$

$$x = y^2$$

$$x = y$$

$$(2) x^2 - 2 \cdot (y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = (2y-2)^2$$

$$x = y+2 + 2y-2 = 3y$$

$$\text{или} \quad x = y+2 - 2y+2 = -y+4$$

Исходная система на ОДЗ лобовосильна:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3y \\ y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = y^2 \\ x = -y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ D = 1 + 16 = 17 \end{cases}$$

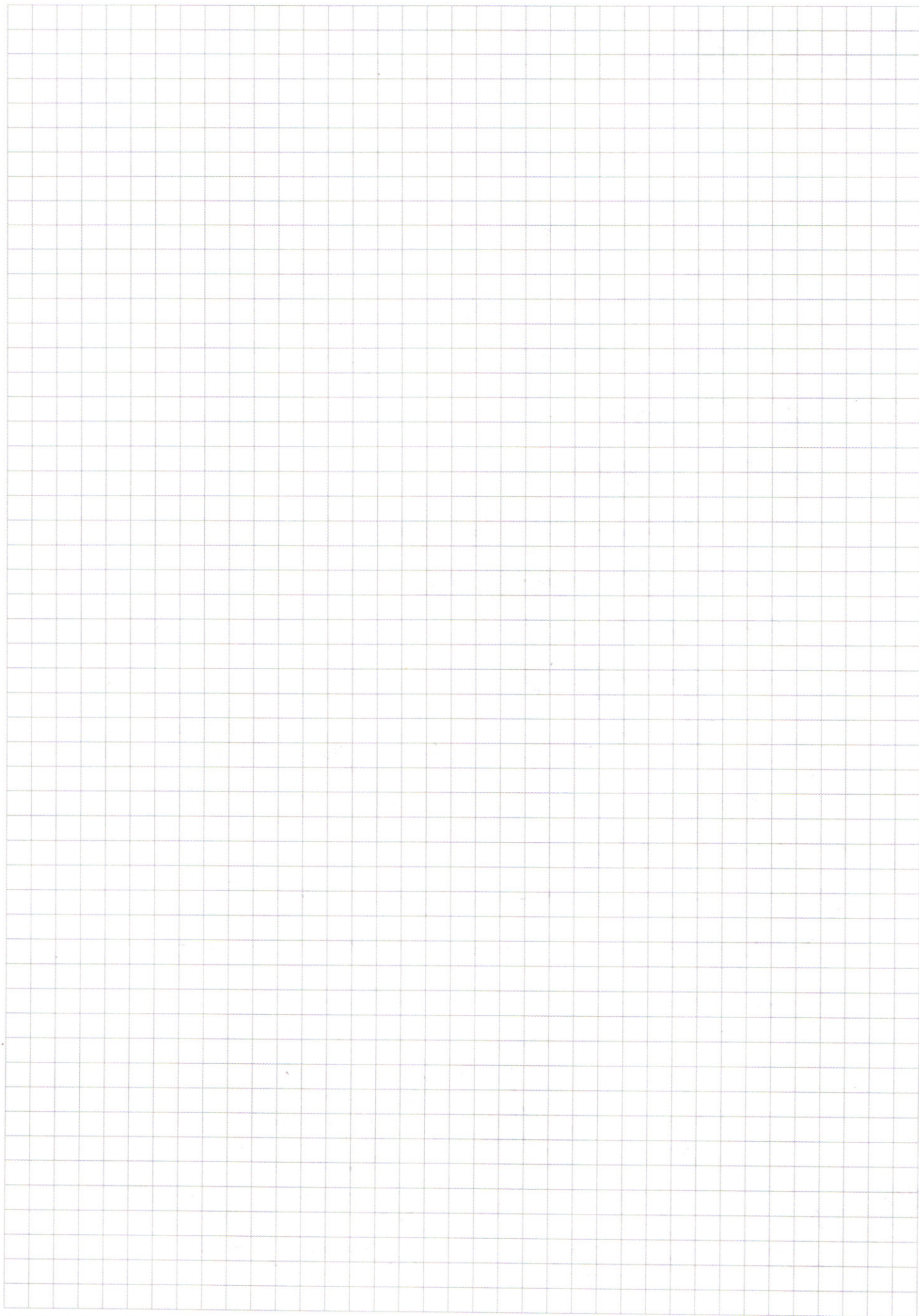
$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$x_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$3) \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \\ \text{но } \lg xy \text{ не } \text{ОДЗ}$$

$$4) \begin{cases} x = y^2 \\ x = -y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ x = 2, y = 2 \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 3 (Ответ: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{7}}{2}; \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$)
решение на стр. 1

и 2

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 4x \cdot \sin 7x - (\sin 3x - \sin 11x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x &= \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ \rightarrow -2 \sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot (\cos 7x + \sin 7x) \\ \sin 7x + \cos 7x &= 0 \quad \text{или} \quad -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \\ \tan 7x &= -1 \\ 7x &= -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} m, m \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} l, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 4x &= 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x &= \frac{\pi}{4} - (7x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 11x &= \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} l, l \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

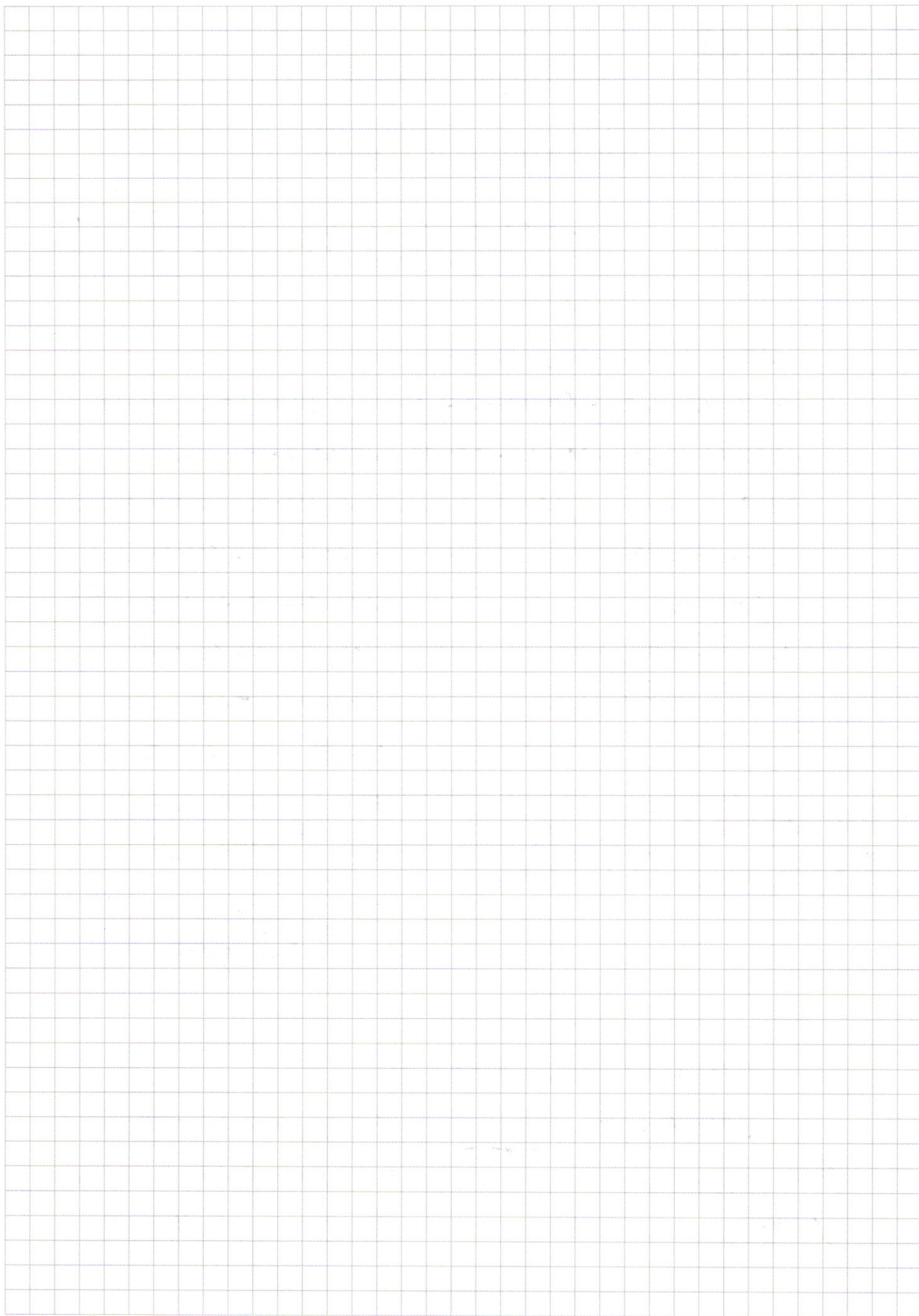
и 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & \text{б)} \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 & - 4 \text{ окружности с } R=\sqrt{a} \end{cases}$$

(г) функции:

$y = x+3; \quad y = -x+3$

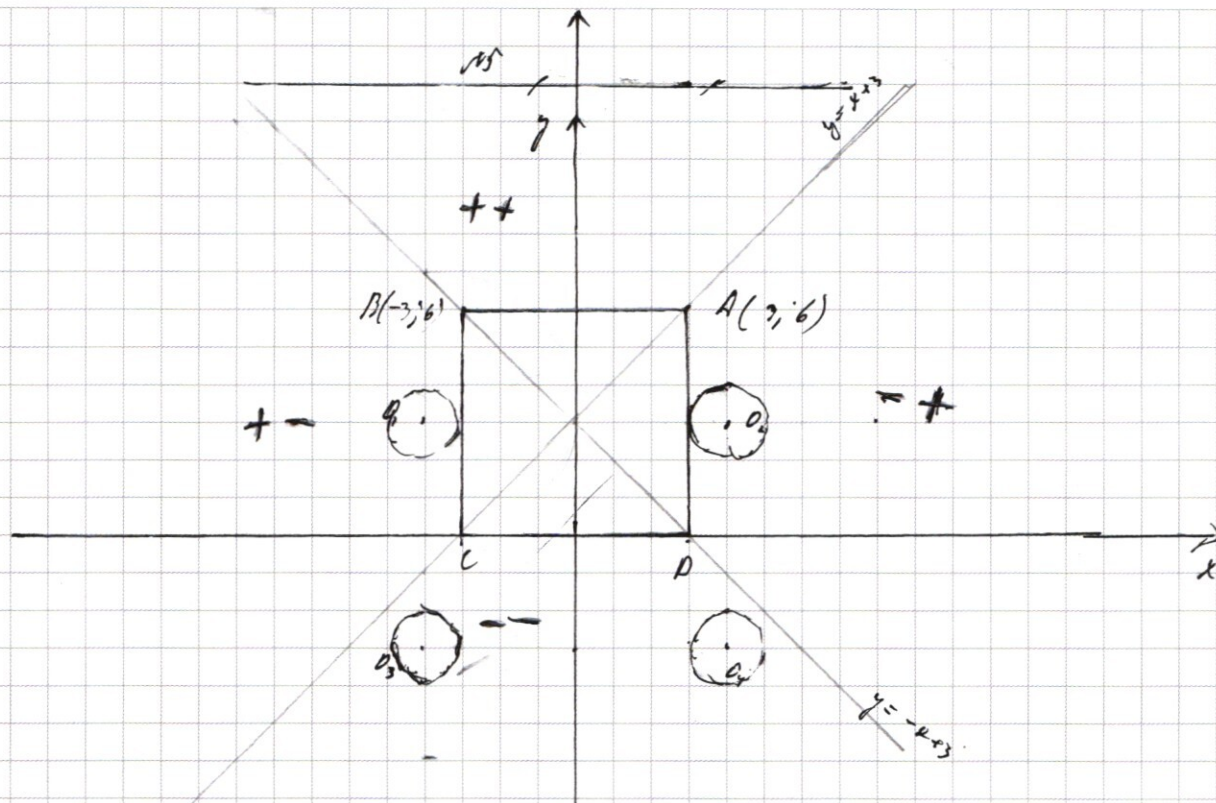
с центрами $O_1(-4; 3); O_2(4; 3)$
 $O_3(-4; -3); O_4(4; -3)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$++: y - 3 - x + y - 3 + x = 6 \\ 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$--: -y + 3 + x - y + 3 - x = 6 \\ y = 0$$

$$+-: y - 3 - x - y + 3 - x = 6 \\ x = -3$$

$$-+: -y + 3 + x + y - 3 + x = 6 \Rightarrow x = 3$$

графично (1) является четырехугольником
ABCD

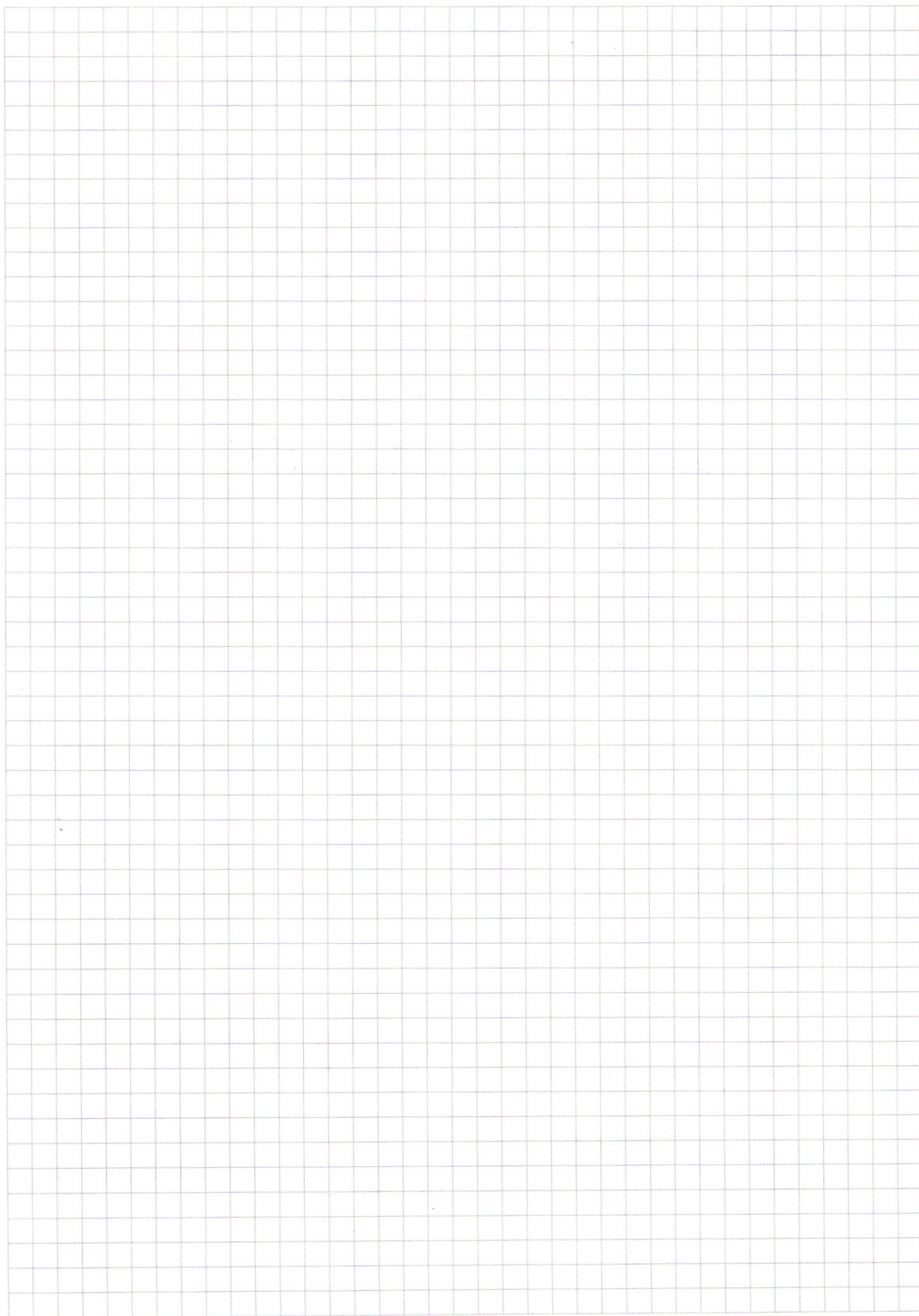
Ответ: $a = 1$; $a = 130$.

Система имеет ровно 2 р-я.
при $R=1 \Rightarrow a=1$. Окружности
 O_1 и O_2 касаются четырех,
а O_3 и O_4 - нет.

Так же система будет иметь
два решения, когда O_3 пройдет
через точку A, а O_4 через т. B
(-3, 6).

по т. Пифагора $R = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} = \sqrt{a}$

$a = 130$. При этом значения a
окружности O_1 и O_2 не имеют
общих точек
с четырехугольником.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Значит наше 9-значное число содержит след. цифры:

5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1.

Количество перестановок (искомых чисел) равно!

$$\frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

Ответ: 560 чисел.

1) Так как $(A, B, C) \perp SO$ и $(ABC) \perp SO$, то $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

Значит $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{4}{1} = R^2 \Rightarrow R = 2$$

Рассмотрим $\triangle SNO_2$

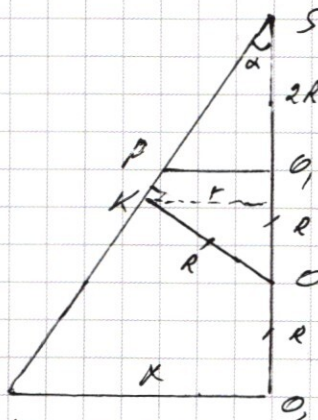
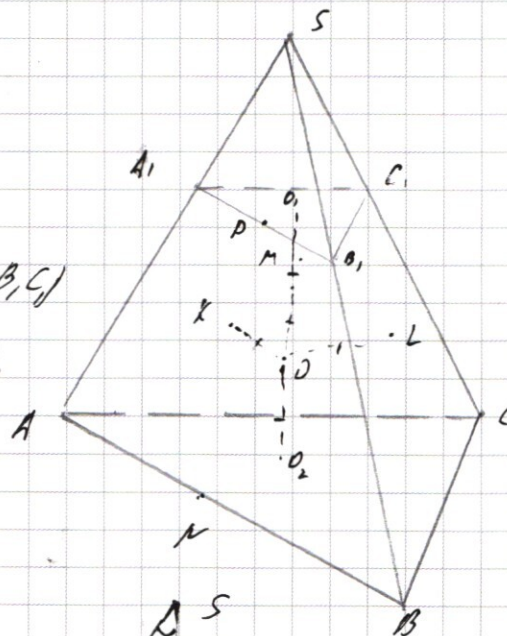
$$OO_1 = OO_2 = OK = R$$

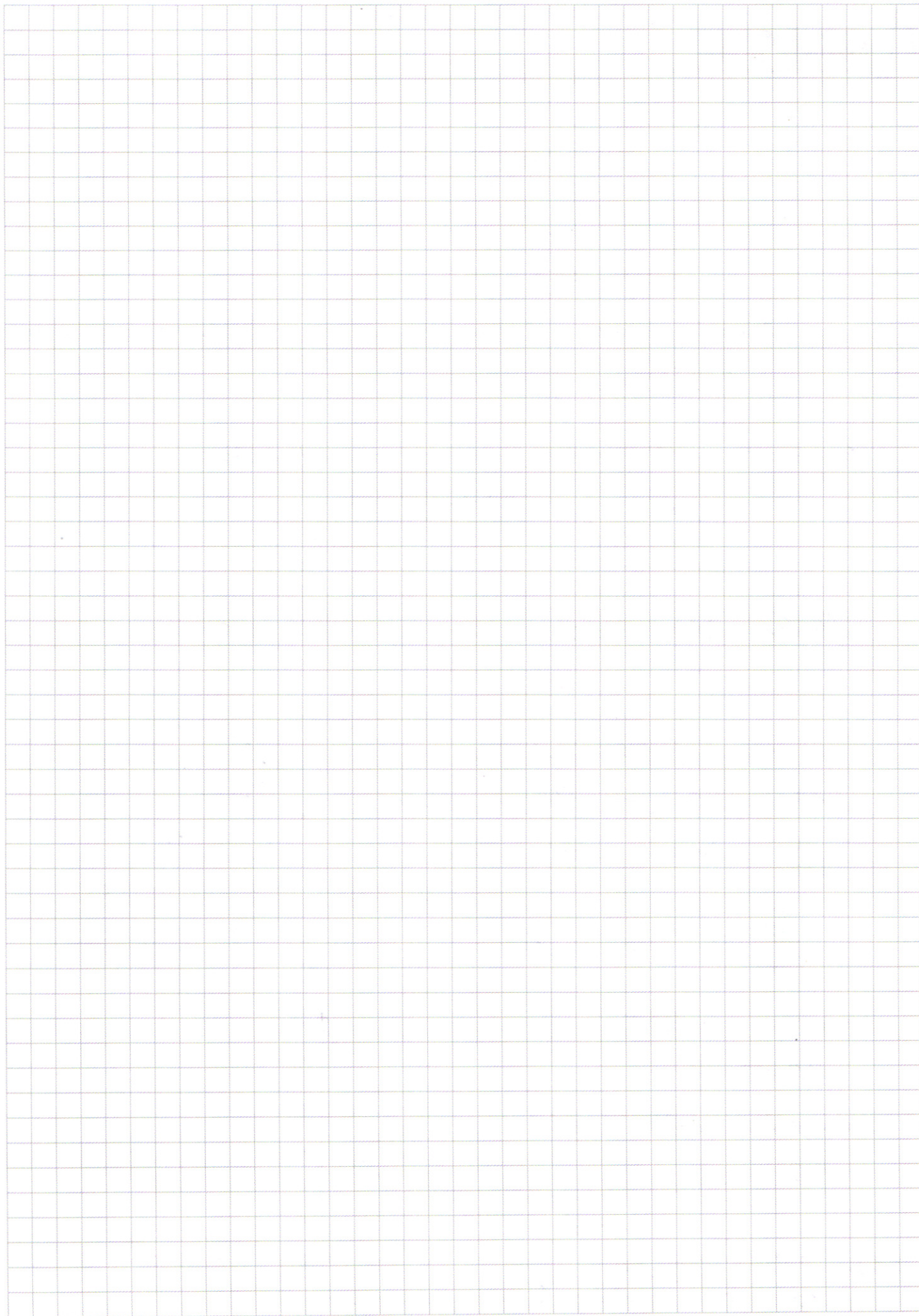
Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$$\frac{NO_2}{PO} = \frac{2}{1} \Rightarrow PO - \text{средняя линия,}$$

$$\text{т.е. } SO_1 = OO_2 = 2R$$

$$\text{из } \triangle SNO \quad \sin \angle OSN = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OSN = \arcsin \frac{1}{2}$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Пусть $\angle KSO = \alpha$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$

В сечении $\sqrt{(KLM)}$ вписана окружность радиусом $r = R \sin(90 - \alpha)$
 $r = R \cos \alpha$

Из $\triangle NSO_2$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NO_2}{SO_2} = \frac{x}{4R} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

Сечение плоскостью $(KLM) \cap (ABC)$, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle KLM$
(KLM - план сечения (KLM))

$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = K^2$, где $K = \frac{R}{r} = \frac{R}{R \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$
 $K = \frac{x}{r} = \frac{x \cdot 3}{2x} = 1.5$

$S_{ABC} = K^2 \cdot S_{KLM}$ $S_{KLM} = \frac{S_{ABC}}{K^2} = \frac{4}{2.25} = \frac{16}{9}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$; $S_{KLM} = \frac{16}{9}$

1) Так как $R_1 = R_2$ и

AB - общая хорда;

$\angle ACD = \angle ADC$, т.к. опираются

на одну хорду

Из суммы углов $\triangle CAD$

$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$; $\triangle CAD$ - равнобедр.

$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \angle CBA = \angle DBA = 90^\circ$, т.к.

опираются на равные хорды.

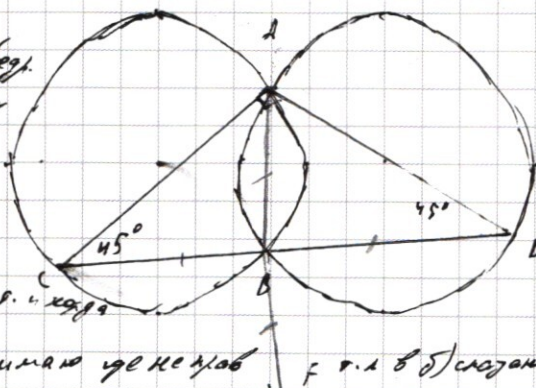
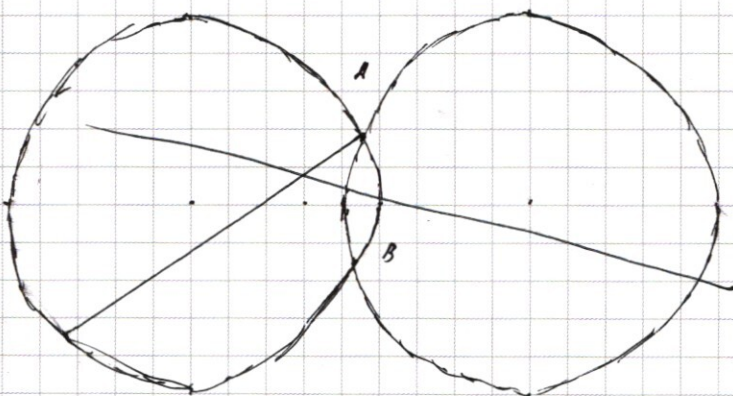
т.к. $\triangle CBA = 90^\circ$, то AC - диаметр

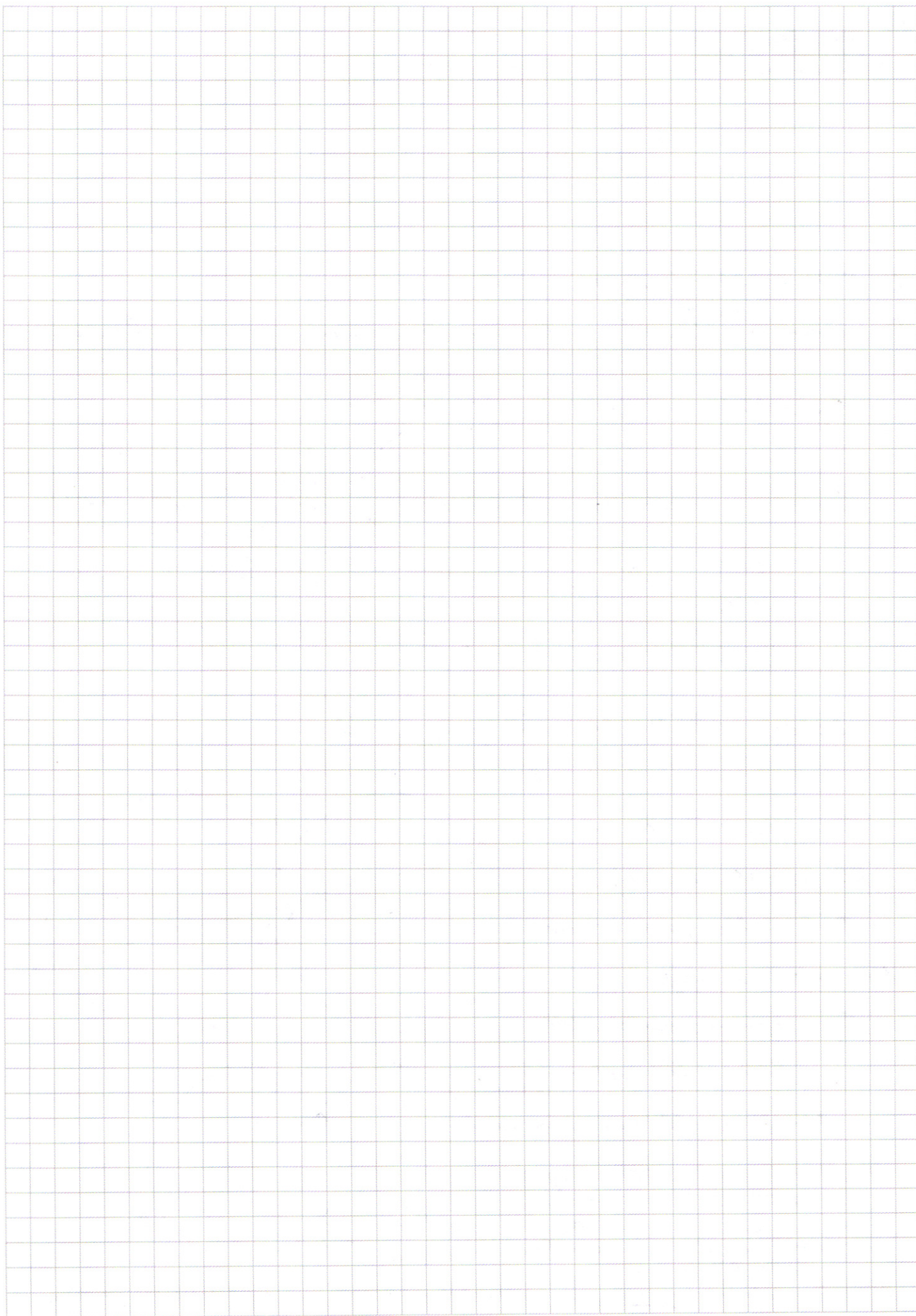
$AC = 10$ т.к. $AB = 10$

$CB = BD = AB$, т.к. AB - хорда, биссектр. $\angle CBA$

$CF = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

Ответ: $CF = 5$; на основании теоремы Птолемея, что $AC = 10$.





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} -y \leq -2^x - 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x \end{cases}$$

$$70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 3 \cdot 2^{65} + 2^x$$

$$(2^{64} - 1)x - 2^x > 3 \cdot 2^{65} - 70$$

Пусть $x = 64$

$$(2^{64} - 1) \cdot 64 - 2^{64} > 3 \cdot 2^{65} - 70$$

$$70 - 64 - 2^{64} > 3 \cdot 2^{65} - 70$$

$$70 - 64 > 5 \cdot 2^{64} + 2^{64} - 6$$

$$70 > 7 \cdot 2^{64} - 6$$

пер-во выполняется

значит ~~целых~~ значений x
всего около $70 \sim 65$

Заметим, что $x > 0$;

имее в первом уравн
системы y больше

положительного числ.

а во втором - меньше

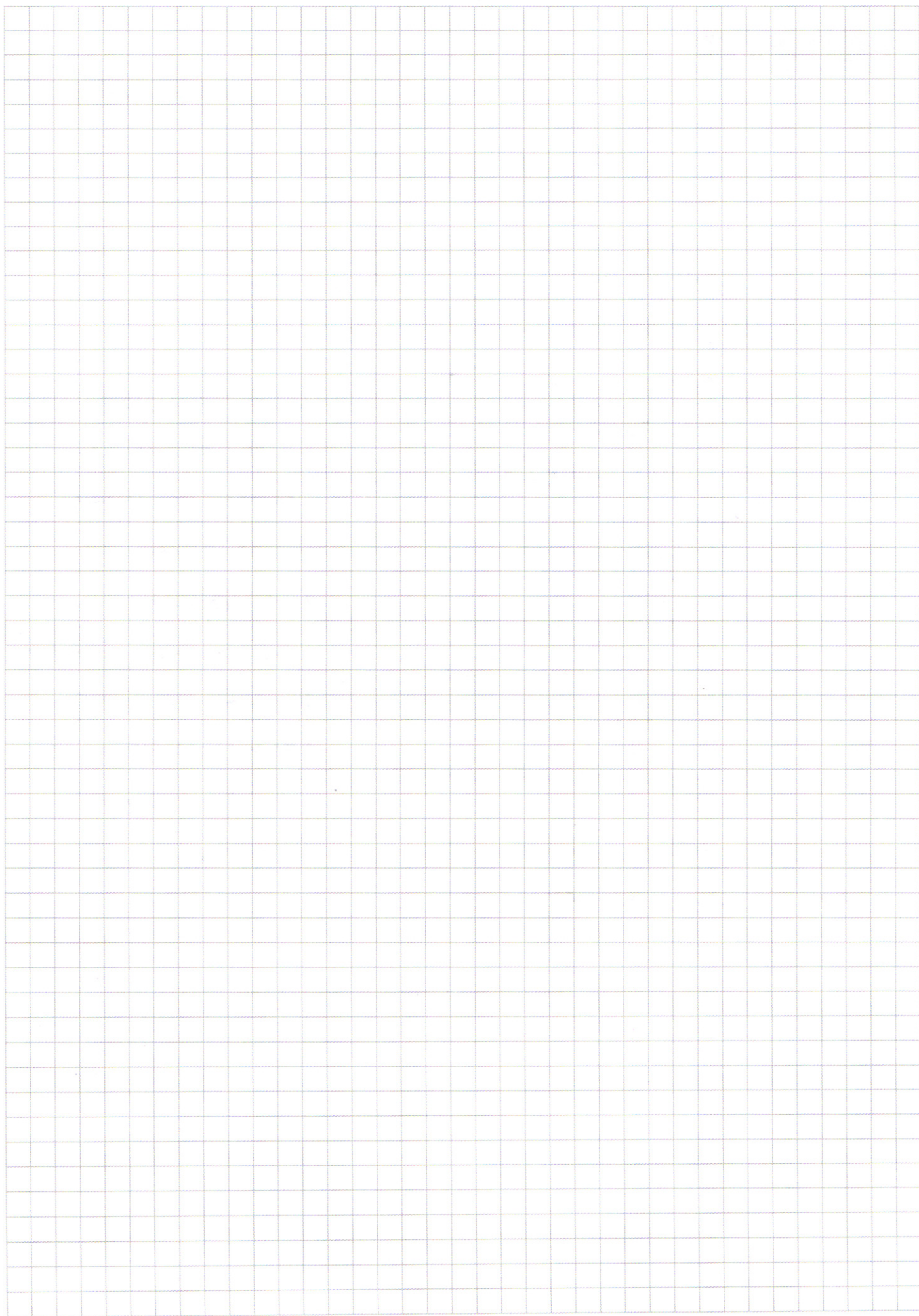
отрицательного, поэтому

решения не будет,

так же заметим, что

$x < 75$, имее

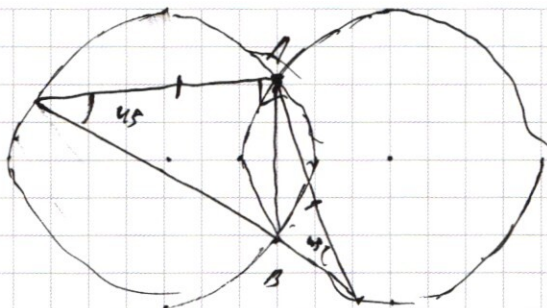
реш. мес.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$= (\sin 11x + \cos 11x) + (\sin 3x - \cos 3x) \frac{\sqrt{2}}{\cos 14x}$$

$$-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$L_4 = 60$$

$$\sqrt{2} \sin 3x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot (\cos 7x + \sin 7x) = \cos 16 \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$-\sqrt{2} \sin kx = \frac{\cos^2 2k - \sin^2 2k}{\cos 2k + \sin 2k} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(2k - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \sin 2x = \cos 7x - \sin 9x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos 7x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x - \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = \cos 17x$$

$$x^3 \cdot x^3 = 5^3 \cdot 3^3 \quad \sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \sin \left(4x \sqrt{\frac{2}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \sqrt{2} \sin 3x \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 4x = -\cos 4x$$

$$5^3 \cdot 3^3 \cdot 1 \cdot 1 \quad \sin 4x - \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{11x - \sqrt{11}}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

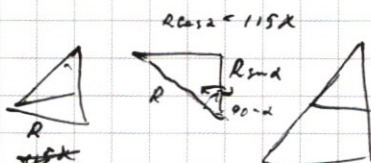
$$, \quad \mu_X = \pi + 2\pi n + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\begin{array}{r} 22 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \\ \hline 22 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$$

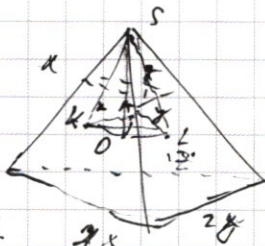
$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 27 \\ \hline 275 \\ 150 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\angle K = \angle L = \angle M$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 81 \\ \hline 130 \end{array}$$

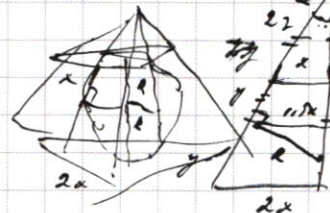


$$R_{C_{S2}} = 115k$$



$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

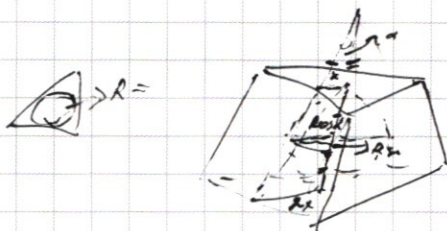
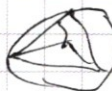
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

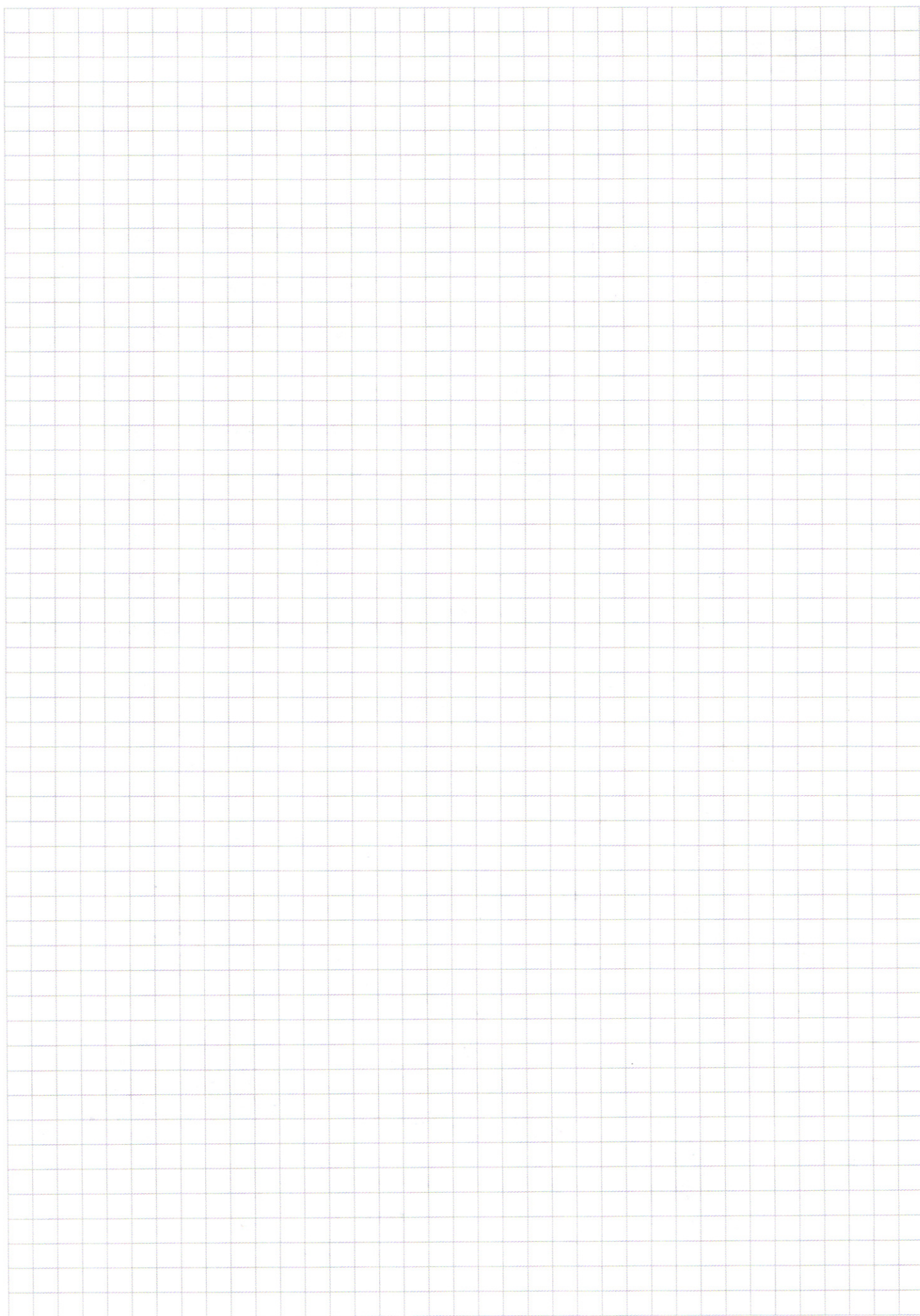


△-190-X

$$\sin(90 - 2\theta) = \frac{h}{2}$$

$$R_x = R \cos \alpha$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \frac{675}{5} = 135 \\ & \frac{3375}{5} = 675 \\ & \frac{135}{5} = 27 \\ & \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}$$

$$\frac{y^{\lg x}}{y^{\lg x} \cdot x^{\lg x}} = x^{-\lg x}$$

$$\frac{1}{x^{\lg x}} = x^{-\lg x}$$

$$\lg x - \lg \frac{y}{x} = 2 \lg y \cdot \lg x$$

$$\lg x \cdot (\lg y - \lg x) = 2 \lg y \cdot \lg x$$

$$5 \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 4 \lg y \cdot \lg x + 4 \lg^2 y$$

$$4 \lg^2 y - \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$\lg^2 x - \lg x \cdot \lg y + 4 \lg^2 y = 0$$

$$D = \lg^2 y - 4$$

$$(9 \cdot 7 \cdot 10^6)$$
 - число с нулем

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$3 \cdot 6 \cdot 9$$

$$\sin(11x + \cos 11x) = \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x$$

$$9 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2$$

$$-2 \sin 7x \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = -2 (\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x)$$

$$-2 \sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = -2 \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin 4x \cdot \sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8})$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(4x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x - \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos^2 7x - 1$$

$$2 \sin^2 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x + \cos^2 7x - \sin^2 7x = 0$$

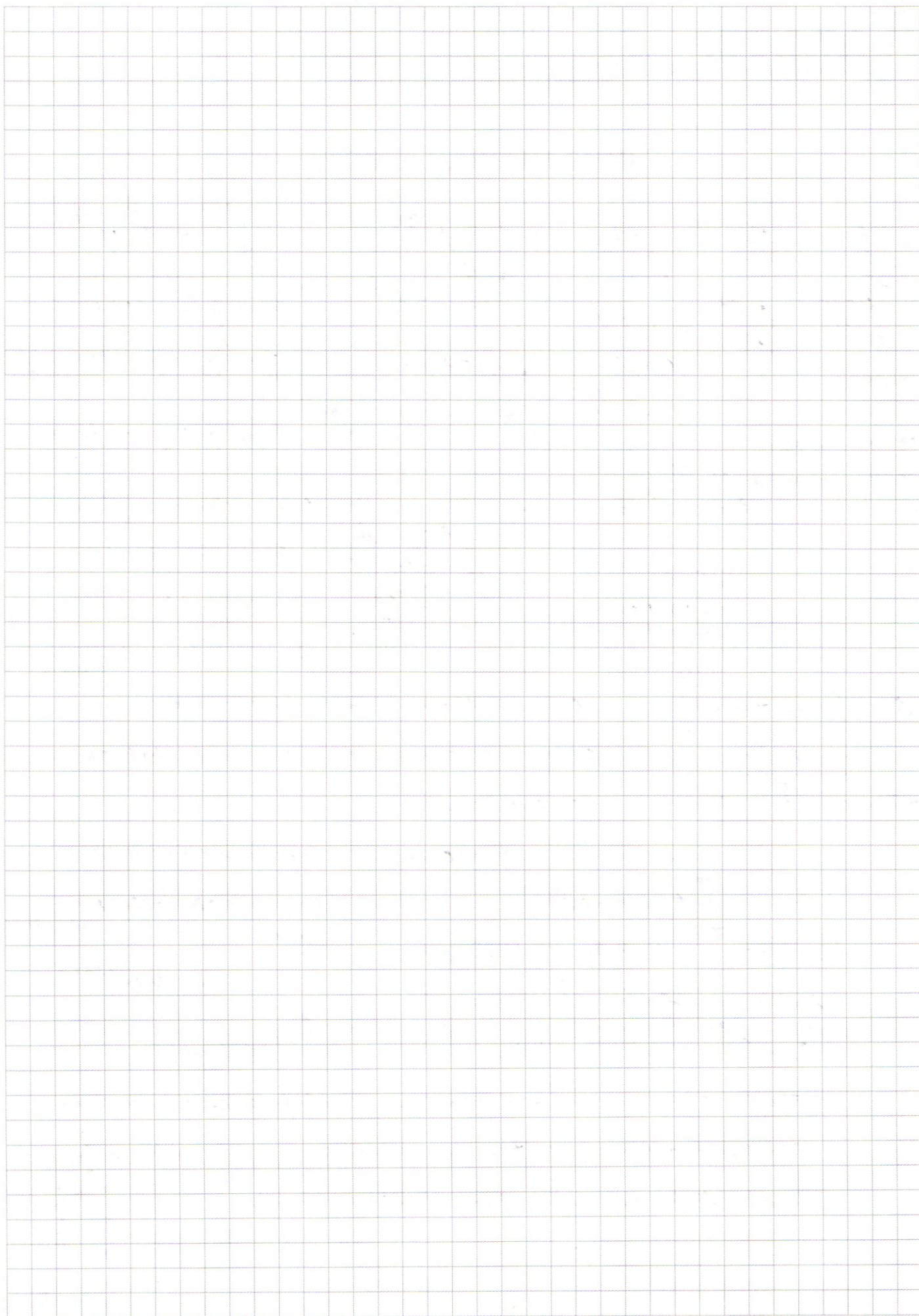
$$\cos 7x \cdot (\cos 7x + 2 \sin 4x) - \sin 7x \cdot (2 \sin 4x - \sin 7x) = 0$$

$$\cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$20 + 2 \cdot x - x - 2$$

$$y \leq 20 + 2 \cdot x - x - 2$$

$$y \leq 18 + x$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

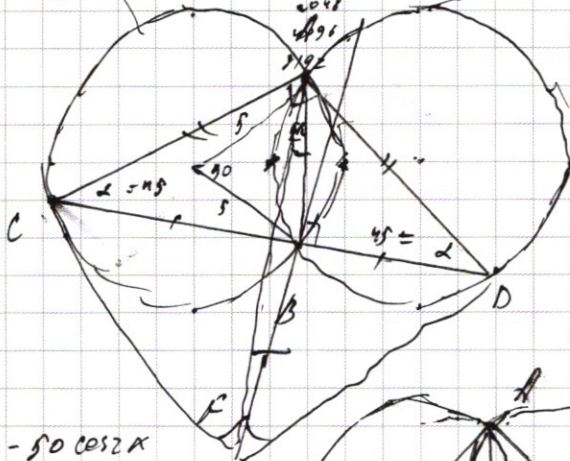
$$D = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 + 12y - 8y - 4 = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$$

$$(\sqrt{8} - 1) = 10 - 2\sqrt{8}$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} + 4 = \frac{9-\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{BD}{DC}$$

$$AD^2 = BD \cdot CD$$



1) Две дуги равны $\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD = \alpha$

2) $\triangle CAD$ - равнобедр.

3) Так как $R_1 = R_2$ и $AC = AD$
 $\angle CBA = \angle DBA$, как углы
90°, опущ. на
равные
тогда AC - диаметр хорды
AD

$$36 = 50 - 50 \cos 2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = \frac{36}{50}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

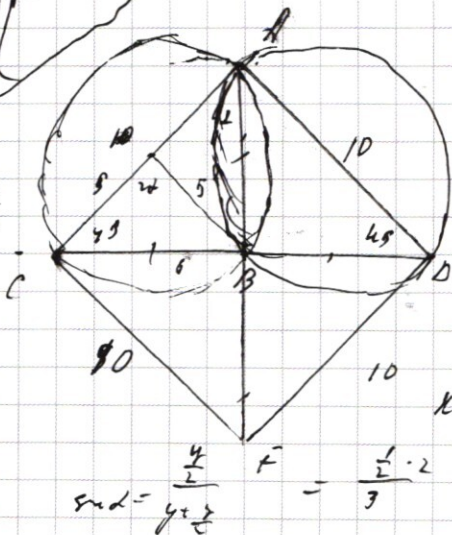
$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$



$$\cos(90 - \alpha) = \frac{2}{3}$$

$$KD = \frac{4}{2} \sin(90 - \alpha) = \frac{2}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{4}{5}$$

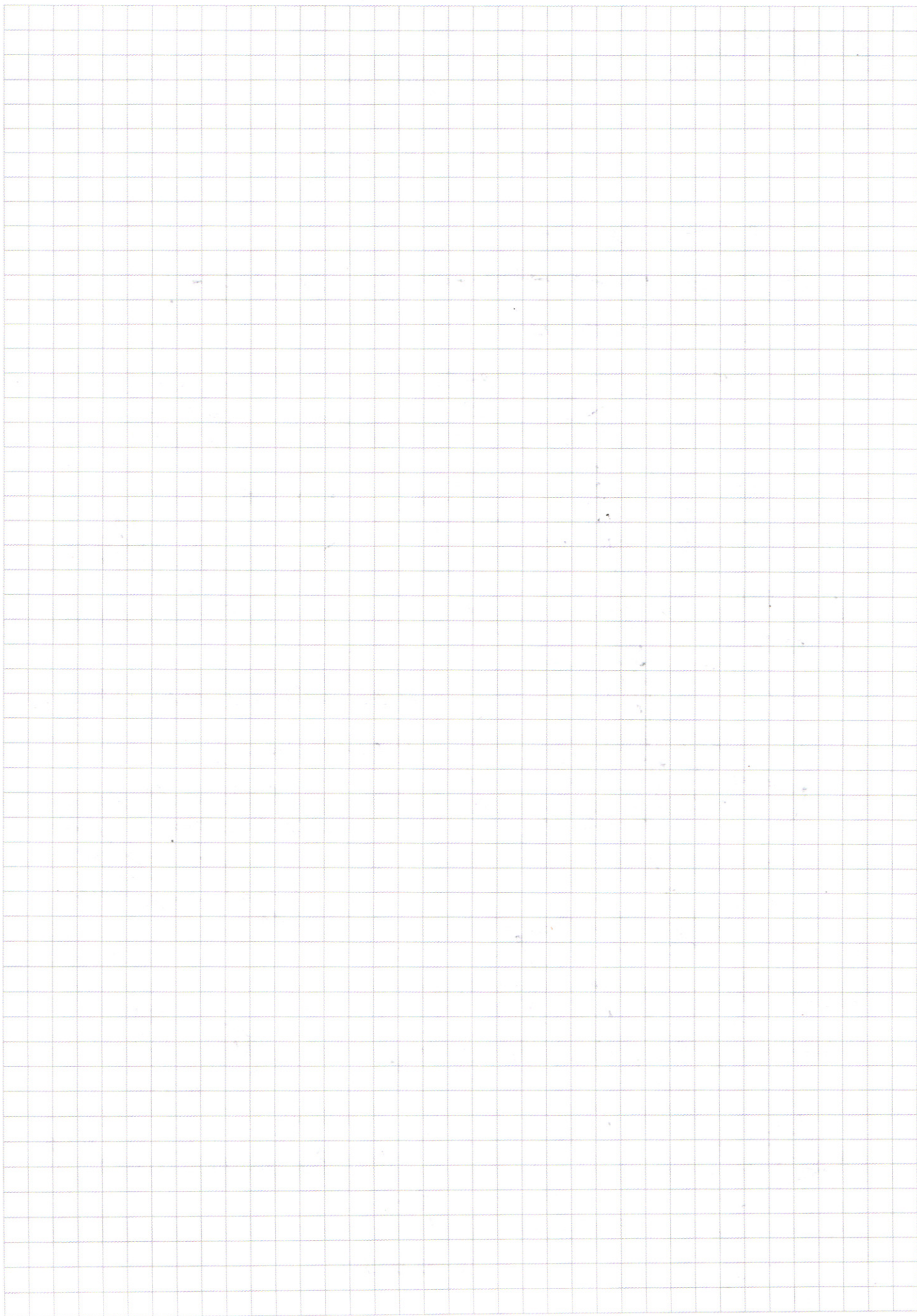
$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)