

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Из этого следует, что количество троек в числе

Заметим, что единицы в восьмизначном числе должны быть как минимум две. Рассмотрим несколько случаев.

1) В числе нет цифры „9“. Тогда количество способов выбрать две цифры „1“ из восьми равно C_8^2 . В каждом из таких способов ровно $2^6 = 64$ способа расставить цифры „5“ и „3“. Значит, таких способов

$$64 \cdot C_8^2 = 64 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 64 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 64 \cdot 7 \cdot 4 = 1792.$$

2) В числе есть цифра „9“. Заметим, что двух цифр „9“ в числе быть не может. Значит, в данных числах будет хотя бы 3 цифры „1“. Рассмотрим сначала ко-во

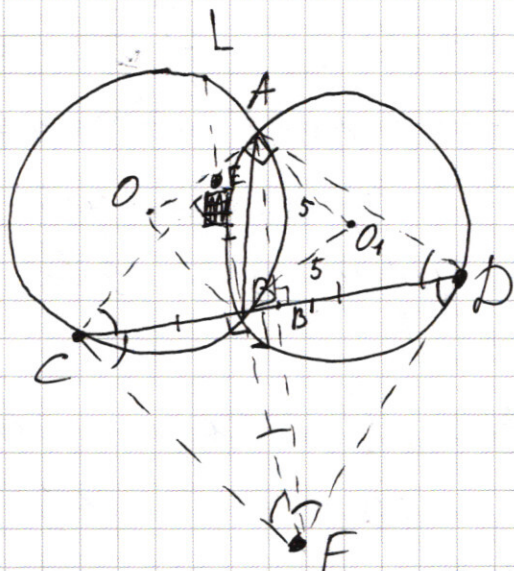
чисел, где „9“ стоит в более старшем разряде, чем „3“ (например 93111555, 91311555 и т.д.).

$$\text{Таких чисел будет } 2^6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 + 2 + \dots + 6 + 1 + 2 + \dots + 5 + 1 + 2 + \dots + 4 + 1 + 2 + \dots + 3 + 1 + 2 + 1 = 2^6 \cdot 28.$$

В каждом из таких чисел мы можем поменять „9“ и „3“ местами, и поэтому добавляются еще $2^6 \cdot 28$ способов.

Итого, получаем ответ
 $2^6 \cdot 2^{84} + 2^6 \cdot 2^{84} + 1792 = 51376$ чисел.
 Ответ: 51376 чисел.

✓6



а) Пусть O и O_1 — центры данных окружностей. Проведём радиусы OA , OB , O_1A , O_1B . Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle ACD = 90^\circ - \alpha$. $\angle AO_1B = 2\angle ADB = 2\alpha$ (центральный и вписанный углы). Аналогично $\angle AOB = 2\angle ACB = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$.

Значит, четырёхугольник AO_1BO — вписанный и все его стороны равны 5, значит, это квадрат. Значит, $\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$.

Пусть луч, выходящий из т. F , пересекает «левору» окружность в точке L . Обозначим за E точку пересечения AC и FL . $\angle CBE$ — прямой $\angle$ и $\angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 45^\circ$. Заметим,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

что отрезок CF будет из вершин E и D под одним и тем же углом ($\angle CDF = 45^\circ$, т.к. $\triangle FBD$ — прямоугольный и равнобедренный). Значит, точки C, E, D, F лежат на одной окружности, а также, так как $\angle CBF = 2\angle CEF$, то B — центр данной окружности ω . Значит, $CB = BF$ (радиусы ω). По теореме Пифагора, $AB^2 = AO^2 + OB^2 \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$. $\Rightarrow CB = BF = 5\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $CF^2 = CB^2 + BF^2 = 100 \Rightarrow CF = 10$. $\Rightarrow \angle CFD = 90^\circ \Rightarrow \angle DCF = 45^\circ \Rightarrow CF = DF$. Значит, $CADF$ — ромб $\Rightarrow AB \parallel AF \perp CD$. Пусть $AF \cap CD = B'$. Тогда $CB' = B'D$. Значит, B совпадает с B' . Значит, B совпадает с B' . Значит, $CB' = B'D = a$, тогда $AB' = a = 5\sqrt{2} \Rightarrow CB' = B'D = 5\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $CF^2 = CB^2 + BF^2 = 100 \Rightarrow CF = 10$.

б) $CB = BE = BD = BF = 6$. По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2 = 36 + (5\sqrt{2})^2 = 36 + 50 = 86 \Rightarrow AC = \sqrt{86}$. Значит, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{86} \cdot 10 = 5\sqrt{86}$.

Ответ: а) 10; б) $5\sqrt{86}$.

N2

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ (\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ (\cos 11x - \cos(\frac{\pi}{2} - 11x)) - (\cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -\sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) - (-\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -\sqrt{2} (\sin(11x - \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4})) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -\sqrt{2} \cdot 2 \sin 4x \cos(7x - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2} \cos 14x \quad | : \sqrt{2} \\ -2 \sin 4x \cos(7x - \frac{\pi}{4}) &= \cos 14x \end{aligned}$$

Заметим, что $\cos 14x = \sin(\frac{\pi}{2} - 14x) = \sin(2(\frac{\pi}{4} - 7x)) = 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = -2 \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \cos(7x - \frac{\pi}{4})$

Значит,

$$\begin{aligned} -2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) &= -2 \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \quad | :(-2) \\ \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \\ \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) (\sin 4x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin 4x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2 \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ -\sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k;$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k;$
 $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad \sqrt[3]{3} \quad (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(2): ~~$x^2 - 2xy$~~ $x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$

$$D/4 = (y+2)^2 - 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$x = y+2 \pm 12(y-1) \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = 3y$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2)$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2) \quad | \cdot 3^{\lg(3y)}$$

$$(y^4)^{\lg(3y)} = (y^2)^{\lg(3y^2)} \cdot 3^{\lg(3y)} \quad | : (y^2)^{\lg(3y^2)}$$

$$(y^2)^{\lg(3y)} = 3^{\lg(3y)}$$

$$(y^2)^{\lg(3y^2)} = 3^{\lg(3y)}$$

$$y^2 \lg 3 = 3^{\lg(3y)}$$

$$y^2 \lg 3 = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \quad | : 3^{\lg 3}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} = \frac{3^{\lg y}}{y^{\lg 3}}$$

По по свойству логарифмов $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$,
значит,

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow x = 3y = 3 \cdot 3 = 9$$

$\Rightarrow$ одно из решений — $(9; 3)$

$$2) \quad x = -y + 4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg((4-y)y)}$$

$$y^{2 \lg((4-y)y)} = (y^2)^{\lg(4-y) + \lg y} = y^{2 \lg(4-y)} \cdot y^{\lg(y^2)}$$

$$\Rightarrow y^{5 \lg(4-y)} = \cancel{y^{2 \lg(4-y) y}} y^{2 \lg(4-y)} \cdot y^{\lg(y^2)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \quad | : y^{2 \lg(4-y)}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = y^{\lg(y^2)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(4-y)^{3 \lg y} = y^{\lg(y^2)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \quad | : (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{(4-y)^{\lg(y^3)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{\lg(y^2)}$$

$$(4-y)^{\lg\left(\frac{y^3}{4-y}\right)} = y^{\lg(y^2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \sqrt{5}$$

Рассмотрим (1):

$$1) \ y-3-x > 0; \ y-3+x > 0 \Rightarrow y > x+3; \ y > -x+3$$

$$\cancel{y} - 3 - x + \cancel{y} - 3 + x = 6$$

$$y = 6$$

$$2) \ y-3-x > 0; \ y-3+x < 0 \Rightarrow y > x+3; \ y < -x+3$$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$3) \ y-3-x < 0; \ y-3+x > 0 \Rightarrow y < x+3; \ y > -x+3$$

$$-y+3+x + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$4) \ y-3-x < 0; \ y-3+x < 0 \Rightarrow y < x+3; \ y < -x+3$$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$-2y + 6 = 6$$

$$y = 0$$

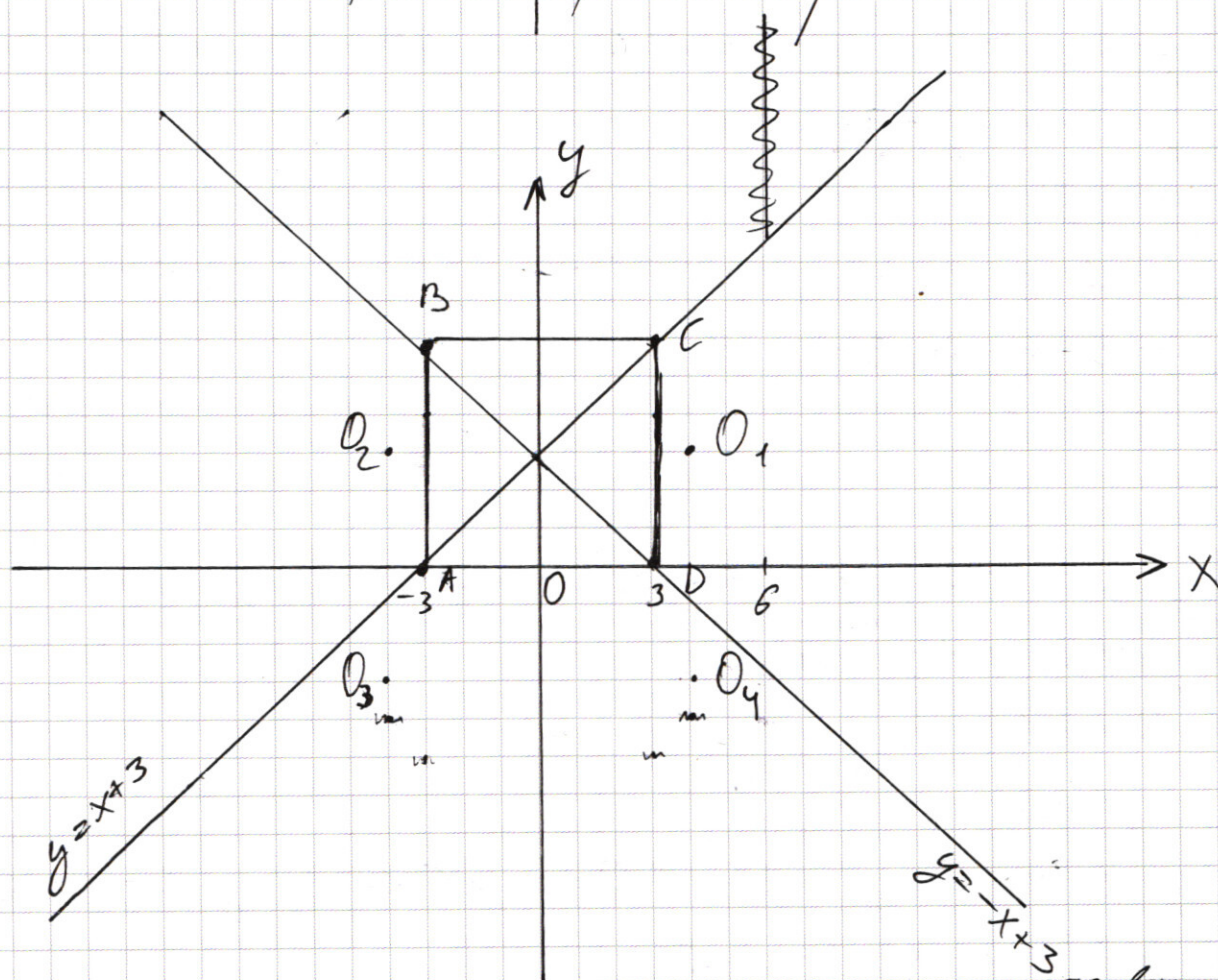
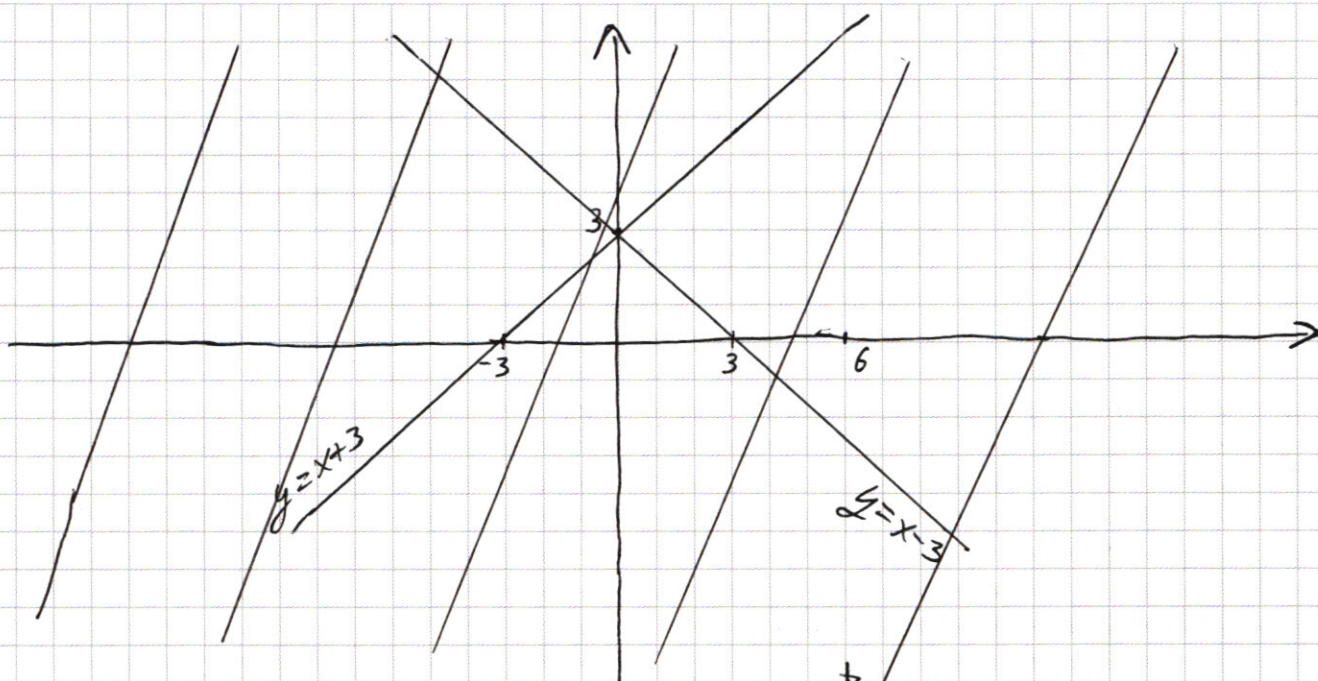


График (2) представляет собой ~~четыре~~ ^{четыре} четверти окружности с центрами ~~(3; 3)~~ ^{(4; 3); (-4; 3); (-4; -3); (4; -3)} и радиусами, равными $|\sqrt{a}| = \sqrt{a}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $ABCD$ — квадрат. $ABCD$ лежит в верхней полуплоскости относительно прямой $y=0$. ~~Потому что четверти окружности~~ Заметим, что четверти окружности с центрами $(-4; -3)$; $(4; -3)$ могут иметь с $ABCD$ максимум одну общую точку каждая.

Заметим, что если четверть окр-и с центром O_1 имеет общую точку с $ABCD$, то и четверть окр-и с центром O_2 имеет с $ABCD$ общую точку.

Для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы четверти окр-ей с центрами O_3 и O_4 не ~~были~~ имели с $ABCD$ общих точек, а четверти окр-ей с центрами O_1 и O_2 имели с $ABCD$ ровно одну общую точку каждая. $\Rightarrow CD$ касается четв. окр. O_1 и AB касается четв. окр. O_2 .

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a \Rightarrow (y-3)^2 = a - (x-4)^2$$

$$y = \sqrt{a - (x-4)^2} + 3 \Rightarrow$$

1) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$. Подставим $x=3$:

$$1^2 + (y-3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + 9 + 1 - a = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 10 - a = 0$$

$$D/4 = 9 - 4(10 - a) = 9 - 10 + a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

$$2) (x+4)^2 + (y-3)^2 = a$$

Представим $x = -3$.

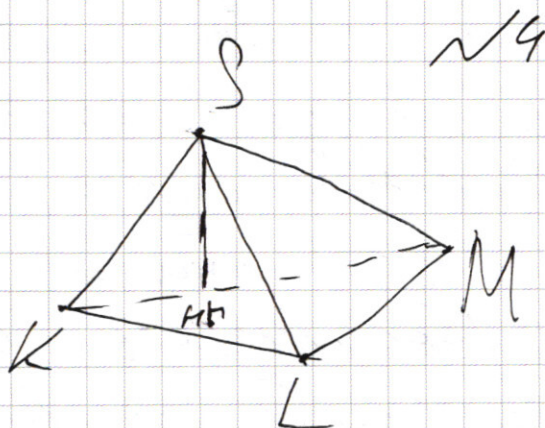
$$1^2 + (y-3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + 9 + 1 - a = 0$$

$$y^2 - 6y + 10 - a = 0$$

$$D/4 = 9 - (10 - a) = 9 - 10 + a \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

Ответ: $a = 1$.



Заметим, что SK , SL и SM — касательные к данной сфере. Значит, $SK = SL = SM$.

Опустим высоту SH . $\triangle SHK =$

$= \triangle SHL = \triangle SHM$ (по катету и гипотенузе).

Значит, $KH = LH = MH \Rightarrow H$ — центр описанной окружности около $\triangle KLM$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\sqrt{2} \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sqrt{2} \left(\sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

~~2~~

$$-2 \sin \frac{11x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$= -2 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\cos\left(\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\right) = \cos\left(14x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 14x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)$$

$$= \sin 14x$$

$$\cos(14x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right) = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\right)$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin 4x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} n$$

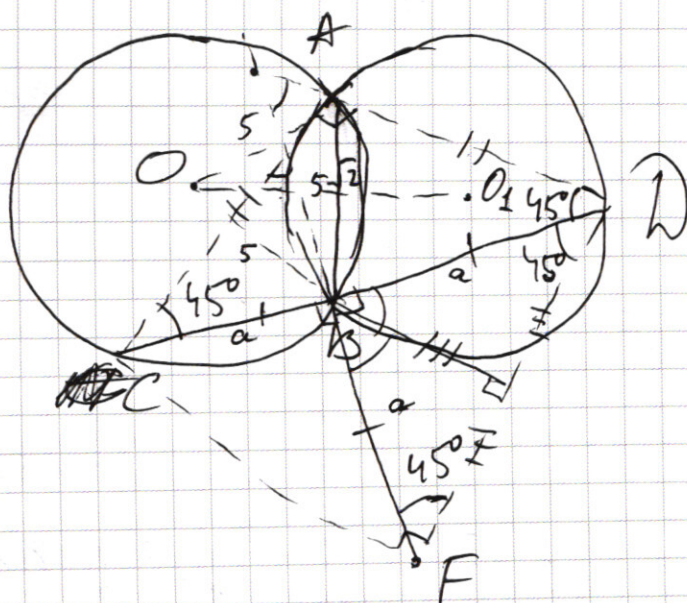
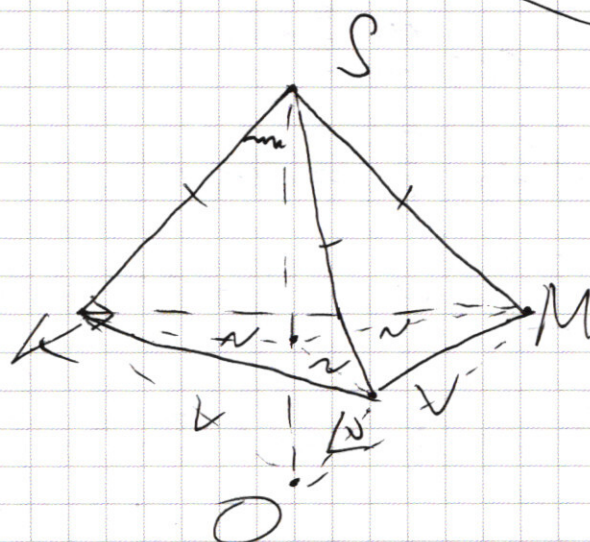
$$\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

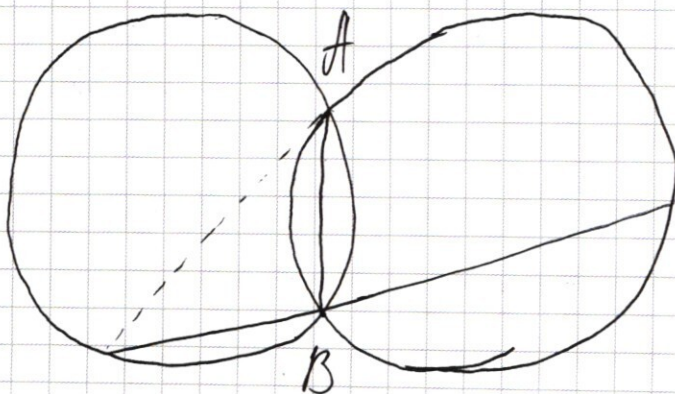
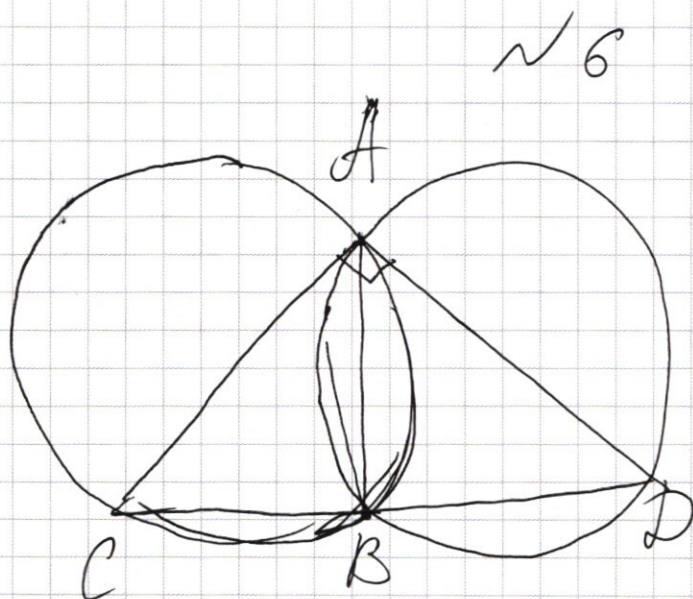
$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad \sqrt{7}$$

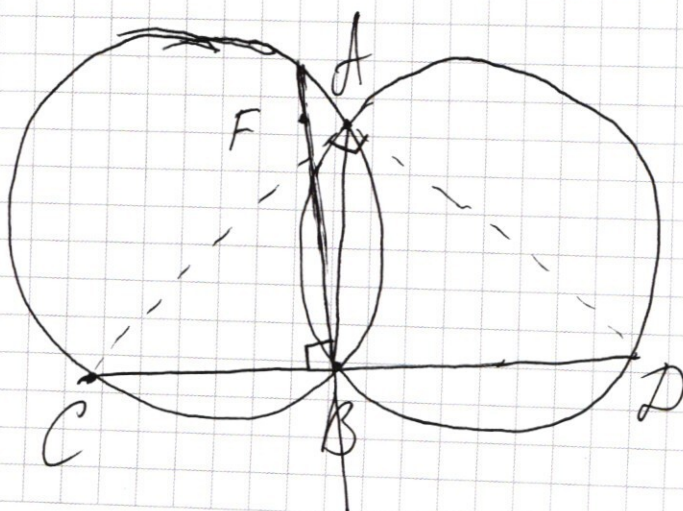
$$\Rightarrow 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

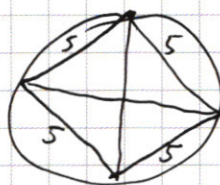
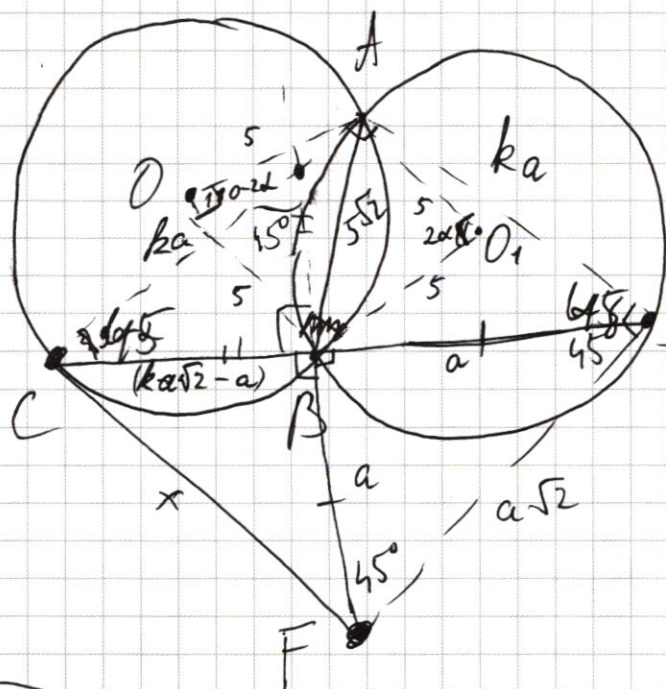


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$BF = BD$$



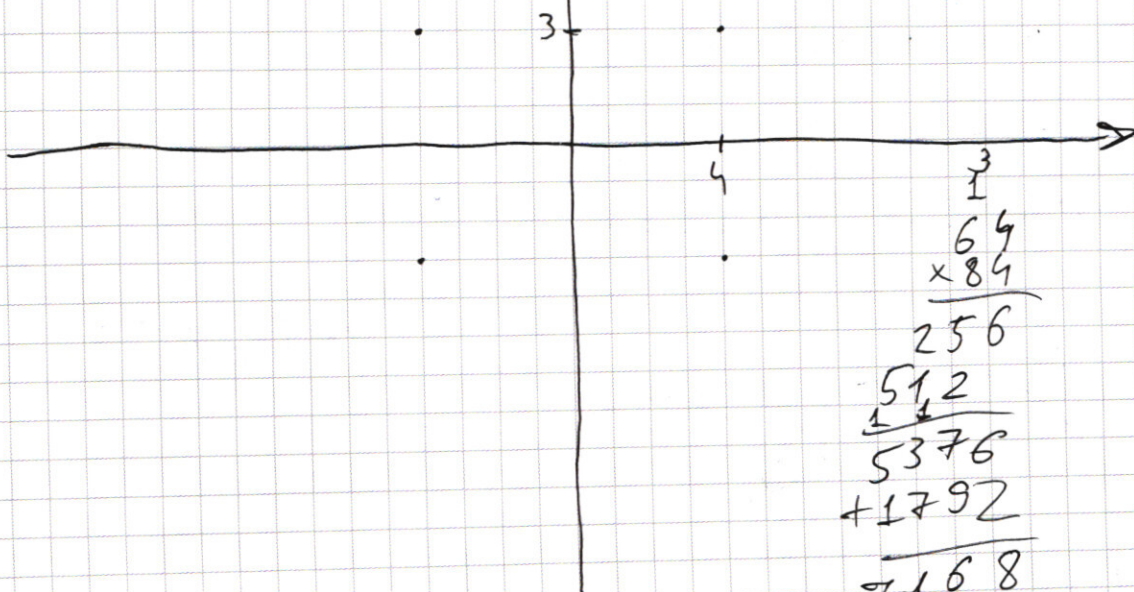


$$\begin{aligned}
 x^2 &= a^2(k\sqrt{2}-1)^2 + a^2 = \\
 &= a^2(2k^2 - 2\sqrt{2}k + 1) + a^2 = \\
 &= 2a^2k^2 - 2\sqrt{2}a^2k + 2a^2 = \\
 &= 2a^2(k^2 - \sqrt{2}k + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

1792

9 3 1 1 1 5 5 5



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos -2 \sin 7x \sin 4x - \{2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \cos 14x \\ \sin 7x + \cos 7x &= \sin 7x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 7x \right) = 2 \sin \frac{7x + \frac{\pi}{2} - 7x}{2} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{2} - 7x}{2} \\ \cos \frac{7x - \frac{\pi}{2} + 7x}{2} &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \sin 4x \cdot \sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

3
64
x 28

512
128
1792

22
1792
3
5376

✓1

3375 = 3³ · 5³

3375 | 3
1125 | 3
375 | 3
125 | 5
25 | 5
5 | 5
1

3375 = 3³ · 5³
11 333555
222222

(C₈² · 2⁶)

11 19 3555

9 111 3555

93
28
+ 21
+ 15
106
37
84

Пусть есть

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^2 \lg xy \quad (1) \end{aligned} \right. \sim 3$$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$(2): x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D/4 = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$x = y+2 \pm 2(y-1) = \begin{cases} y+2+2y-2 = 3y \\ y+2-2y+2 = -y+4 \end{cases}$$

$$(2): (x-3y)(x+y-4) = 0 \quad 3y^{-\lg(3y)}$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2) \quad y^5 \lg(3y)$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2) = (y^2)^{\lg(3y^2)}$$

$$(y^4)^{\lg(3y)} : (y^2)^{\lg(3y^2)} = y^{4\lg(3y) - 2\lg(3y^2)} =$$

$$= y^{2(\lg(9y^2) - \lg(3y^2))} = y^{2 \cdot \lg 3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(3y)} \cdot y^{2 \lg 3} = 1$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg(3y)} = 3^{\lg 3 \cdot \lg y} \\ \frac{y^{\lg 9}}{3^{\lg 3}} = 3^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} = 3^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} = \left(\frac{3}{y}\right)^{\lg \frac{y}{3}} = \sqrt{\frac{y}{3}} \cdot \frac{3^{\lg y}}{y^{\lg 3}} = 1$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} = 1$$

$$y = 3^{\sqrt[3]{1}} = 3$$