

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. / $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

У нас есть всего 2 варианта размещения 8 цифр произведения
которых равно 3375.

~~$(5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1)$ и $(5; 5; 5; 3; 3; 9; 1; 1)$~~

$(5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1)$ и $(9; 5; 5; 5; 3; 1; 1; 1)$

Мы должны посчитать количество все возможные комбинации этих
цифр.

I случай. / $(5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1)$

Цифры в нашем числе можно разместить C_8^3 вариантами.
На остальных 5-ти местах пробки можно разместить C_5^3 вар.
И на оставшихся двух местах у нас будут единицы.

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 560$$

II случай. / $(9; 5; 5; 5; 3; 1; 1; 1)$

Соответственно у нас $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 =$

$$= \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} =$$

(для 9) (для 5) (для 3) (для 1)

$$= 1120$$

В общем $560 + 1120 = 1680$

Ответ. 1680

$$2. / \cos 4x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$(\cos 4x - \cos 3x) - (\sin 4x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \left(\cos 7x \sin \left(7x - \frac{3\pi}{4} \right) - \sin 7x \cos \left(7x - \frac{3\pi}{4} \right) \right) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sin \left(-7x - \frac{3\pi}{4} \right) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ \sin 4x = -\sin \left(7x + \frac{3\pi}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 4x = -(-1)^m \left(7x + \frac{3\pi}{4} \right) - \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 4x = -7x - \frac{3\pi}{4} - \pi(2m) \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ 4x = 7x + \frac{3\pi}{4} - \pi(2p-1) \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

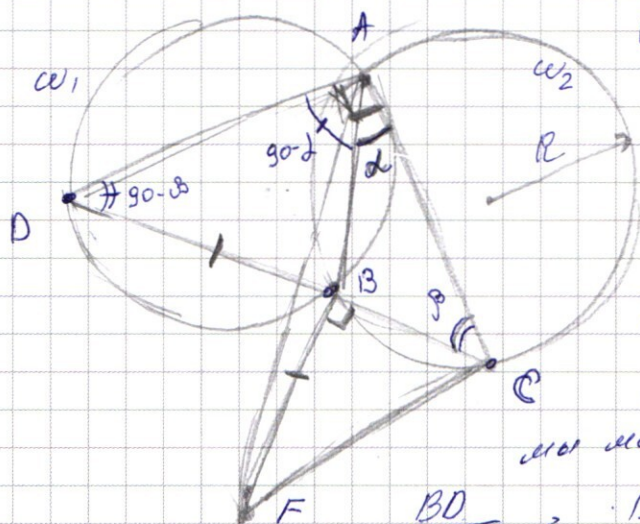
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi p}{3} \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ответ

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi p}{3} \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.1



$R=5$, $\angle CAD=90^\circ$ $BF=BC$ $BF \perp DC$

а) CF /-?

обозначим $\angle BAC = \alpha$

$\angle BAD = 90 - \alpha$

для ω_1 $\triangle ADB$ вписанный

для ω_2 $\triangle ABC$ вписанный

мы можем написать по теореме синусов

$$\frac{BD}{\sin(90-\alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{DB}{\cos \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{2R}$$

$$\cos \alpha = \frac{BD}{2R}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{BC^2}{4R^2} + \frac{BD^2}{4R^2} = \frac{BC^2 + BD^2}{4R^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BC^2 + BF^2}{4R^2} = \frac{CF^2}{4R^2} = 1 \Rightarrow CF = 2R = 10 //$$

б) $BC=6$ S_{ACF} /-?

обозначим $\angle ACB = \beta \Rightarrow \angle ADB = 90 - \beta$

для $\triangle ADB$ и ω_1 $AB^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos(180-2\beta)$

для $\triangle ACB$ и ω_2 $AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$

$$\Rightarrow 180 - 2\beta = 2\beta \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DA = AC = \frac{DC}{\sqrt{2}} = \frac{BD + BC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{CF^2 + BC^2} + BC}{\sqrt{2}} = \frac{8 + 6}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$\sin \angle BCF = 4/5 \quad \cos \angle BCF = 3/5$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(\angle BCF + 45^\circ)}{2} =$$

$$= 35\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \right) = 49$$

Ответ $CF = 10$

$S_{PCF} = 49$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

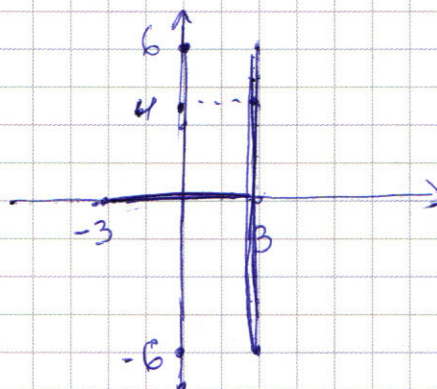
$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x > 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < y < 6 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < y < 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3-x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ y = 0 \end{cases}$$



Если у нас x и $y \geq 0$ то второе уравнение у нас ~~является~~ формула круга с координатами центра $(4, 3)$ и для того чтобы график второго уравнения и первого уравнения пересекались в двух точках $a \leq 3 \Rightarrow a \in [0; 3]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \\ 1) 675 \\ 135 \\ 27 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 125 \\ 135 \\ 54 \\ 27 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 555 \\ \hline 333 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 555 \\ \hline 93 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\sin 4x \sin 4x - \sin 7x \cos 4x = \sqrt{2} \sin 7x \cos 7x$$



$$2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x = \cos(11x + 3x) = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$\begin{cases} \cos 11x = a \\ \cos 3x = b \end{cases} \begin{cases} \sin 11x = c \\ \sin 3x = d \end{cases}$$

$$\cos d - \cos b = - \cos 2c - \cos 2a$$

$$d = \frac{d-b}{2} + \frac{d+b}{2} \quad \cos \pi - \cos 2\pi = -2$$

$$b = \frac{d-b}{2} - \frac{d+b}{2} = -2 \cdot (-1) = 2$$



$$a - b - c + d = \sqrt{2} (ab - cd)$$

$$(a-b) - (c-d) = \sqrt{2} (ab - cd)$$

$$\cos d = \cos \left(\frac{d-b}{2} + \frac{d+b}{2} \right) =$$

$$\cos 11x - \cos 3x = \cos \left(\frac{11x-3x}{2} + \frac{11x+3x}{2} \right) = \cos \frac{d-b}{2} \cos \frac{d+b}{2} - \sin \frac{d-b}{2} \sin \frac{d+b}{2}$$

$$= \cos \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} - \sin \frac{11x-3x}{2} \sin \frac{11x+3x}{2}$$

$$= \cos \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} - \sin \frac{11x-3x}{2} \sin \frac{11x+3x}{2}$$

$$= -2 \sin \frac{11x-3x}{2} \sin \frac{11x+3x}{2} = -2 \sin 4x \sin 7x$$

$$\sin 11x - \sin 3x = \sin \left(\frac{11x+3x}{2} + \frac{11x-3x}{2} \right) = \sin \frac{11x+3x}{2} \cos \frac{11x-3x}{2} + \cos \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2}$$

$$= \sin \frac{11x+3x}{2} \cos \frac{11x-3x}{2} + \sin \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} = 2 \sin 4x \cos 4x$$

$$3) \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\lg 10 = \lg 5 + \lg 2$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = \frac{y^{\lg xy}}{x^{\lg xy}}$$

$$(y^{\lg x + \lg y})^2 = (y^{\lg x} \cdot y^{\lg y})^2$$

$$\frac{(y^{\lg x})^5}{x^{\lg x}} = \frac{(x^{\lg y})^5}{x^{\lg x}} = x^{5 \lg y - \lg x}$$

$$\lg xy = a$$

$$xy = 10^a = 10^{b+c}$$

$$xy = 10^b \cdot 10^c$$

$$\lg 10^b + \lg 10^c = b + c$$

$$y^5 \lg x \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{-\lg x}$$

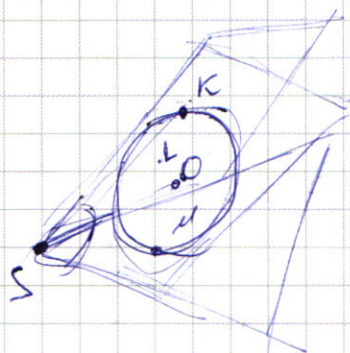
$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = (x-y)^2 - 4(y^2+x-3y) = 0$$

$$5 \lg x - 2 \lg xy =$$

$$= 5 \lg x - 2 \lg x + 2 \lg y =$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 = 3 \lg x - 2 \lg y$$

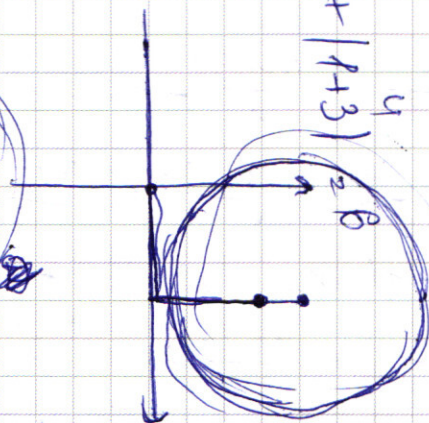
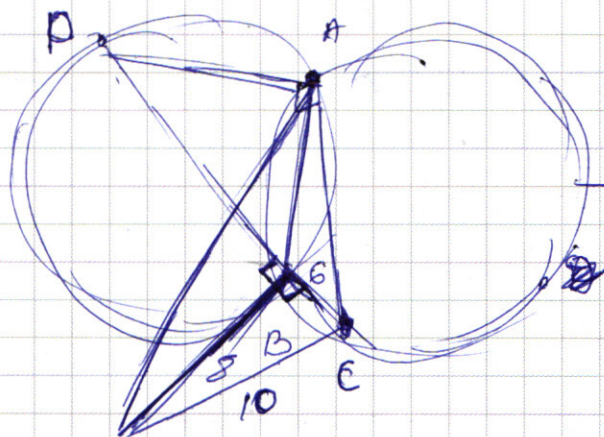


$$5) \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \end{cases}$$

$$2y-6 + 2\sqrt{(y-3)^2 - x^2} = 6$$

$$y + \sqrt{(y-3)^2 - x^2} = 6$$

$$-4y^2 + 12y - 9 = -4(y-1.5)^2 \quad (y-3)^2 - x^2 =$$



$$y-3$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|y| + |y-6| = 6$$

$$(-1; 0)$$

$$2y-6$$

$$(3; y)$$

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.1

$\frac{m}{\sin(90-\alpha)} = \frac{k}{\sin \alpha}$
 $\frac{m}{\cos \alpha} = \frac{k}{\sin \alpha}$
 $\frac{m^2}{k^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

$\frac{m}{\cos \alpha} = 2R$ $\cos \alpha = \frac{m}{2R}$
 $\left(\frac{m}{2R}\right)^2 + \left(\frac{k}{2R}\right)^2 = 1$
 $\frac{m^2}{2R^2} + \frac{k^2}{2R^2} = 1$
 $m^2 + k^2 = 2R^2$

$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$
 $m^2 = 2R^2 (1 - \sin^2 \alpha) = 2R^2 \cos^2 \alpha$
 $k^2 = 2R^2 (1 - \cos^2 \alpha) = 2R^2 \sin^2 \alpha$
 $\frac{m^2}{k^2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

$\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha$
 $\cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) =$
 $(\cos \alpha - \sin \alpha) \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = \cos 2\alpha$

$y < 6$
 $y > 0, x = 3$
 $x - y + 3 = 0$
 $3 + x = 0$
 $y - 3 - x - y + 3 - x = 6$
 $x = -3$

$x = 5 - 3$
 $y = 3$
 $-y = 3$
 $y = -3$

5 5 5 3 3 3 1 1



$$C_8^3 = C_5^3 =$$



$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$



$$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = 560 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = 560$$

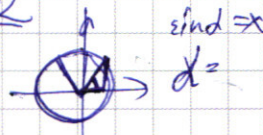
$$= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = 560$$

5 5 5 3 3 3 1 1

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$$

$$\times \frac{560}{3} + \frac{1500}{100}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = 560 \cdot 2 = 1120$$



$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} - 2 \sin \frac{11x+3x}{2} \cos \frac{11x-3x}{2} = \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 7x (\sin 4x - \cos 4x) = \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 7x)$$

$$\cos d - \cos \beta = -2 \sin \frac{d+\beta}{2} \sin \frac{d-\beta}{2}$$

$$\sin d - \sin \beta = 2 \sin \frac{d+\beta}{2} \cos \frac{d-\beta}{2}$$

$$d = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$$

$$d = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$$

$$\sin d - \sin \beta = \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$



$$\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$= \sin \left(\frac{d+\beta}{2} + \frac{d-\beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{d+\beta}{2} - \frac{d-\beta}{2} \right) = \sin \frac{d+\beta}{2} \cos \frac{d-\beta}{2} + \sin \frac{d-\beta}{2} \cos \frac{d+\beta}{2} + \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x = \cos(11x-3x) = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 7x \cos 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

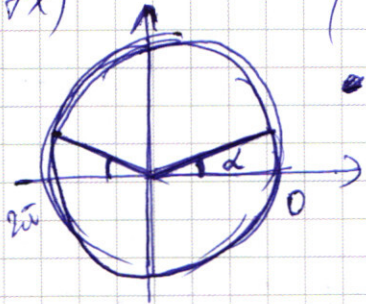
$$\sin 7x \sin 4x + \sin 7x \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 7x - \sin^2 7x =$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \left(-\frac{3\pi}{4} - 7x \right)$$

$$= (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$= (-1)^n \cdot d + \pi n$$

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - d \right) =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$d = \frac{d-\beta}{2} + \frac{d+\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{d+\beta - (d-\beta)}{2} = \frac{d+\beta - d + \beta}{2} = \beta$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} = y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x}$$

$$y^{2 \lg y - 5 \lg x} = x^{-\lg x}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-(3y(y+4))$$

$$(x-y)^2 - 4x + 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 + 4(y-1.5)^2 - 4x = 0$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} y > x+3 \\ y > 3-x \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > x+3 \\ x > 3-x \\ x < 3 \quad x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y=6 \end{cases} \quad \Rightarrow y-3 \geq x \geq 3-y$$

(3; 6)



$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x > 0 \\ x=3 \end{cases} \quad 0 < y < 6$$

$$\Rightarrow -y+3 = -y+3 = 6$$

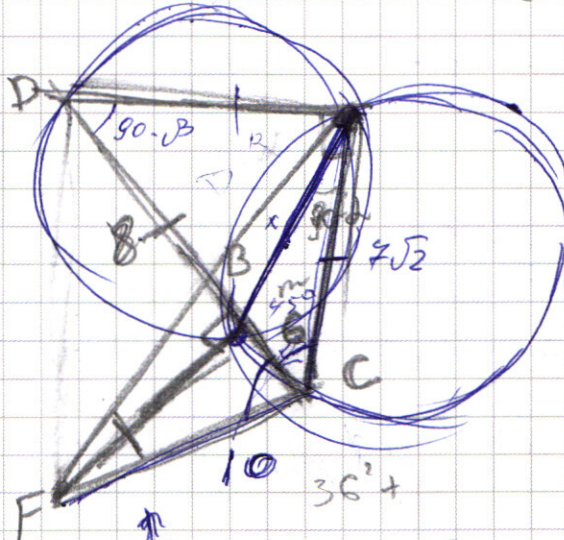


$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ x=-3 \end{cases} \quad y > 0$$

$$0 < y < 6 \quad \frac{8}{10}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ y=0 \end{cases} \quad -3 < x < 3$$

$$y=0$$



$$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(180-2\beta)$$

$$x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\beta$$

$$180-2\beta = 2\beta$$

$$\Rightarrow 180 = 4\beta$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\frac{k^2}{4R^2} + \frac{m^2}{4R^2} = 1$$

$$k^2 + m^2 = 4R^2$$

$$36 + x^2 = 100$$



$$\frac{k}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{k}{2R}$$

$$\frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$