

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

✓

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

✓

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

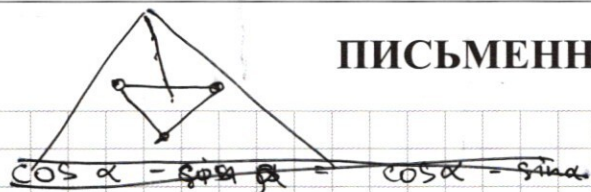
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

✓

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= \\ &= (x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = \\ &= (x-y)^2 + 4(y-x) + 8y - 4y^2 \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = \varphi, \quad \alpha - \beta = \psi \quad \alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos 14x &= \sqrt{2} \cos(11x + 3x) = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x \\ &\quad - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x \end{aligned}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \left(\frac{\sin 7x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\begin{aligned} -2 \sin 4x \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 14x \right) = \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \end{aligned}$$

$$32(142 - 75) + 2^{69} \cdot 61$$

$$|y-x| + |y+x| = 6$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|-6-x| + |-6+x| = 6$$

$$|2-x| + |-2+x| = 6$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|x-x| + |x+x| = 6$$

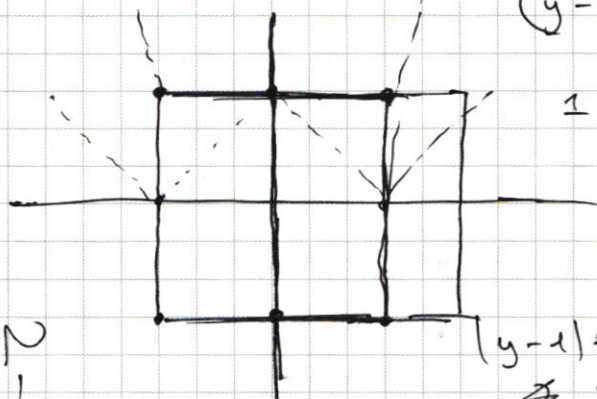
$$|3-x| + |-3+x| = 6$$

$$|x-3| + |x+3| = 6$$

$$|x| + |-x| = 6$$

$$|3-x| + |3+x| = 6$$

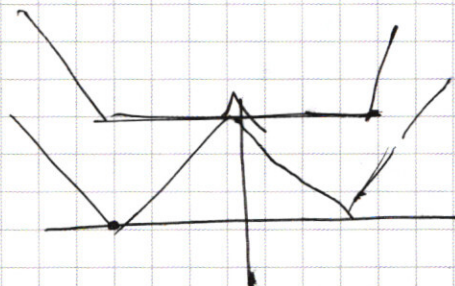
$$|y-x| + |y+x| = 6 \quad (y-3)$$



$$|y-1| + |y+1| = 6$$

$$3-1 + 3+1$$

$$|y-x| + |y+x| = 6$$



$$11111$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$N$$

$$2^{70} - 1 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0$$

$$(y-3) + |y+3| = 6$$



$$(2-59)$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

$$-59 \cdot 2^{64} + 2^{70} - 2^{65}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~(*)~~ (65) $BC = 6$. $\frac{BC}{\sin \angle CAB} = 10 \Rightarrow \sin \angle CAB = \frac{6}{10} \Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{8}{10}$

$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AC}{\sin (\angle ACB + \angle CAB)} = \frac{AC}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 10 \sin (45^\circ + \angle CAB) =$

$= 10 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \angle CAB + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \angle CAB \right) =$

$= \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6+8}{10} = \frac{14}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{AC^2}{2} = \frac{14^2}{2 \cdot 2} =$

$= \frac{7^2 \cdot 2^2}{2^2} = 49.$

Ответ: а) 10
б) 49.

~~(1) $\ln x = \ln x$ $\ln x = \ln x$ $\ln x = \ln x$~~

см. оборот!

$$\textcircled{3} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$10^{\lg y (3\lg x - 2\lg y)} = 10^{\lg^2 x}$$

$$\lg y \cdot 3\lg x - 2\lg^2 y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3\lg x \lg y + 2\lg^2 y = 0.$$

$$(\lg x - 2\lg y)(\lg x - \lg y) = 0.$$

$$(\lg x - 2\lg y)(\lg x - \lg y) = 0.$$

$$\begin{matrix} x=y & \vee & x=y^2 \\ (a) & & (b) \end{matrix}$$

$$a) \underline{x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x} = 0.$$

$$-4x^2 + 8x = 0.$$

$$4x(2 - x) = 0.$$

$$\boxed{x=2; y=2}$$

$$2^{4\lg 2} \stackrel{?}{=} 2^{4\lg 2}$$

$$b) y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0.$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y(y-3)(y^2+y-4) = 0.$$

$$y(y-3)(y^2+y-4) = 0.$$

$$\downarrow \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Ответ;

(2; 2)

(\sqrt{3}; 3)

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \frac{1}{2} AC \cdot \cancel{CF} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{BD}{FC} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{BC}{EC} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot AC \cdot CD =$$

$$= \frac{AC \cdot CD}{2\sqrt{2}} = \frac{AC^2 \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{AC^2}{2} \leftarrow \text{дан. задается константа}$$

(*) см. в конце!!!

Ответ: а) 10 б) ~~50~~

$$\textcircled{7} \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} y > 2^x + 2^{66} + 2^{65} \\ y \leq \cancel{2^{64}} \cdot x + (2^{64} - 1)x + 70 \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$(2^{64} - 1)x - 2^x > 3 \cdot 2^{65} - 70$$

$f(x)$

$$\frac{df}{dx} = 2^{64} - 1 - 2^x \ln 2 = 0$$

б min

$$(2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} - 70 > 0$$

$$(2^{64} - 1)x - 2^x - 6 \cdot 2^{64} - 70 > 0$$

$$(x - 6) \cdot 2^{64} - 2^x - 64 - 4 - 2$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} - \text{мало}$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x$$

$$(6 - x) \cdot 2^{64} \leq 70 - x - 2^x$$

верно для x от 6 до 60:

$$f(x) = (6 - x) \cdot 2^{64} - 70 + x + 2^x$$

$f(6) = 0 = f(70)$ на интервале $f(x) > 0$,
 ~~$f \uparrow$ до 6, убывает~~
 для ор. зн. $f(x) < 0$.

~~$$(6-x) \cdot 2^{64} < y \leq$$~~

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$a < y \leq b$$

$$a+1 \leq y \leq b \rightarrow b-a \text{ зн. } y$$

для каждого x подх.

$$\left| 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \right| \text{ значений } y.$$

$$\lambda(x).$$

Всего решений:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{69} \lambda(x) &= \sum_{x=0}^{69} [70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}] = \\ &= 64 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \sum_{x=0}^{69} x - \sum_{x=0}^{69} 2^x - \\ &\quad - 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 64 \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65}) + \\ &\quad + (2^{64} - 1) \frac{(69+6) \cdot 64}{2} - \sum_{x=0}^{69} 2^x - \\ &\quad - 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 64 \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1) \cdot 75 \cdot 32 - \\ &\quad - \sum_{x=0}^{69} 2^x = (2^{70} - 1 - (2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)) - \\ &\quad - 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 64 \cdot 70 - 3 \cdot 2^{71} + 2^{69} \cdot 75 - 75 \cdot 32 - \\ &\quad - 2^{70} + 64 = 64 \cdot 71 - 32 \cdot 75 + 2^{69} (75 - 12 - 2) = \\ &= 32 \cdot 67 + 61 \cdot 2^{69} \end{aligned}$$

Ответ: $2144 + 61 \cdot 2^{69}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Придадим системе геом. смысл:

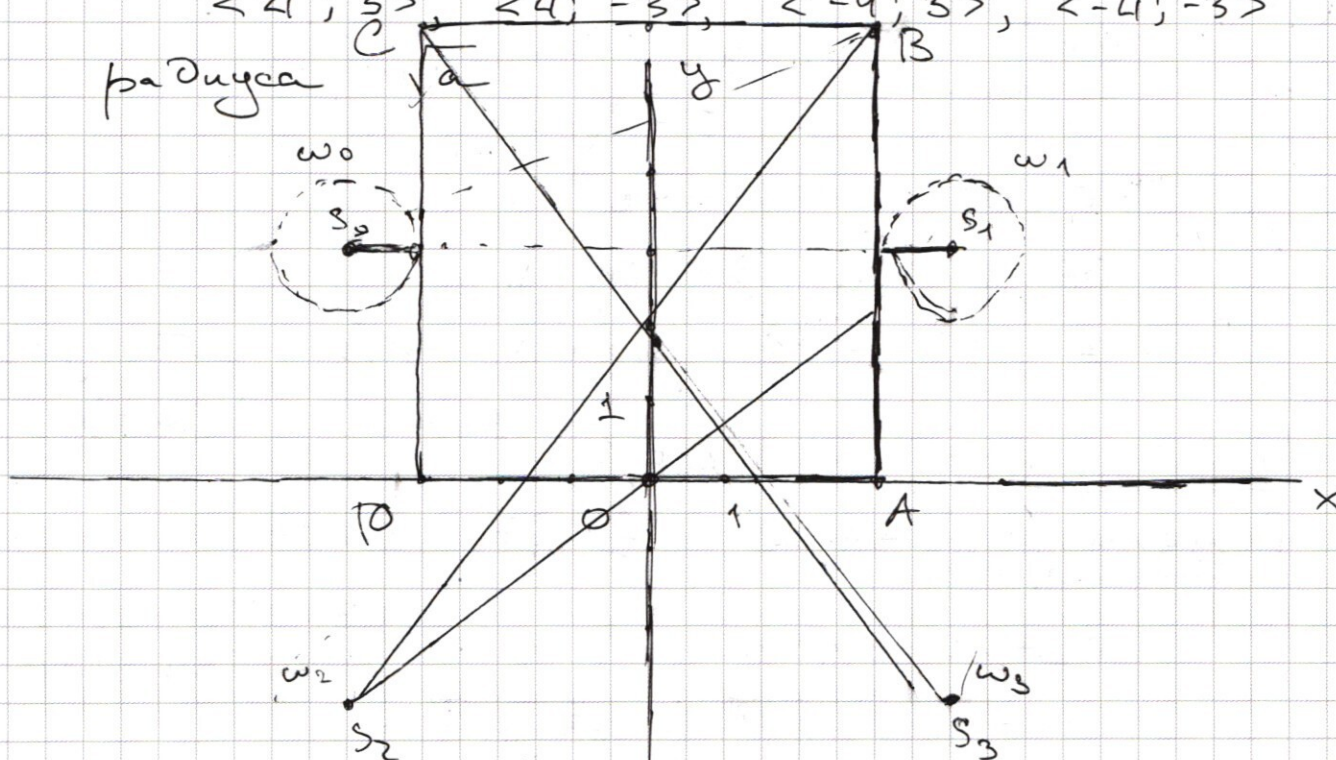
(1) задает квадрат $\square$ верш.

~~$\langle 0; 3 \rangle, \langle 0; -3 \rangle, \langle 6; 3 \rangle, \langle 6; -3 \rangle$~~

(2) задает окружности с ц.

$\langle 4; 3 \rangle, \langle 4; -3 \rangle, \langle -4; 3 \rangle, \langle -4; -3 \rangle$

радиуса



1. ω_0, ω_1 кас $\rightarrow a = 1$ ω_2 и ω_3 ,
очевидно, рш. не дают.

2. $a > \sqrt{58}$, ω_2 и ω_3 дают по решению.

~~$S_3 A = \sqrt{10}$~~

$S_3 B = \sqrt{81}$

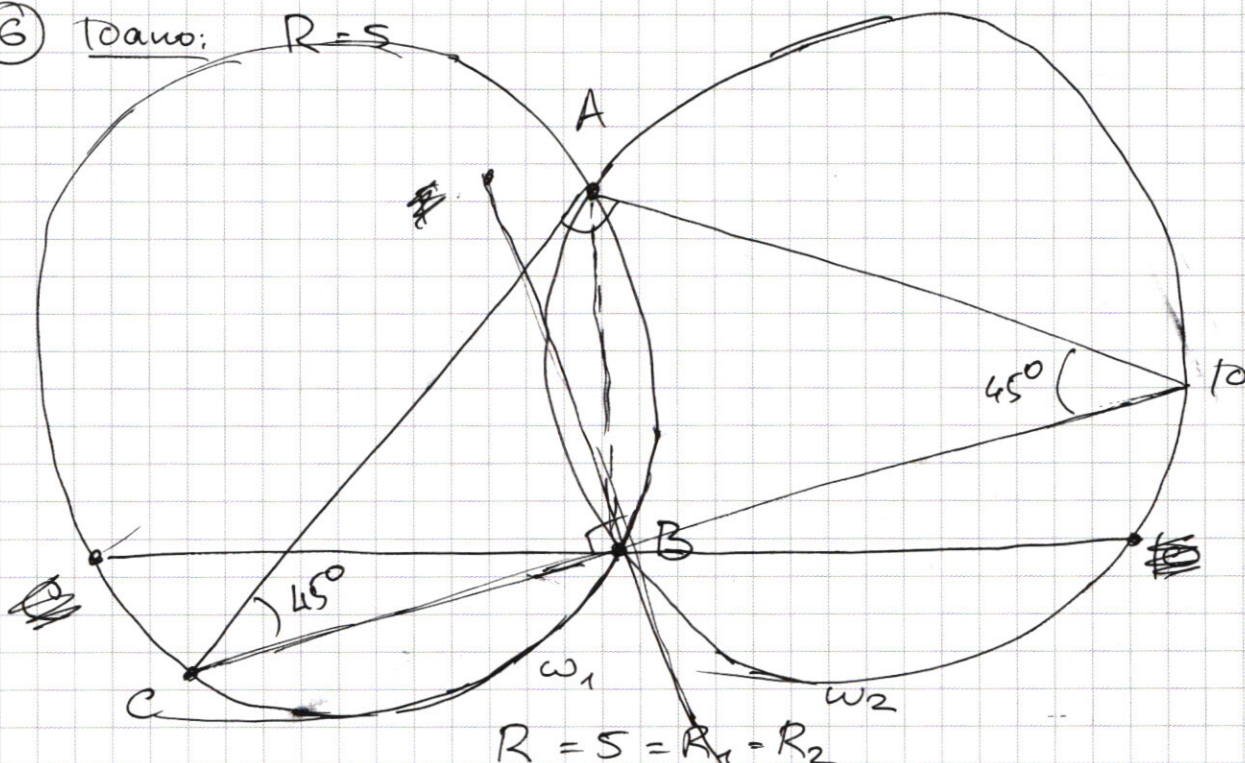
~~$S_3 D = \sqrt{58}$~~

$S_3 C = \sqrt{49+81} = \sqrt{130} \Rightarrow a = 130$

ω_3 не кас, т.е. не подх

Ответ: $1 \vee 130$

6) Дано: $R=S$



$$B \in CD, \angle CAO = 90^\circ$$

$$BF \perp CD, BF = BO$$

A, F - в разном n/n от O1 (сб)

Найти: а) CF б) $S(ACF) = ?$ $BC = G$

Решение: а) $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACO \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle AOC = \angle ACO = 45^\circ \Rightarrow \begin{aligned} CB &= 2R \sin \angle CAB \\ BO &= 2R \sin \angle BAO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CF &= \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BO^2} = \\ &= \sqrt{4R^2 (\sin^2 \angle CAB + \sin^2 \angle BAO)} = \\ &= \sqrt{4R^2} = 2R = 10. \end{aligned} \quad \angle CAB + \angle BAO = 90^\circ$$

$$\text{б) } \sin \angle FCB = \frac{CB}{FC} \quad \cos \angle FCB = \frac{BO}{FC}$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(\angle ACF) =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(45^\circ + \angle BCF) =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot CF (\sin 45^\circ \cdot \frac{BO}{FC} + \cos 45^\circ \cdot \frac{CB}{FC}) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

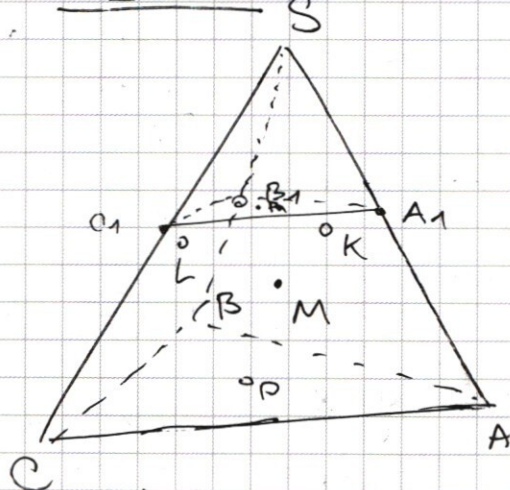
- ④ Дано: ТТ угол, верш. S (ли. углы разные)
 ω - впис. сфера, т. кас. - K, L, M .
 O - центр.

$$S_0 = 1, S_1 = 4$$

← ↑
площади сеч. ТТ угла
кас. к ω плоскостями,
 $\perp SO$

Найти: $\angle KSO$, S_{KLM} - сеч. и-во (KLM).

Решение:



пусть (ABC) - кас к
сфере и-ть, $\perp SO$
площади 4. A, B, C -
пересек. этой плоскости
с ребрами трехгранного
угла

$(A_1B_1C_1)$ - кас. к

сфере и-ть, $\perp SO$ площади 1. ...

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow SA_1B_1C_1 \sim SABCS$ с
коэф. $\frac{1}{2}$ (из площадей осн).

Пусть P_1 - т. кас с $(A_1B_1C_1)$,
 P - т. кас с (ABC) .

S, P_1, O, P - коллинеарны, $\frac{SP_1}{SP} = \frac{1}{2} \Rightarrow SP_1 = PP_1$,

O - сф. $PP_1 \Rightarrow$. Полюсом r радиус

сферы. Тогда $OK = r$, $SO = SP_1 + P_1O =$
 $= 2r + r = 3r$.

$$\angle OKS - \text{прямой} \Rightarrow \frac{OK}{OS} = \sin \angle KSO = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

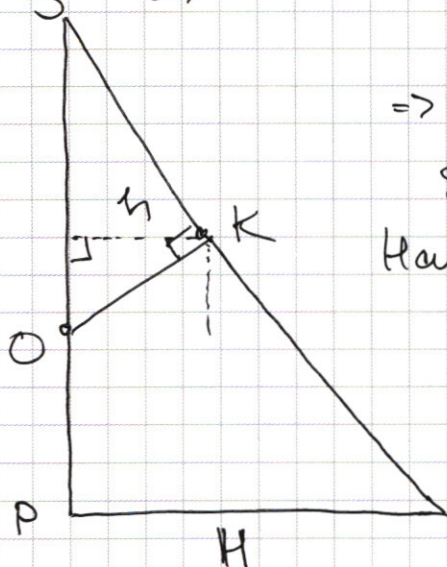
Аналогично, $\angle LSO = \angle MSO =$
 $= \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (K, L, M) \parallel (ABC)$$

$$SKLM \sim SABC \quad (1)$$

Найдем отношение
 $\frac{h}{H}$, это

будет коэф.
 подобия (1).



$$\frac{h}{SK} = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{1}{3} SK = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3} r}$$

$$SK = \sqrt{SO^2 - OK^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2} r$$

$$\frac{H}{OK} = \frac{SP}{SK} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow H = OK \sqrt{2} = r\sqrt{2}.$$

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} r}{r\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{SKLM} = S_1 \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$

Ответ: $\frac{16}{9}$

⑤ $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \text{ равно } 2 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \text{ решения} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Разложим 3375 на множители:

$$3375 = 3 \cdot 1125 = 3 \cdot 5 \cdot 225 = 3 \cdot 5^2 \cdot 45 = 3 \cdot 5^3 \cdot 3^2 = \underline{3^3 \cdot 5^3}$$

Стало быть, возможны следующие «составы» чисел:

а) 3 - «3», 3 - «5», 2 - «1»

б) 1 - «9», 1 - «3», 3 - «5», 3 - «1».

Других вариантов быть не может, т.к.

$3 \cdot 5, 5 \cdot 5 > 9$. Посчитаем кол-во чисел для

случаев (а) и (б):

а) $\binom{3}{8} \cdot \binom{3}{5} \cdot \binom{2}{2} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 1 =$

б) $\binom{1}{8} \cdot \binom{1}{7} \cdot \binom{3}{6} \cdot \binom{3}{3} = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{(3!)^2} \cdot 1 = \frac{56 \cdot 720}{36} = 1120$

Складываем (а) и (б): $560 + 1120 = 1680$.

Ответ: 1680

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2} - 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 (\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x \right) = \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 7x \right) = \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x \\
 & (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \\
 & \quad - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x \\
 & \cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x = \\
 & \quad = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 14x \right) \\
 & -2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \\
 & \left[-2 \sin 4x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right] \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right] \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \\
 & \left[\sin 4x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0. \\
 & \begin{cases} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ 0 = 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{27} n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} n \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$.

3) ~~$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$~~

~~$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$~~

~~$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$~~

~~$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$~~

~~$y^5 \lg x = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$~~

~~$y^3 \lg x = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$~~

~~$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$~~

③ $\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg(xy) \quad (1) \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$
 $f(x, y)$

Можно показать, что мин $f(x, y) = 0$.

Для этого вычислим ∇f и приравняем его нулю; функция достаточно гладкая, $\Rightarrow$ там, где $\nabla f = 0$ будет экстр.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y + 12$

Найдем экстр.:

$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - 4 = 0 \\ -2x_0 - 6y_0 + 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 - y_0 - 2 = 0 \\ -x_0 - 3y_0 + 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = y_0 + 2 \\ -y_0 - 2 - 3y_0 + 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = y_0 + 2 \\ -4y_0 + 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

$f(x_0, y_0) = f(3, 1) =$

$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 12 = 9 - 6 - 12 - 3 + 12 = 0$

То виду $f(x, y)$ ясно, что это мин, для строгости можно выч. $\nabla^2 f$ и убедиться, что $\Delta > 0$ это действ. мин.

Проверим, что найд. экстр. подх. к (1)

$\left(\frac{15}{3}\right) \lg 3 \stackrel{?}{=} 1 \cdot 2 \lg 3$

Но это неправда $\Rightarrow \emptyset$.

Ответ: $\emptyset$.