

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рѣ
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Разложим число 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$.
 Чтобы произведение цифр было равно 3375,
 Тогда, восьмизначное число должно состоять из
 трёх пятёрок, трёх троек и двух единиц. Количество
 чисел будет равно $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$ (т.к. числа должны быть
 разными, мы учитываем повторения)
 $= \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 10 = 560$.

Ответ: 560 чисел.

№ 2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= 0 \\ \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= 0 \\ (\sin 7x + \cos 7x) (\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x) &= 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad | : \sqrt{2} \\ 2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) \quad | : 2 \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin (7x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin (7x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x \end{array} \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array} \right], n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array} \right], n \in \mathbb{Z}$

$$n^{\lg 3} \int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Из (1) получаем, что $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} *$

$$(2): x^2 - 2xy - 3y^2 - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

Подставим в (1) $x = 3y$: $\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg(3y^2)}$

П.к. обе части уравнения больше нуля, логарифмируем его по основанию 10:

$$\lg \left(\left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} \right) = \lg \left(y^{2 \lg(3y^2)} \right)$$

$$\lg 3y \cdot \lg \frac{y^4}{3} = 2 \lg(3y^2) \cdot \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y) / (4 \lg y - \lg 3) = 2 \lg y (\lg 3 + 2 \lg y)$$

$$4 \lg 3 \lg y + 4 \lg^2 y - \lg^2 3 - \lg 3 \cdot \lg y = 2 \lg 3 \cdot \lg y + 4 \lg^2 y$$

$$\lg 3 \cdot \lg y - \lg^2 3 = 0$$

$$\lg y = \lg 3 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = 3y = 9$$

Подставим в (1): $x = 4 - y$: $\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg((4-y)y)}$

П.к. $x > 0 \Rightarrow 4 - y > 0$ (из *)
 $0 < y < 4$

Аналогично, т.к. обе части

уравнение больше нуля, логарифмируем его по основанию 10:

$$\lg \left(\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} \right) = \lg \left(y^{2 \lg((4-y)y)} \right)$$

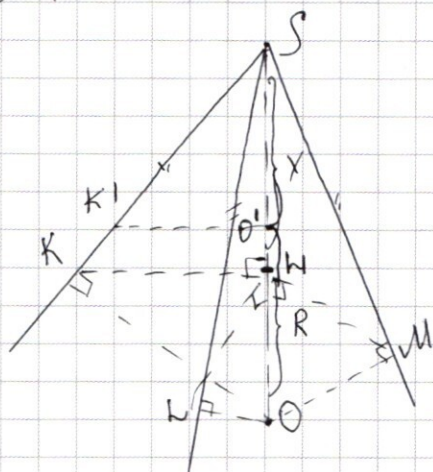
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \lg(4-y) \lg \frac{y^5}{4-y} &= 2 \lg(4-y)y \cdot \lg y \\ (\lg 4 - \lg y)(5 \lg y - (\lg 4 - y)) \lg(4-y) &= 2 \lg y (\lg(4-y) + \lg y) \\ 5 \lg y \lg(4-y) - \lg^2(4-y) &= 2 \lg y \lg(4-y) + 2 \lg^2 y \\ 3 \lg^2 y - 3 \lg y \lg(4-y) + \lg^2(4-y) &= 0 \\ (2 \lg y - \lg(4-y))(\lg y - \lg(4-y)) &= 0 \\ \begin{cases} \lg y^2 = \lg(4-y) \\ \lg y = \lg(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4-y \\ y = 4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}, \text{ т.к. } 0 < y < 4 \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ т.к. } -1 - \sqrt{17} < 0, \\ x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad -1 + \sqrt{17} \sqrt{8} > 0 \\ \sqrt{17} < 9 \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4. \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 2), (9; 3),$
 $(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}).$

№ 4



П.к. отрезки касательных, проведен. из
одной точки равны $\Rightarrow SK = SL = SM$

Тогда $\triangle SDK = \triangle SDL = \triangle SLM$ (по
катету и гипотенузе)

Оба сечения перпендикулярны $SO \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ они параллельны $\Rightarrow$ они образуют
усеченную пирамиду, у которой
высота равна $2R$, т.к. сфера
касается обеих оснований.

Запишем объем этой усеченной
пирамиды двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R (\sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_1 + S_2) = \frac{2}{3} R (1 + 16 + \sqrt{4}) = \frac{2}{3} R \cdot 19 = \frac{38R}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}(2R+x) \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot x \cdot 1 = \frac{1}{3}(8R+3x). \text{ Из двух уравне-}$$

ний получаем: $(8R+3x) = 38R$

$$3x = 30R \Rightarrow x = 10R.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle KSD = \frac{KD}{SD} = \frac{R}{x+R} = \frac{R}{11R} = \frac{1}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSD = \arcsin \frac{1}{11}.$$

$$\text{П.к. } \triangle KSD = \triangle LSD = \triangle MSD \Rightarrow \angle KSD = \angle LSD = \angle MSD.$$

Проведем из точек K, L и M перпендикуляры на SD.

П.к. $\angle KSD = \angle LSD = \angle MSD \Rightarrow$ получаем равные прямоугол-
 $\triangle$ -ники $\Rightarrow$ все перпендикуляры пересекутся в одной точке H, лежа-
 щей в плоскости (KLM)

Тогда $(KLM) \perp SD$, т.к. $KH \perp SD \Rightarrow$ по признаку $(KLM) \perp SD \Rightarrow$
 $LH \perp SD$.

$\Rightarrow (KLM) \parallel d$, где d - сечение, перпенд. SD и касанию.

сферы площадью S . Сечение плоскостью d - это $\triangle$ -ник,
 который подобен $\triangle KLM$. $\Rightarrow \frac{S_d}{S_{KLM}} = K^2$.

$$K = \frac{K'D'}{KH} \text{ (где } K'D' \parallel KH, \text{ т. } D' \text{ точка касания } d \text{ и сферы)}$$

$$K'D' = \tan \angle KSD \cdot x = \frac{\sin \angle KSD}{\cos \angle KSD} \cdot 10R = \frac{\frac{1}{11} \cdot 10R}{\frac{\sqrt{11^2-1}}{11}} = \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot 10R =$$

$$= \frac{5R}{\sqrt{30}}$$

$$KH = \frac{\sin \angle KSD}{\frac{1}{11}} \cdot SK = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{(x+R)^2 - R^2} = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{120R^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{30}R}{11} \Rightarrow K = \frac{K'D'}{KH} = \frac{\frac{5R}{\sqrt{30}}}{\frac{2\sqrt{30}R}{11}} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 30} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{S_d}{S_{KLM}} = \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{144} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{144}{121} S_d = \frac{144}{121}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSD = \arcsin \frac{1}{11}; S_{KLM} = \frac{144}{121}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) При $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y-3-x + y-3+x &= 6 \\ 2y-6 &= 6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

При $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y-3-x - y+3-x &= 6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

При $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

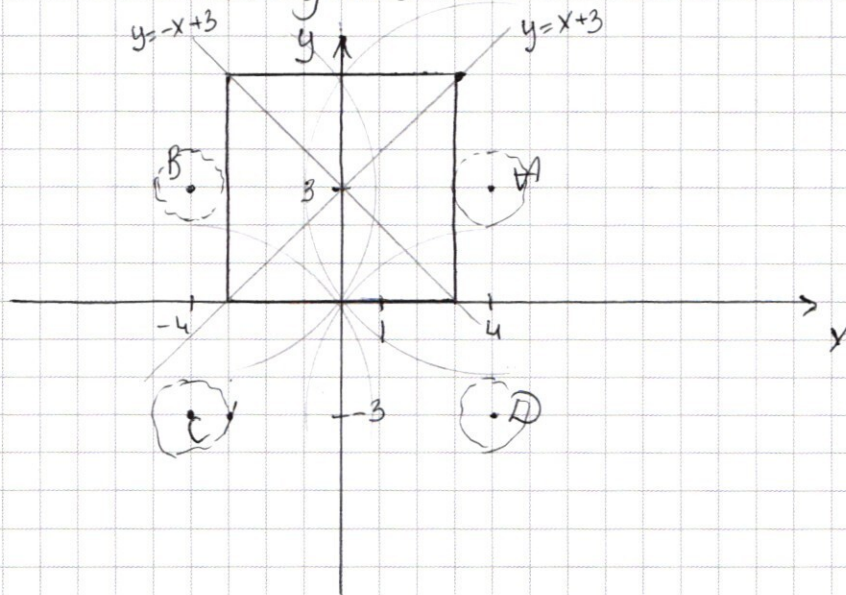
$$\begin{aligned} -y+3+x + y-3+x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

При $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} -y+3+x - y+3-x &= 6 \\ -2y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Нарисуем множество точек, удов.

этим условиям:



Получает квадрат со стороной 6.

(2): В зависимости от a мы будем получать дуги

окружностей с центрами в точках A, B, C, D. в соответв. четвертях.

При $a=1$, окр-ти с центрами в т. А и В касаются квадрата, а с центрами в т. С и D обеих точек в квадрате иметь не будут. $\Rightarrow a=1$ - подходит.

Дальше по мере увеличения a окр-ти с центр. в т. А и В будут пересекать квадрат в двух точках $\Rightarrow$ мы однозначно будем получать больше двух решений. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Нам подойдёт a , при котором окр-ти пересекут квадрат в одинаковых точках $\Rightarrow$ этими точками должна быть $(0;0)$ и $(0;6)$. Т.к. окружности с центрами в т. А и В симметричны относительно центра квадрата и т. А равно удалена от прямых $y=6$ и $y=0 \Rightarrow$ нам достаточно чтобы хотя бы одна окр-ть прошла через точку $(0;0)$, тогда она пройдет и через точку $(0;6)$ и вторая окр-ть тоже.

$$\text{т.е. } (0-4)^2 + (0-3)^2 = a$$

$4^2 + 3^2 = a \Rightarrow a = 25$. Окр-ти с центрами в т. С и D также ^{пересекут} квадрат в т. $(0;0) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ мы получаем два решения и $a = 25$ подходит.

При $a > 25$ ни одна из окр-тей в своей четверти уже не будет пересекать квадрат.

Ответ: $a=1$; $a=25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos(11x + 3x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x)$$

$$\cos 11x = \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 3x = \sin 11x = \sqrt{2} \sin 11x \cdot \sin 3x - \sin 3x$$

$$\begin{cases} \cos 11x \sim \sin 11x \\ \cos 3x \sim \sin 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(11x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 3x = \frac{\pi}{4} + \pi l \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{44} + \frac{\pi n}{11} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \quad | \cdot 4 \cdot 11 \cdot 2$$

$$2\pi + 8\pi n = 11\pi + 44\pi k$$

$$36\pi n = 9\pi \quad 44\pi k + 8\pi n = -9\pi$$

$$44k - 8n = -9$$

$$8n = 44k + 9$$

$$n = \frac{44k + 9}{8}$$

$$\begin{cases} a \approx 25 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(-4)^2 + (9-3)^2 = a \\ &16 + 9 = a \\ &a = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x-4)^2 + (y-3)^2 \\ &(x+4)^2 + (y-3)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y = x + 3 \\ &y = 3 - x = -x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y - 3 - x \geq 0 \\ &y - 3 + x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y \geq x + 3 \\ &y \geq -x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2y - 6 = 6 \\ &y = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y \geq x + 3 \\ &y < -x + 3 \end{aligned}$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$\begin{aligned} &-2x = 6 \\ &x = -3 \end{aligned}$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$\begin{aligned} &-2y + 6 = 6 \\ &-2y = 0 \\ &y = 0 \end{aligned}$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$\begin{aligned} &D_1 \quad a \in [1; 5] \\ &D_2 \quad a \in [1; 5] \\ &D_3 \quad a \in [1; 5] \\ &D_4 \quad a \in [1; 5] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{nr}}{11} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \text{nr} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{nr}}{11} \cdot 5$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (1 + 5^2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{83R}{11} (4 + 5^2 + 2\sqrt{5}) = 38 \cdot 11$$

$$115^2 + 19\sqrt{5} = 180 \times \frac{38}{23}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 10 \\ \hline 410 \\ 100 \\ \hline 510 \end{array}$$

$$\int \sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 0$$

~~$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) =$~~
 $\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 4x$

$\sin 4t$
 $2R = \frac{1}{11} = 360$
 $11t + 180$
 $\frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (1 - \sin^2 4t) + \frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (4 - 5 + 2\sqrt{5})$
 $\frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (1 - \sin^2 4t) + \frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (4 - 5 + 2\sqrt{5})$
 $\frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (1 - \sin^2 4t) + \frac{1}{3} \cdot \frac{10R}{11} (4 - 5 + 2\sqrt{5})$



$\frac{10}{\pi} \left(\frac{1}{2} S + V \right)$

$10 \cdot 105^2 = 10B^2 + 48 \cdot 105^2 \cdot 2\pi B_2 \cdot 10$

$252 \cdot 105^2$

$6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$6 \cdot 2 \cdot 2$

$252 \cdot 105^2$

$6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$11 - 38 - 10$

$$\begin{array}{r} 418 - 410 \\ - 418 - 582 \\ - 418 - 400 + 100 + 380 \\ S = \frac{265}{10} \end{array}$$

$$S_2$$

$11t^4 + 17t - 190 = 0$
 $11.3^4 + 17.3 - 190$
 $u + 225$

$16 \cdot 11 + 2 \cdot 17 = 190$
 $176 + 94 = 270$
 $270 \cdot 2 = 540$
 $540 \cdot 2 = 1080$
 $1080 \cdot 2 = 2160$
 $2160 \cdot 2 = 4320$
 $4320 \cdot 2 = 8640$
 $8640 \cdot 2 = 17280$
 $17280 \cdot 2 = 34560$
 $34560 \cdot 2 = 69120$
 $69120 \cdot 2 = 138240$
 $138240 \cdot 2 = 276480$
 $276480 \cdot 2 = 552960$
 $552960 \cdot 2 = 1105920$
 $1105920 \cdot 2 = 2211840$
 $2211840 \cdot 2 = 4423680$
 $4423680 \cdot 2 = 8847360$
 $8847360 \cdot 2 = 17694720$
 $17694720 \cdot 2 = 35389440$
 $35389440 \cdot 2 = 70778880$
 $70778880 \cdot 2 = 141557760$
 $141557760 \cdot 2 = 283115520$
 $283115520 \cdot 2 = 566231040$
 $566231040 \cdot 2 = 1132462080$
 $1132462080 \cdot 2 = 2264924160$
 $2264924160 \cdot 2 = 4529848320$
 $4529848320 \cdot 2 = 9059696640$
 $9059696640 \cdot 2 = 18119393280$
 $18119393280 \cdot 2 = 36238786560$
 $36238786560 \cdot 2 = 72477573120$
 $72477573120 \cdot 2 = 144955146240$
 $144955146240 \cdot 2 = 289910292480$
 $289910292480 \cdot 2 = 579820584960$
 $579820584960 \cdot 2 = 1159641169920$
 $1159641169920 \cdot 2 = 2319282339840$
 $2319282339840 \cdot 2 = 4638564679680$
 $4638564679680 \cdot 2 = 9277129359360$
 $9277129359360 \cdot 2 = 18554258718720$
 $18554258718720 \cdot 2 = 37108517437440$
 $37108517437440 \cdot 2 = 74217034874880$
 $74217034874880 \cdot 2 = 148434069749760$
 $148434069749760 \cdot 2 = 296868139499520$
 $296868139499520 \cdot 2 = 593736278999040$
 $593736278999040 \cdot 2 = 1187472557998080$
 $1187472557998080 \cdot 2 = 2374945115996160$
 $2374945115996160 \cdot 2 = 4749890231992320$
 $4749890231992320 \cdot 2 = 9499780463984640$
 $9499780463984640 \cdot 2 = 18999560927969280$
 $18999560927969280 \cdot 2 = 37999121855938560$
 $37999121855938560 \cdot 2 = 75998243711877120$
 $75998243711877120 \cdot 2 = 151996487423754240$
 $151996487423754240 \cdot 2 = 303992974847508480$
 $303992974847508480 \cdot 2 = 607985949695016960$
 $607985949695016960 \cdot 2 = 1215971899390033920$
 $1215971899390033920 \cdot 2 = 2431943798780067840$
 $2431943798780067840 \cdot 2 = 4863887597560135680$
 $4863887597560135680 \cdot 2 = 9727775195120271360$
 $9727775195120271360 \cdot 2 = 19455550390240542720$
 $19455550390240542720 \cdot 2 = 38911100780481085440$
 $38911100780481085440 \cdot 2 = 77822201560962170880$
 $77822201560962170880 \cdot 2 = 155644403121924341760$
 $155644403121924341760 \cdot 2 = 311288806243848683520$
 $311288806243848683520 \cdot 2 = 622577612487697367040$
 $622577612487697367040 \cdot 2 = 1245155224975394734080$
 $1245155224975394734080 \cdot 2 = 2490310449950789468160$
 $2490310449950789468160 \cdot 2 = 4980620899901578936320$
 $4980620899901578936320 \cdot 2 = 9961241799803157872640$
 $9961241799803157872640 \cdot 2 = 19922483599606315745280$
 $19922483599606315745280 \cdot 2 = 39844967199212631490560$
 $39844967199212631490560 \cdot 2 = 79689934398425262981120$
 $79689934398425262981120 \cdot 2 = 159379868796850525962240$
 $159379868796850525962240 \cdot 2 = 318759737593701051924480$
 $318759737593701051924480 \cdot 2 = 637519475187402103848960$
 $637519475187402103848960 \cdot 2 = 1275038950374804207697920$
 $1275038950374804207697920 \cdot 2 = 2550077900749608415395840$
 $2550077900749608415395840 \cdot 2 = 5100155801499216830791680$
 $5100155801499216830791680 \cdot 2 = 10200311602998433661583360$
 $10200311602998433661583360 \cdot 2 = 20400623205996867323166720$
 $20400623205996867323166720 \cdot 2 = 40801246411993734646333440$
 $40801246411993734646333440 \cdot 2 = 81602492823987469292666880$
 $81602492823987469292666880 \cdot 2 = 163204985647974938585333760$
 $163204985647974938585333760 \cdot 2 = 326409971295949877170667520$
 $326409971295949877170667520 \cdot 2 = 652819942591899754341335040$
 $652819942591899754341335040 \cdot 2 = 1305639885183799508682670080$
 $1305639885183799508682670080 \cdot 2 = 2611279770367599017365340160$
 $2611279770367599017365340160 \cdot 2 = 5222559540735198034730680320$
 $5222559540735198034730680320 \cdot 2 = 10445119081470396069461360640$
 $10445119081470396069461360640 \cdot 2 = 20890238162940792138922721280$
 20890238162940792138

$$V \sim \frac{1}{3} \cdot 2R \cdot (x + 16 + 14)$$

$$V = \frac{1}{3} (2R(x + 14) + 16R) \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot x \cdot 1$$

$$V = \frac{1}{3} (2Rx + 28R + 16R) \cdot 4 - \frac{1}{3} x$$

$$19 \cdot 2R = (2R + x) \cdot 4 - x \sim$$

$$19 \cdot 2R \sim 8R + 4x - x$$

$$3R \sim 19 \cdot 2R - 8R$$

$$3R \sim 38R - 8R$$

$$3R \sim 30R$$

[illegible]

$\frac{100}{11}$

$$S = \frac{2V_{30}}{11} = \frac{10R}{2V_{20}}$$

$$2^x + 3^x \leq 70 + (2^6 - 1) \quad \text{for } x \leq 6$$

$\frac{CB a}{\sin 64^\circ} = R$

$$2^x + 6(2^{64} - 1) - 6 \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\begin{array}{r} 70 + (1^6 - 1) \times \checkmark 0 \\ (2^6 - 1) \times \checkmark - 70 \\ \quad \quad \quad \checkmark \checkmark - 40 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \checkmark \checkmark - 10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \checkmark \checkmark - 1 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6^6 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 = 5 \cdot 3 \\ \cdot 125 \\ \cdot 27 \\ \hline 875 \\ + 250 \\ \hline 1125 \\ \cdot 11 \\ \hline 121 \\ 11 \\ \hline 116 \\ 11 \\ \hline 117 \end{array}$$

три тройки
три пятёрки
две единицы

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{456 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{25 \cdot 4 \cdot 8}{1} = 10 \cdot 56 = 560$$

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \left(\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4} - 11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin (-4x) = \cos 14x$$

$$2 \left(\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sin (-4x) = \cos 14x$$

$$-(\sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x) \sin 4x = \cos 14x$$

$$\cos 14x + \sin 4x (\sqrt{2} \sin 7x + \cos 7x \sqrt{2}) = 0$$

$$2 \cos 7x = 1$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= x \\ \alpha + \beta &= y \end{aligned}$$

$$\frac{x+y}{2} = \alpha \quad \frac{y-x}{2} = \beta$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin(-4x) - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\sqrt{2} \cos 14x + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2 \sin 4x \cdot \sin 7x + 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = 0$$

$$\cos 7x (\sqrt{2} \cos 7x + 2 \sin 4x) + 2 \sin 4x \cos 7x = 0$$

$$-\sqrt{2} \cos 14x + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &= \alpha & \frac{y-x}{2} &= \beta \\ \frac{x+y}{2} &= \alpha & \frac{y-x}{2} &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№3.} \quad & \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad x > 0, y > 0 \quad \left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \\ & x^2 - 2xy - 4y - 3y^2 + 12y = 0 \\ & (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0 \\ & (x-3y)(x+y-4) = 0 \\ & \begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases} \quad \begin{matrix} 4-y \geq 0 \\ 0 < y < 4 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg 4-y} = y^{2 \lg y(4-y)} \\ & \left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \\ & \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \\ & y^{4 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg 3y^2} \\ & \lg(4-y)(\lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg y + \lg(4-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5 \lg(4-y) \lg y - \lg^2(4-y) = 2 \lg^2 y + 2 \lg y \lg(4-y) \\ & 2 \lg^2 y - 3 \lg y \lg(4-y) + \lg^2(4-y) = 0 \\ & (2 \lg y - \lg(4-y))(\lg y - \lg(4-y)) = 0 \\ & \begin{cases} 2 \lg y = \lg(4-y) \\ \lg y = \lg(4-y) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y^2 = 4-y \\ y = 4-y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y - 4 = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \\ & \begin{cases} y^2 - 1 + \sqrt{17} \\ y^2 - 1 + \sqrt{17} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№5} \quad & |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ & (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{aligned}$$

$$3 \cdot 2^{65} < y < -$$

$$\begin{cases} y > 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$3 \cdot 2^{65} < y < 70 + (2^{64} - 1)x$$

