МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в р[
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64}-1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Разложим число 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$.
Тогда, чтобы произведение цифр было равно 3375, восьмизначное число должно состоять из трёх пятёрок, трёх троек и двух единиц. Количество чисел будет равно $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$ (т.к. числа должны быть различны, мы учитываем повторения) $=$

$= \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3!\cdot 2\cdot 2\cdot 3} = 10\cdot 7\cdot 8 = 56\cdot 10 = 560.$

Ответ: 560 чисел.

№ 2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \;\; |:\sqrt{2} \\ 2\sin 4x = \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x) \;\; |:2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 & (2) \end{cases}$$

Из (1) получаем, что $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ *

(2): $x^2-2xy-3y^2-4(x-3y)=0$

$(x-3y)(x+y)-4(x-3y)=0$

$(x-3y)(x+y-4)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=4-y \end{array}\right.$

Подставим в (1) $x=3y$: $\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg(3y^2)}$

Т.к. обе части уравнения больше нуля, прологарифмируем его по основанию 10:

$\lg\left(\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y}\right) = \lg\left(y^{2\lg(3y^2)}\right)$

$\lg 3y \cdot \lg\frac{y^4}{3} = 2\lg(3y^2)\cdot\lg y$

$(\lg 3+\lg y)(4\lg y-\lg 3) = 2\lg y(\lg 3+2\lg y)$

$4\lg 3\lg y+\cancel{4\lg^2 y}-\lg^2 3-\lg 3\cdot\lg y = 2\lg 3\cdot\lg y+\cancel{4\lg^2 y}$

$\lg 3\cdot\lg y-\lg^2 3=0$

$\lg y=\lg 3 \Leftrightarrow y=3 \Rightarrow x=3y=9$

Подставим в (1): $x=4-y$: $\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)y)}$

Т.к. $x>0 \Rightarrow 4-y>0$ (Из *)
$0<y<4$
. Аналогично, т.к. обе части уравнение больше нуля, прологарифмируем его по основанию 10:

$\lg\left(\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)}\right) = \lg\left(y^{2\lg((4-y)y)}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg(4-y)\lg\frac{y^5}{4-y} = 2\lg((4-y)y)\cdot\lg y$

$\cancel{(\lg 4-\lg y)}(5\lg y-(\lg(4-y))\lg(4-y) = 2\lg y(\lg(4-y)+\lg y)$

$5\lg y\lg(4-y)-\lg^2(4-y) = 2\lg y\lg(4-y)+2\lg^2 y$

$2\lg^2 y-3\lg y\lg(4-y)+\lg^2(4-y)=0$

$(2\lg y-\lg(4-y))(\lg y-\lg(4-y))=0$

$\left[\begin{array}{l}\lg y^2=\lg(4-y)\\ \lg y=\lg(4-y)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y^2=4-y\\ y=4-y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y^2+y-4=0\\ 2y=4\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\\ y=2\Rightarrow x=2\end{array}\right.$, т. к. $0<y<4 \Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, т.к. $-1-\sqrt{17}<0$,

$x=4-\frac{\sqrt{17}-1}{2}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

а $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}>0$

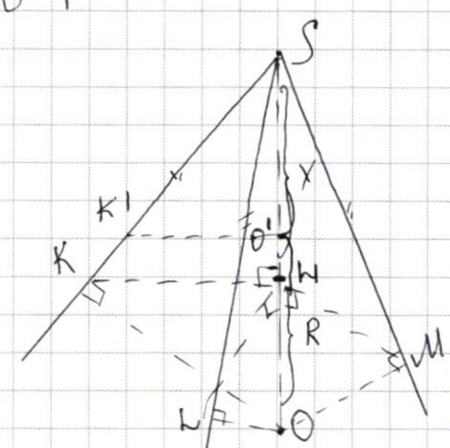
и $-1+\sqrt{17} \vee 8$

$\sqrt{17}\vee 9$

$\sqrt{17}<9 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{17}}{2}<4.$

Ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

№4



Т.к. отрезки касательных, провед. из одной точки равны $\Rightarrow SK=SL=SM$

Тогда $\Delta SOK=\Delta SOL=\Delta SOM$ (по катету и гипотенузе)

Оба сечения перпендикулярны $SO \Rightarrow$ они параллельны $\Rightarrow$ они образуют усечённую пирамиду, у которой высота равна $2R$, т.к. сфера касается обоих оснований.

Запишем объём этой усечённой пирамиды двумя способами:

$V=\frac{1}{3}\cdot 2R(\sqrt{S_1\cdot S_2}+S_1^2+S_2^2)=\frac{2}{3}R(1+16+\sqrt{4})=\frac{2}{3}R\cdot 19=\frac{38}{3}R$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$V = \frac{1}{3}(2R+x)\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot x\cdot 1 = \frac{1}{3}(8R+3x)$. Из двух уравне-

ний получаем: $(8R+3x) = 38R$

$3x = 30R \Rightarrow x = 10R$.

Тогда $\sin\angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{x+R} = \frac{R}{11R} = \frac{1}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{1}{11}$.

Т.к. $\triangle KSO = \triangle LSO = \triangle MSO \Rightarrow \angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$.

Проведём из точек K, L и M перпендикуляры на SO.

Т.к. $\left.\begin{matrix}\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO \\ KS = LS = MS\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ получаем равные прямоуг. $\triangle$-ники $\Rightarrow$ все перпендикуляры пересекутся в одной точке H, лежащей в пл-ти (KLM)

Тогда $(KLM) \perp SO$, т.к. $\begin{matrix}KH \perp SO \\ LH \perp SO.\end{matrix} \Rightarrow$ по признаку $(KLM) \perp SO \Rightarrow$

$\Rightarrow (KLM) \parallel \alpha$, где α - сечение, перпенд. SO и касающ. сферы площадью 1. Сечение плоскостью α - это $\triangle$-ник, который подобен $\triangle KLM$. $\Rightarrow \frac{S_\alpha}{S_{KLM}} = K^2$.

$K = \frac{K'O'}{K\cancel{O}H}$ (где $K'O' \parallel K\cancel{O}H$, т. O' точка касания α и сферы)

$K'O' = tg\angle KSO\cdot x = \frac{\sin\angle KSO}{\cos\angle KSO}\cdot 10R = \frac{\frac{1}{11}\cdot 10R}{\frac{\sqrt{11^2-1}}{11}} = \frac{1}{\sqrt{120}}\cdot 10R =$

$= \frac{5R}{\sqrt{30}}$

$HK\cancel{O} = \cancel{\frac{\sin\angle KSO}{8}}\cdot SK = \frac{1}{11}\cdot\sqrt{(x+R)^2 - R^2} = \frac{1}{11}\cdot\sqrt{120R^2} =$

$= \frac{2\sqrt{30}R}{11} \Rightarrow K = \frac{K'O'}{KH} = \frac{\frac{5}{\sqrt{30}}R}{\frac{2\sqrt{30}R}{11}} = \frac{\cancel{5}\cdot 11}{2\cdot \cancel{30}_6} = \frac{11}{12}$

$\frac{S_\alpha}{S_{KLM}} = \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{144} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{144}{121}S_\alpha = \frac{144}{121}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{11}$; $S_{KLM} = \frac{144}{121}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 & (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a & (2) \end{cases}$$

(1) При $\begin{cases} y-3-x\geq 0 \\ y-3+x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y\geq -x+3 \end{cases}$ $y-3-x+y-3+x=6$

$2y-6=6$

$y=6$

При $\begin{cases} y-3-x\geq 0 \\ y-3+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y<-x+3 \end{cases}$ $y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$

При $\begin{cases} y-3-x<0 \\ y-3+x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x+3 \\ y\geq -x+3 \end{cases}$ $-y+3+x+y-3+x=6$

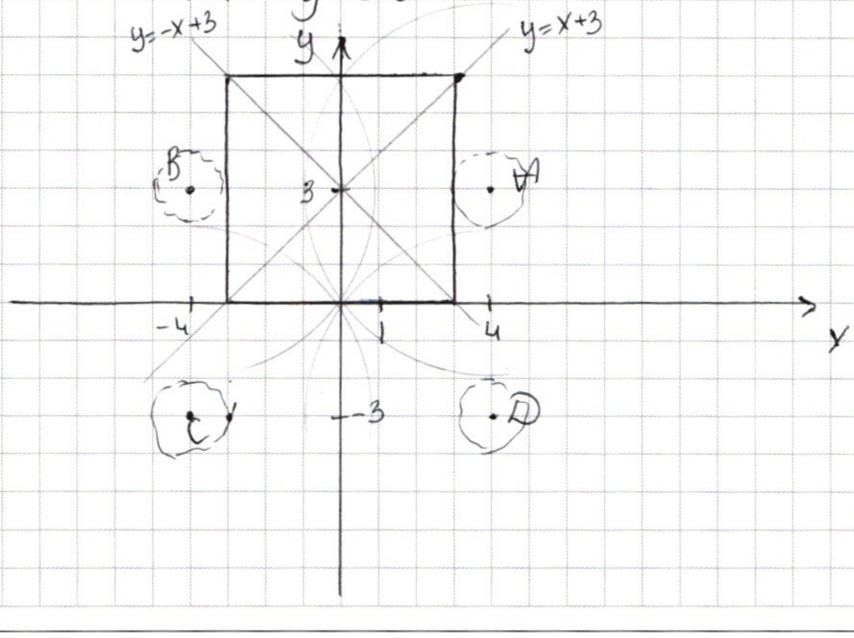
$x=3$

При $\begin{cases} y-3-x<0 \\ y-3+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x+3 \\ y<-x+3 \end{cases}$ $-y+3+x-y+3-x=6$

$-2y=0$

$y=0$

Нарисуем множество точек, удов. этим условиям:



Получаем квадрат со стороной 6.

(2): В зависимости от a мы будем получать дуги окружностей с центрами в точках A, B, C, D в соответств. четвертях.

При $a=1$, окр-ти с центрами в т. A и B коснутся квадрата, а с центрами в т. C и D общих точек с квадратом иметь не будут. $\Rightarrow$ $a=1$ - подходит.

Дальше по мере увеличения a окр-ти с центр. в т. A и B будут пересекать квадрат в двух точках $\Rightarrow$ мы однозначно будем получать больше двух решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Нам подойдёт a, при котором окр-ти пересекут квадрат в одинаковых точках. $\Rightarrow$ этими точками должны быть $(0;0)$ и $(0;6)$. т.к. окружности с центрами в т. A и B симметричны относительно центра квадрата и т. A равно удалена от прямых $y=6$ и $y=0$ $\Rightarrow$ нам достаточно чтобы хотя бы одна окр-ть прошла через точку $(0;0)$, тогда она пройдёт и через точку $(0;6)$ и вторая окр-ть тоже.

т.е. $(0-4)^2+(0-3)^2=a$

$4^2+3^2=a \Rightarrow a=25$. Окр-ти с центрами в т. C и D также ~~пересеук~~ пересекут квадрат в т. $(0;0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы получаем два решение и $a=25$ подходит.

При $a>25$ ни одна из окр-тей в своей четверти уже не будет пересекать квадрат.

Ответ: $a=1$; $a=25$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos(11x+3x)$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x)$

$\cos 11x - \sqrt{2}\cos 11x \cdot \cos 3x - \cos 3x = \sin 11x - \sqrt{2}\sin 11x \cdot \sin 3x - \sin 3x$

$\begin{cases} \cos 11x = \sin 11x \\ \cos 3x = \sin 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(11x+\frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi n \\ 3x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi n \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = \frac{\pi}{4}+\pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4}+\pi k \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi n}{11}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$\frac{\pi}{44} + \frac{\pi n}{11} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \quad | \cdot 4 \cdot 11 \cdot 2$

$2\pi + 8\pi n = 11\pi + 44\pi k$

$\cancel{36\pi n = 9\pi}$ $\cancel{36n = 9}$ $\cancel{n =}$

$44\pi k + 8\pi n = -9\pi$

$44k - 8n = -9$

$8n = 44k + 9$

$n = \frac{44k+9}{8}$

$\boxed{a = 25 \quad a = 1}$

$(-4)^2 + (y-3)^2 = a$

$16 + 9 = a$

$a = 25$

$(x-4)^2 + (y-3)^2$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 0$

$y = x+3$

$y = 3 - x = -x+3$

$y-3-x \geq 0$

$y-3+x \geq 0$

$y \geq x+3$

$y \geq -x+3$

$2y - 6 = 6$

$y = 6$

$y \geq x+3$

$y < -x+3$

$y-3-x-y+3-x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

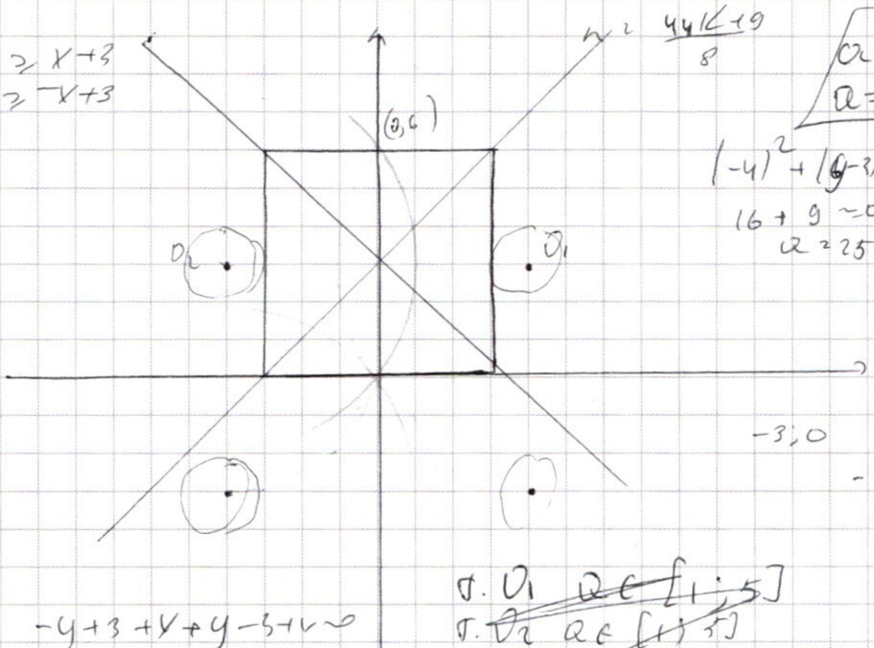
$-y+3+x-y+3-x = 0$

$6 = 6$

$-2y+6 = 6$

$-2y = 0$

$y = 0$



$-3;0$

$-y+3+x+y-3+x = 0$

$x = 3$

~~т. O_1 $a \in [1;5]$~~

т. O_2 $a \in [1;5]$

~~т. O_3 $a \in [\sqrt{10};5]$~~

O_4 $a \in [\sqrt{10};5]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{2}\cos 14x + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) + \ldots$$

$$\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}\cos 7x - \sqrt{2}\sin 7x + 2\sin 4x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) = -2\sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)} = \end{array}\right.$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 7x + \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x + \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{11}R(1 + S^2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{11}R(4 + S^2 + 2\sqrt{5}) = 38\cdot 11$$

$$22S^2 + 34\sqrt{5} = 38\cdot 11 - 10 - 48 = 360$$

$$11S^2 + 17\sqrt{5} = 180$$

$$11t^4 + 17t = 180$$

$$22S^2 + 34\sqrt{5} = 38\cdot 11 - 48 - 10$$

№ 4

$$22S^2 + 34\sqrt{5} = 380$$

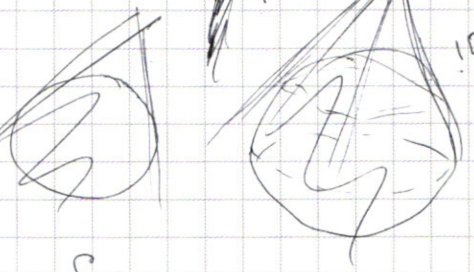
$$11S^2 + 17\sqrt{5} = 190$$

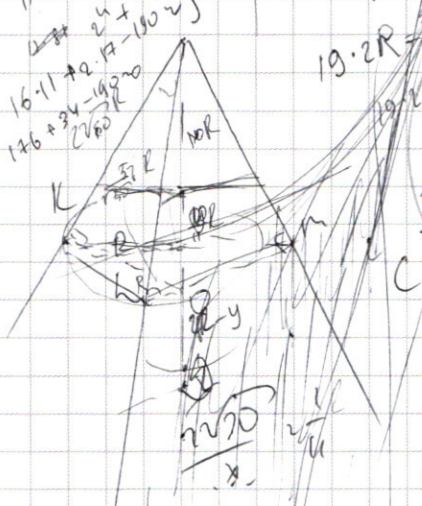
$$S = \frac{abc}{4R}$$

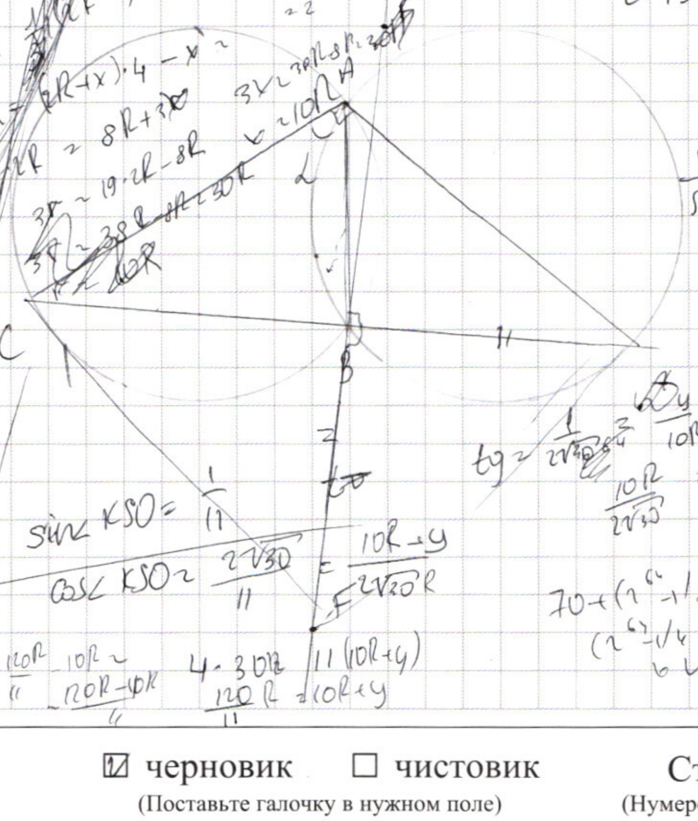
$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$

$$11t^4 + 17t - 190 = 0$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2x \ldots (R + x)\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot x\cdot 1$$







$$\sin\angle KSO = \frac{1}{11}$$

$$\cos\angle KSO = \frac{2\sqrt{30}}{11} = \frac{10R + y}{2\sqrt{20}R}$$

$$\frac{CB}{\sin\alpha} = 2R$$

$$2^x + 3\cdot 8^{25} \le 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 6\cdot 2^{64} \le 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 6(2^{64} - 1) - 6 \le 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 6(2^{64} - 1) \le 76 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x - 76 \le (2^{64} - 1)(x - 6)$$

$$70 + (2^{64} - 1)x < 0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

3375 | 5
675 | 5
135 | 5
27

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$

$125 \cdot 27 = 875 + 250 = 3375$

121, 141, 411, 1111, 112, 112

три тройки
три пятерки
две единицы

$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{4\,5\,6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 2} = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 8 = 10\cdot 56 = 560$

$\frac{5!}{2\cdot 2\cdot 1} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

№2.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta -$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta +$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}(\cos(11x+\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}(\cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos(11x+\frac{\pi}{4}) - \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$\alpha+\beta = x$
$\alpha+\beta = y$

$2\sin\frac{11x+\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{3x+\frac{\pi}{4}-11x-\frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x$

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2\sin(7x+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(-4x) = \cos 14x$

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2(\sin 7x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 7x\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\sin(-4x) = \cos 14x$

$-(\sqrt{2}\sin 7x + \sqrt{2}\cos 7x)\sin 4x = \cos 14x$

$11-3=8$

$\alpha-\beta = x$
$\alpha+\beta = y$

~~$\cos 14x + \sin 4x(\sqrt{2}\sin 7x + \cos 7x\sqrt{2}) = 0$~~

$\frac{x+y}{2} = \alpha$ $\quad \frac{y-x}{2} = \beta$

$2\cos^2 7x - 1$

$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}$

~~cos~~ $2\sin 7x\cdot\sin(-4x) - 2\sin 4x\cdot\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\alpha$
$\sin(\alpha-\beta)$

$\sqrt{2}\cos 14x + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2\sin 4x\cdot\sin 7x + 2\sin 4x\cdot\cos 7x = 0$

$\alpha+\beta = x$
$\alpha-\beta = y$

~~$\cos 7x(\sqrt{2}\cos 7x + 2\sin 4x)$~~

$\frac{x+y}{2} = \alpha$ $\quad \frac{x-y}{2} = \beta$

$\sqrt{2}\cos 14x + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta +$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta -$

$\frac{x+y}{2} = \alpha$ $\quad \alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$ $\quad \frac{x-y}{2} = \beta$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cdot\cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3.
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$x > 0$
$y > 0$

$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$

$(x-3y)(x+y-4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4-y \end{array}\right. \qquad 4-y>0, \quad 0<y<4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg y(4-y)}$$

$\lg(4-y)(5\lg y - \lg(4-y)) = 2(\lg y + \lg(4-y))\lg y$

$5\lg(4-y)\lg y - \lg^2(4-y) =$

$= 2\lg^2 y + 2\lg y \lg(4-y)$

$2\lg^2 y - 3\lg y \lg(4-y) + \lg^2(4-y) = 0$

$(2\lg y - \lg(4-y))(\lg y - \lg(4-y))$

$$\left[\begin{array}{l} 2\lg y = \lg(4-y) \\ \lg y = \lg(4-y) \end{array}\right.$$

$D = 1 + 4\cdot 4 = 17$
$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

1) $\left[\begin{array}{l} y^2 = 4-y \\ y = 4-y \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} y^2 + y - 4 = 0 \\ 2y = 4 \end{array}\right.$ (2)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 - \\ x = 2 \end{array}\right.$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$\lg 3y \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = 2\lg 3y^2 \cdot \lg y$

$(\lg 3 + \lg y)(4\lg y - \lg 3) = 2\lg y(\lg 3 + 2\lg y)$

$4\lg 3\cdot\lg y + 4\lg^2 y - \lg^2 3 - \lg 3\cdot\lg y$

$= 2\lg 3\cdot\lg y + 4\lg^2 y$

$\lg 3\cdot\lg y - \lg^2 3 = 0$

$\lg y = \lg 3$

$y = 3 \Rightarrow x = 9$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$y^{4\cdot\lg 3y} = 3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg 3y^2}$$

$\lg y^{4\lg 3y} = \lg(3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg 3y^2})$

$4\lg 3y \lg y = \lg 3\cdot\lg 3y + \lg y\cdot 2\lg 3y^2$

$4(\lg 3 + \lg y)\cdot\lg y = \lg 3(\lg 3 + \lg y) + 2\lg y(\lg 3 + 2\lg y)$

$4\lg 3\lg y + 4\lg^2 y = \lg^2 3 + \lg 3\lg y + 2\lg 3\lg y + 4\lg^2 y$

$3\lg^2 y - \lg 3\lg y + \lg^2 3 = 0$

$(3\lg y - \lg 3)(\lg y - \lg 3)$

$D = \lg^2 3 - 4\cdot 3\cdot\lg^2 3$

№5
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < 4$

$-1+\sqrt{17} < 8$

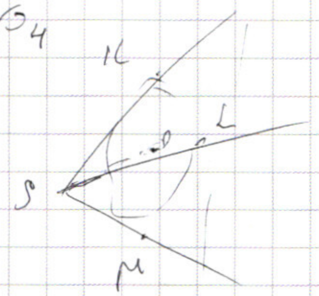
$\sqrt{17} < 9$

$3\cdot 2^{65} < y \leq -$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$

№4



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)