

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

3y
y^2 - 3y = 0
y(y - 3) = 0
y = 3y
y(1 - 3) = 0
y = 0 - 2 = 0

2y = y
y = 2



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

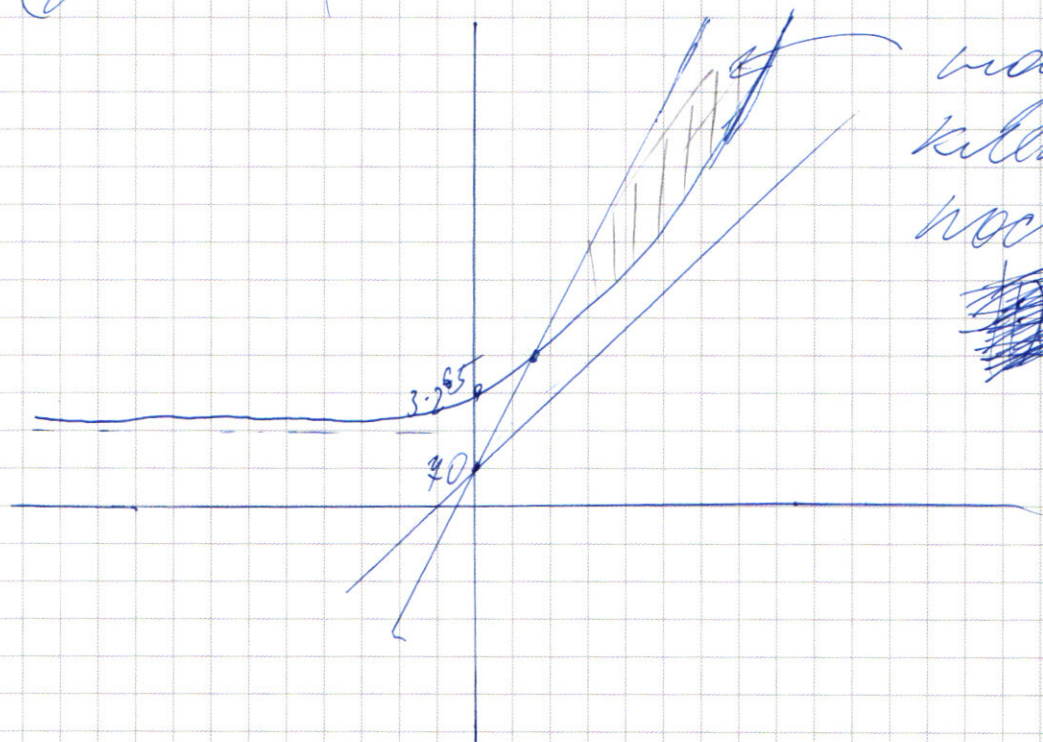
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\{ (x; y) \in \mathbb{Z} ? \}$$



надо
ключи
посчитать
~~считать~~

$$y = y$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

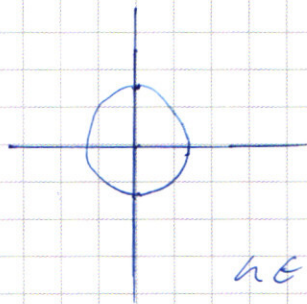
$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 74x \\ -2 \cdot \sin 4x \cdot \sin 7x + \sin 3x - \sin 11x &= \sqrt{2} \cos 74x \\ + 2 \sin 4x \cdot \sin 7x + 2 \sin(4x) \cdot \cos 7x &= \sqrt{2} \cos 74x \\ 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= -\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) &= 0 \\ (\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) &= 0 \\ \sin 7x = -\cos 7x \quad \text{или} \quad 2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x &= 0 \end{aligned}$$

4/ Проверка по формуле №1

$$\begin{aligned} \cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x &= \sqrt{2} \cos 74x \\ \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) &= 17 \\ \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) \right) + \sqrt{2} \left(\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= 17 \\ \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \sqrt{2} \cos 74x \\ \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) \right) &= \sqrt{2} \cos 74x \\ 2 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) &= \cos 74x \\ 2 \cos(4x) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) &= \cos 74x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x \right) &= 0 \quad \text{или} \quad \sin 4x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = 6 \\ \sqrt{2} \left(\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \right) &= 0 \quad \sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$



$n \in \mathbb{Z}$

$$4x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{2} + \pi n,$$

$$4x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$2 \cos \frac{4x - \frac{\pi}{4} + 4x}{2} \sin \frac{4x + \frac{\pi}{4} - 4x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \text{ или } \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$\frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$-3x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$-3x = 2\pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$$

Итого: $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

, $n \in \mathbb{Z}$

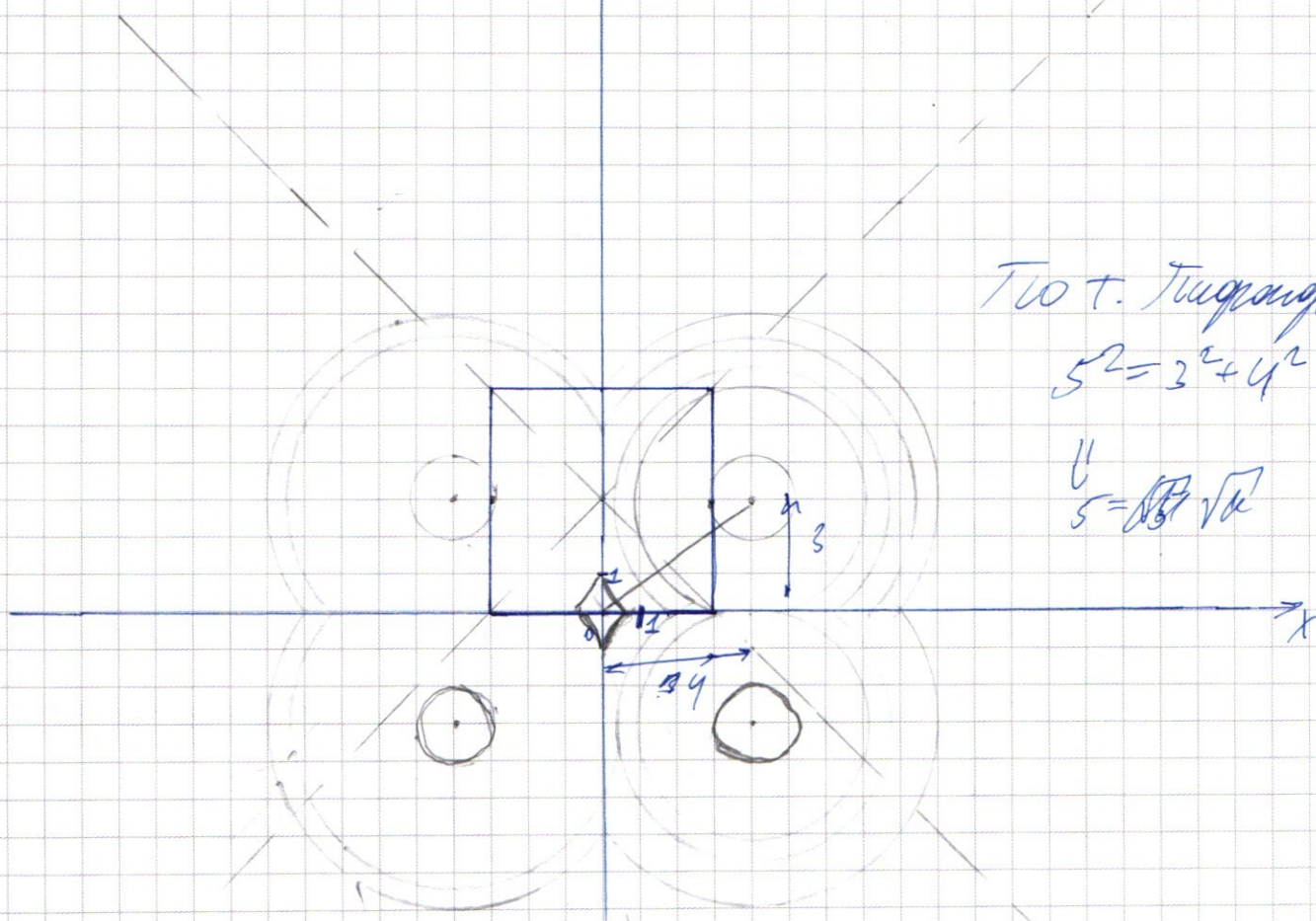
$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

График:

y

$a \geq 0$



Т.е. Т. Пирамиды

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\parallel 5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

2 решения:

$$1) \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$2) 5 \leq \sqrt{a} \leq 5 \Rightarrow a = 25$$

Ответ:

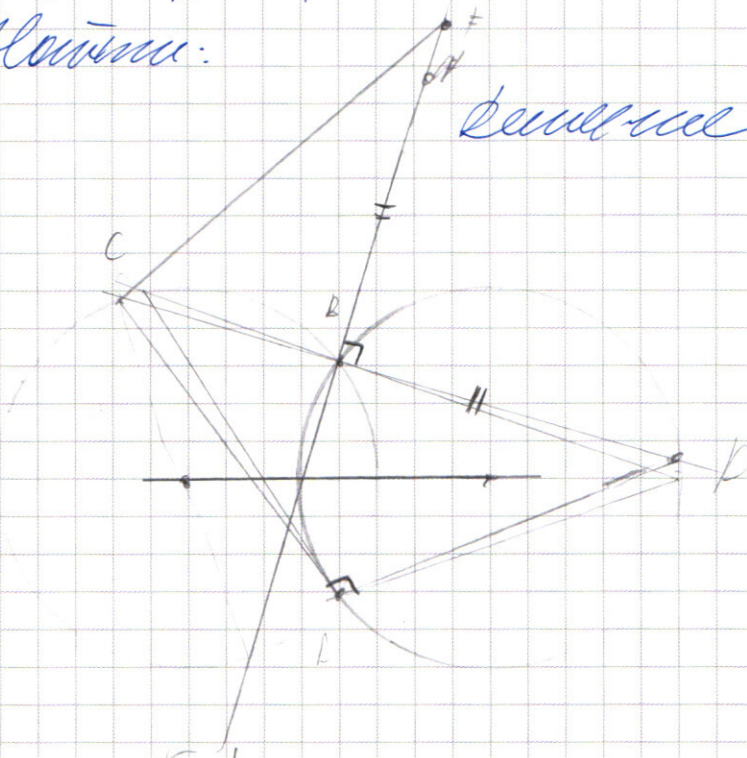
$$a \in \{1\} \cup \{25\}$$

№ 6.

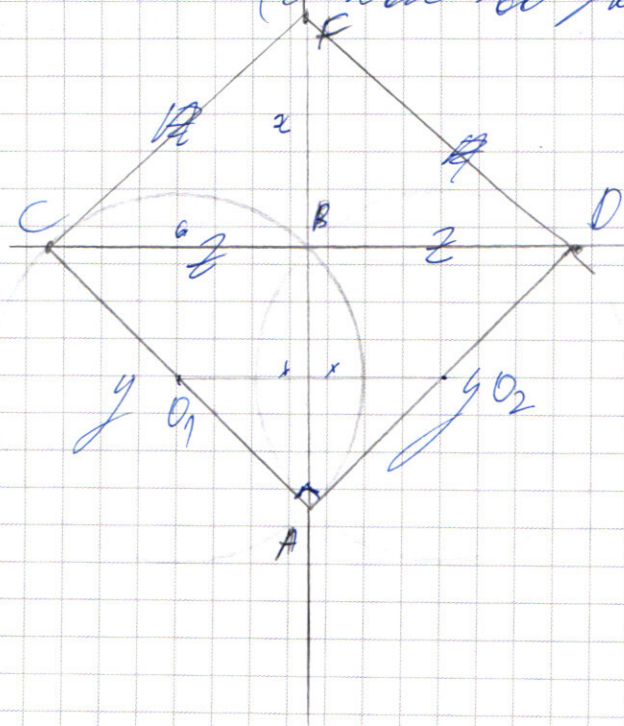
Дано: $R=5$; $z=6$

Найти:

Синусис:



из синусиса
и по Т.О. Сг.
(имеем противоречие)
(а как в 60 рис.)



1) По Т. Тагдасора:

$$2y^2 = 4z^2$$

$$(y = 2R)$$

$$2 \cdot 4R^2 = 4z^2$$

$$z = \sqrt{2} R$$

2) $O_1 O_2 = z$

$$O_1 O_2 = 2R - 2x = z$$

(из подобия)
(из подобия)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = y^2 \lg x + 2 \lg y$$

$$\frac{(y \lg x)^5}{x \lg x} = (y \lg x)^2 \cdot (y \lg y)^2$$

$$\frac{(y \lg x)^5}{x \lg x} - (y \lg x)^2 \cdot (y \lg y)^2 = 0$$

$$(y \lg x)^2 \cdot \left(\frac{(y \lg x)^3}{x \lg x} - (y \lg y)^2 \right) = 0$$

$$(y \lg x)^2 = 0$$

$$y \lg x = 0$$

$$y \lg x > 0$$

$\emptyset$

$$\frac{(y \lg x)^3}{x \lg x} = (y \lg y)^2$$

$$y^3 \lg x = y^2 \lg y \cdot x \lg x$$

$$\lg y^3 \lg x = \lg y^2 \lg y + \lg x \lg x$$

$$3 \lg x \cdot \lg y = \lg y \cdot 2 \lg y + \lg x^2$$

$$3 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - \lg x \cdot \lg y - 2 \lg x \lg y + \lg^2 y = 0$$

$$\lg x (\lg x - \lg y) - 2 \lg y (\lg y + \lg x) = 0$$

ОДЗ:

$$\frac{y^5}{x} > 0$$

$$y > 0$$

$$xy > 0$$

$$x > 0$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2 \lg y) = 0$$

$$\lg x = \lg y \quad \text{или} \quad \lg x = 2 \lg y$$

$$x = y \quad \text{или} \quad x = y^2$$

$$(2) \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 3y^2 = 4x - 12y$$

$$(x - y)^2 - 4y^2 = 4(x - 3y)$$

$$(x - y - 2y)(x - y + 2y) = 4(x - 3y)$$

$$(x - 3y)(x + y) = 4(x - 3y)$$

$$(x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$x = 3y \quad \text{или} \quad x + y = 4$$

вернемся в систему:

$$\begin{cases} x = y \\ x \neq y^2 \\ x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 3y \\ x + y = 4 \\ x = y^2 \\ x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = y \\ x + y = 4 \\ x = y \\ x = 3y \\ x = y^2 \\ x + y = 4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 - \text{не удовн. ОДЗ.} \\ x = 2 \\ y = 2 \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \\ y^2 + y = 4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

ок. продолжение на стр. №3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ y=0 \\ x=0 \\ y=3 \\ x=9 \\ y^2+y-4=0 \\ x=y^2 \end{array} \right. \text{ — не удовл. усл.}$$

$$*// \Delta = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ x=3 \\ y=9 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x=y^2 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 \end{array} \right. \text{ — не удовл. усл.}$$

$$*// \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ x=3 \\ y=9 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = 9-\sqrt{17} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 2), (3; 9), (9-\sqrt{17}; \frac{\sqrt{17}-1}{2})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 4 \quad (2) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 2 \text{ реш. ?}$$

1) Если: $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x \geq 0$:

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y-6=6$$

$$2y=12$$

$$y=6$$

2) Если: $y-3-x \leq 0$ и $y-3+x \leq 0$:

$$\cancel{y-3-x} + \cancel{y-3+x} = 6$$

$$-y+3-x - y+3-x = 6$$

$$-2y+6=6$$

$$2y=0$$

$$y=0$$

3) Если $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x \leq 0$:

$$\cancel{y-3-x} - \cancel{y-3+x} = 6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

4) Если $y-3-x \leq 0$ и $y-3+x \geq 0$:

$$\cancel{-y+3+x} + \cancel{y-3+x} = 6$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

(2) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ - почти окр-ть
 (либо 4 окр-ти, (ак. гр-ки)
 либо ~~1~~ (двойка)
 См. продолжение на стр 15.

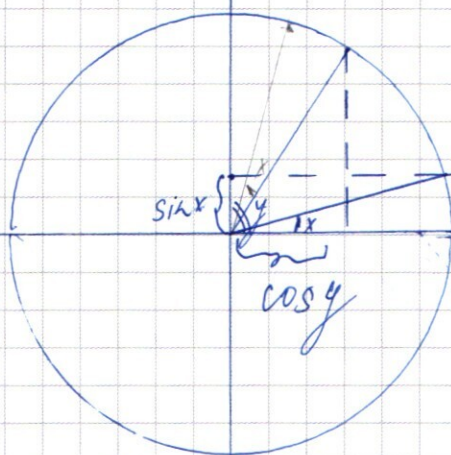
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$= 2 \cos \frac{30^\circ}{2} \cdot \cos 15^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 15^\circ = \sqrt{3} \cos 15^\circ$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ \\ y = 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\cos 15^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$$

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1$$

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 15^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}}$$

$$\sin x + \cos y = \sqrt{2} \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 15^\circ = \sqrt{2} \sin 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ}$$

$$\sin^2 30^\circ = 4 \sin^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)$$

$$1 = 16 \sin^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)$$

$$\sin^2 15^\circ \quad 16 \sin^4 15^\circ - 16 \sin^2 15^\circ + 1 = 0$$

$$t = 16t^2 - 16t + 1$$

$$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = +2 \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 90^\circ =$$

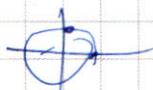
$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \frac{2}{4} = -1$$

$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ =$$

$$= 0$$

$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ =$$

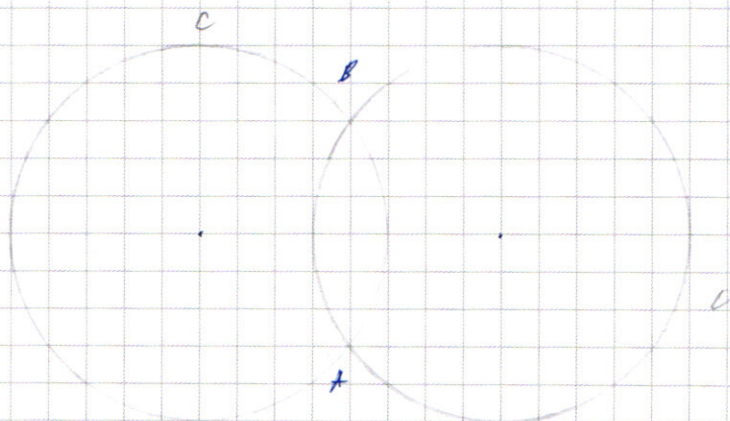
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$



$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = -2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \cos 45^\circ \cos 45^\circ$$

$$\sin 0^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin^0 x + \sin^{90} y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\sin 0 + \sin 90 = 2 \cos 45 \sin 45 = 1$$

$$\boxed{\sin x + \cos y} = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\sin 0 + \cos 90 = +2 \cdot \sin 45$$

$$u \quad B + 5 = 7$$

$$304 + 3 = 25$$

$$\sin x \cdot \sin y$$

$$4 + 5 = 9 + 23 + K \cdot 2 = 28$$

$$73 + 84 = 0$$

$$2 \cdot 4 + 71$$

$$= 0$$

$$= 1$$

$$72 + 304$$

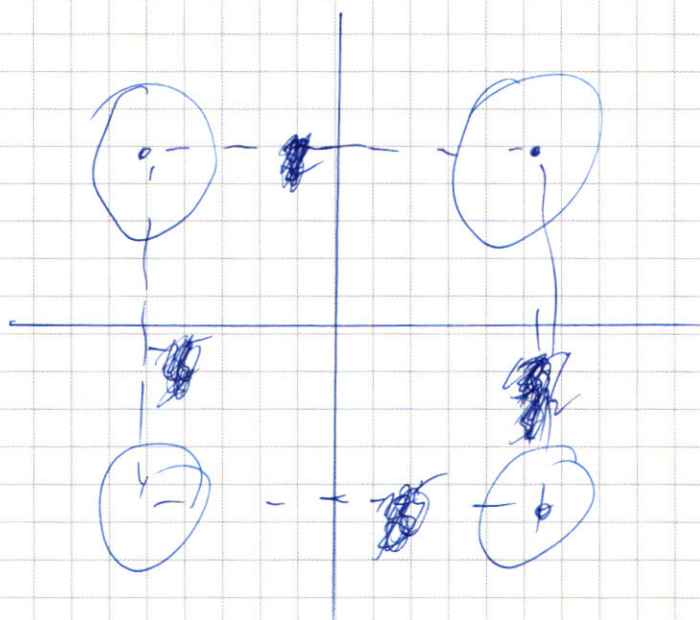
$$\sin x - \sin y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2}$$

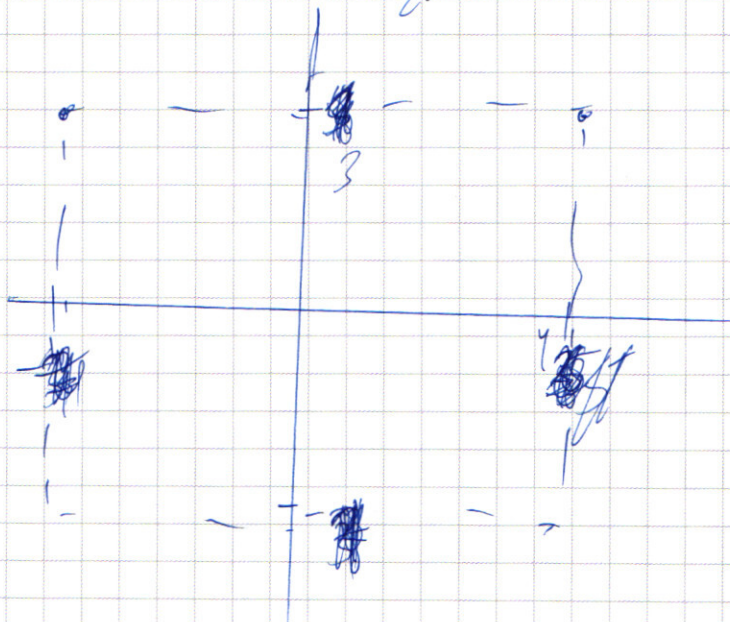
$$= +2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}}$$

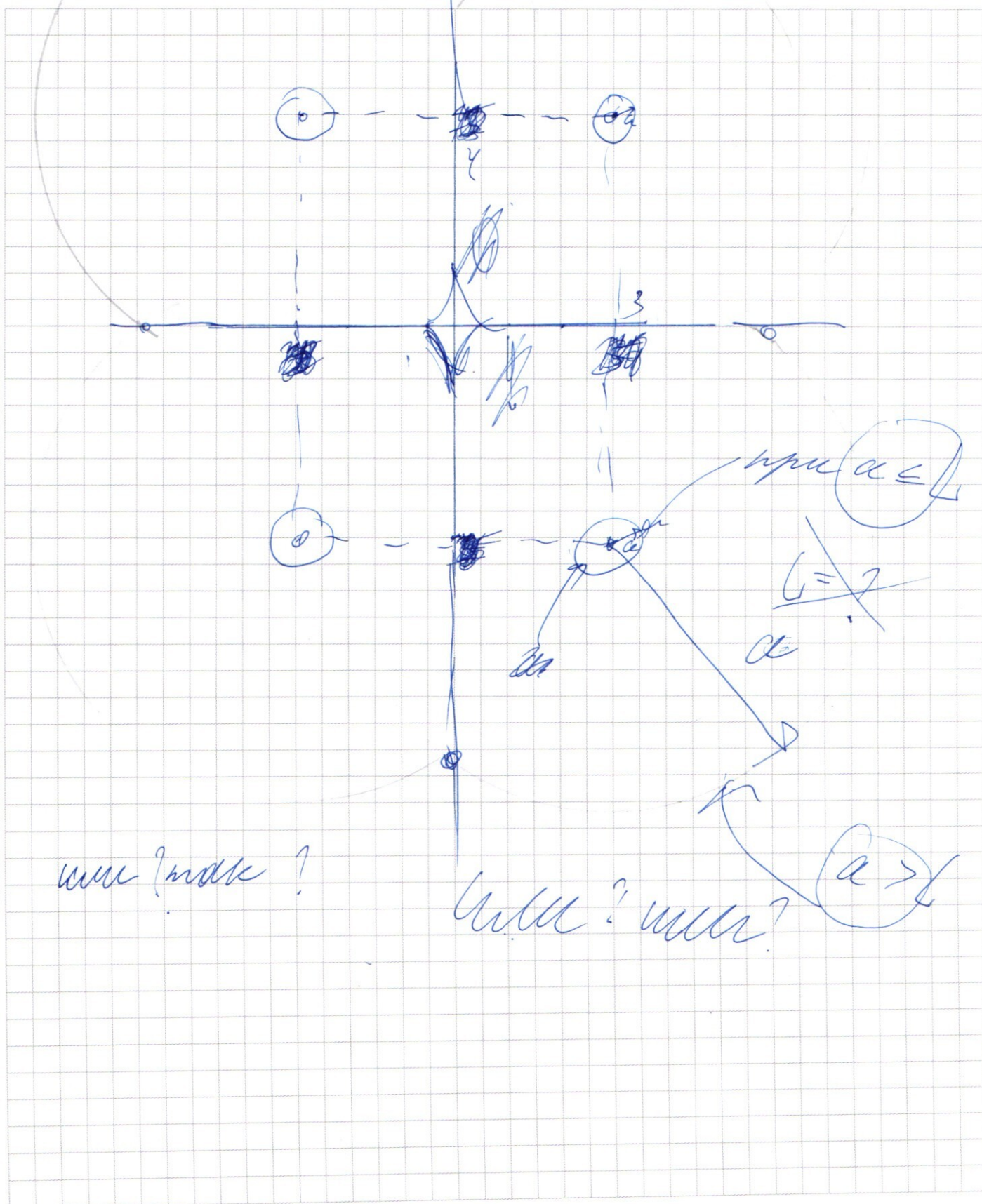
$$\cos^0 x - \cos^{90} y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$



или?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2k - 2x = \sqrt{2}k$$

$$2x = 2k - \sqrt{2}k$$

$$x = k - \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

$$x = k \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

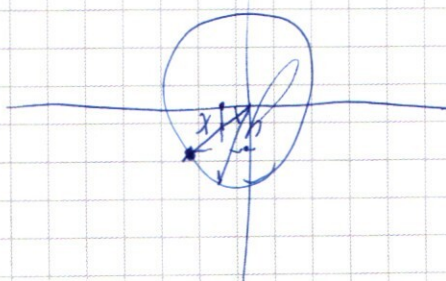
$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$2 \cos 4x \sin 4x - (2 \cos 4x \cos 4x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

51



$$\sin x + \cos y$$

$$\sin x + \cos y = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$$

$$\sin x + \cos y = \sin(x+y)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &= \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\sin x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$x^2 - (2y+4)x - (3y^2+12y) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 4y^2 + 4 \cdot 1 \cdot (3y^2 + 12y) = \\ &= 4y^2 + 12y^2 + 48y = \\ &= 16y^2 + 48y \end{aligned}$$

$$x \cdot \lg x = 1$$

$$\lg x - \lg x = 1y$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 + 12y - 4x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x^2 - 2xy -$$

$$(x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2) - 4x + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 = 4x - 12y$$

$$(x-y-2y)(x-y+2y) = 4(x-3y)$$

$$(x-3y)(x+y) = 4(x-3y)$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{aligned} \ln |x(t)| &= \dots \\ x(t) &= e^{\dots} \end{aligned}$$

$$\log_a b = AC$$

$$\log_2 8 = 3$$

x