

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1

Начнем с того, что разложим 3375 на простые множители:

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

3	3	7	5	5
6	7	5		5
1	3	5		5
	2	7		3
		9		3
		3		3
		1		

Так как цифры не могут быть больше 9, мы получаем следующие комбинации из 8 цифр:

а) $3375 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

б) $3375 = \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9$

Найдем количество перестановок цифр для каждой комбинации, учитывая, что некоторые из цифр одинаковые:

а) $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= 10 \cdot 7 \cdot 8 = \underline{560}$

б) $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 2 \cdot 560 = \underline{1120}$

И найдем общее количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375,

просуммировав перестановки:

$$1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

Задача №2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

По формуле:

$$b) \cos 2\alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

По формулам:

$$a) \cos \alpha - \cos \beta =$$

$$= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$d) \sin \alpha - \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) + 2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin 7x \cos \frac{\pi}{4}) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x)) = 0$$

$$\sin (7x + \frac{\pi}{4}) (2 \sin 4x + 2 \sin (\frac{\pi}{4} - 7x)) = 0$$

$$\sin (7x + \frac{\pi}{4}) (\sin 4x - \sin (7x - \frac{\pi}{4})) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin (7x + \frac{\pi}{4}) = 0 & (1) \\ \sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4}) & (2) \end{cases}$$

$$1) \sin (7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{1}{7} \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi - (7x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение пункта 2:

$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 5 - (7x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Итого:

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{1}{7}\pi n & n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задание №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Для начала решим (1) перебирая все возможные значения знаков перед модулем

1) а)

$$\begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \\ (y - 3 - x) + (y - 3 + x) = 6 \end{cases}$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} 6 - 3 - x \geq 0 \\ 6 - 3 + x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$x \in \emptyset$$

$$x \in [3; -3]$$

б)

$$\begin{cases} y - 3 - x \leq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \\ -(y - 3 - x) + (y - 3 + x) = 6 \end{cases}$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} y - 3 - 3 \leq 0 \\ y - 3 + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \in [0; 6]$$

в)

$$\begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x < 0 \\ (y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6 \end{cases}$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$\begin{cases} y - 3 + 3 \geq 0 \\ y - 3 - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y < 6 \end{cases}$$

$$y \in [0; 6)$$

г)

$$\begin{cases} y - 3 - x < 0 \\ x - 3 + x < 0 \\ -(y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6 \end{cases}$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$-2y + 6 = 6$$

$$y = 0$$

$$\begin{cases} -3 - x < 0 \\ -3 + x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$x \in (-3; 3)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь для каждой группы решений (а-2) найдем количество решений уравнения (2) при различных a .

а) $y=6, x \in [3; -3]$

$$(|x|-4)^2 + (|6|-3)^2 = a$$

$$(|x|-4)^2 = a-9 \quad (\text{При } a-9 < 0 \text{ решений нет})$$

$$|x|-4 = \pm \sqrt{a-9}$$

$$|x| = 4 \pm \sqrt{a-9}$$

Так как $|x| \in [0; 3]$, а $4 + \sqrt{a-9} \geq 4$, то

можно свести это уравнение к:

$$|x| = 4 - \sqrt{a-9} \quad (\text{или } 4 - \sqrt{a-9} \geq 3)$$

$$\begin{cases} \text{При } 4 - \sqrt{a-9} < 0 & \text{решений нет} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{При } (4 - \sqrt{a-9}) \in (0; 3] & \text{есть 2 решения} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{При } 4 - \sqrt{a-9} = 0 & \text{есть одно решение} \end{cases}$$

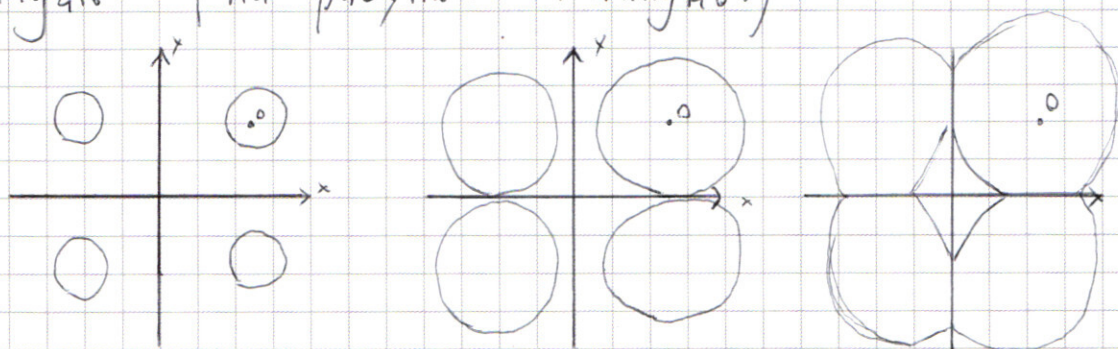
$$7 < a < 9 \quad \text{или} \quad a$$

$$a \in (-\infty; 8) \cup (25; +\infty) \quad \text{решений нет}$$

$$\text{При } a \in [8; 25) \quad 2 \text{ решения}$$

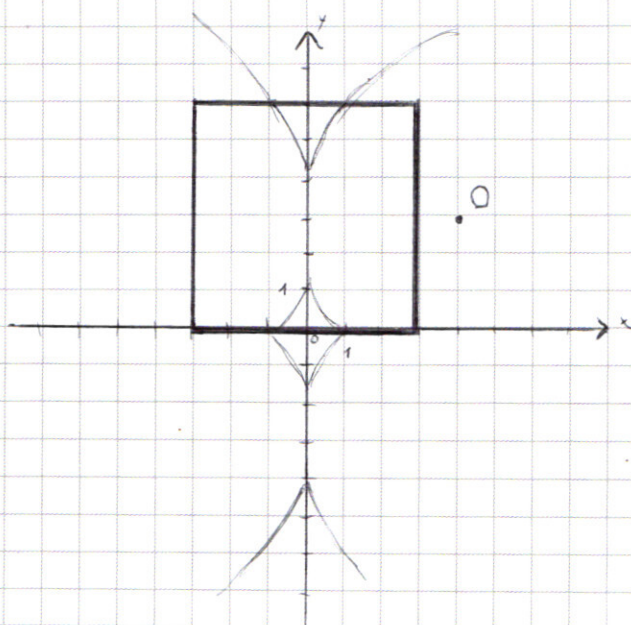
Заметим, что второе уравнение – уравнение окружности, при чем не одной, а четырех симметричных относительно осей координат

При увеличении параметра a , окружности будут "раздвигаться", а при пересечении осей координат "пропадать" (на рисунке наглядно:)



Надеюсь понятно.

Нарисуем график решения первого уравнения и наложим на него график решений второго уравнения.



Заметим, что 2 решения может быть только в двух случаях:

- Окружности радиусом 1, ровно две из которых касаются прямоугольника
- Окружности радиусом 5, которые дают решения $(0;0)$ и $(0;6)$

$$a = 1^2 = 1$$

$$a = 5^2 = 25$$

Ответ: 1; 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 7

Обозначим $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$

Начнем с того, что при $x = 6$:

$$2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 6$$

$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 6 \cdot 2^{64} - 6$$

$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$f(x) = g(x)$$

(Количество решений для
фиксированного x равно $g(x) - f(x)$)

Количество решений при $x = 6$ все равно будет
равно нулю, но вышеописанное соотношение позволяет
нам вывести зависимость количества возможных y
от x .

Важно понимать, что при $x \leq 6$ решений
не будет из-за совокупности двух факторов

1) при $x < 0$ $f(x) > 0$, $g(x) < 0$, а значит

при $x < 0$ решений точно нет

2) при $x \geq 0$ но $x \leq 6$ обе функции монотонны и
не пересекаются (пересечение мы нашли при $x = 6$)

Найдем количество решений для фиксированного x :

$$g(x) - f(x) = (70 + (2^{64} - 1)x) - (2^x + 3 \cdot 2^{65})$$

Пусть $t = x - 6$, тогда

$$g(x) - f(x) = t(2^{64} - 1) - 2^{t+6} - 2^6$$

Заметим, что при $t = 64$

$$g(x) - f(x) = 2^6 \cdot (2^{64} - 1) - 2^{64+6} - 2^6 = 2^{70} - 2^6 - 2^{70} - 2^6 = -2^7 < 0$$

А при $t = 63$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \\ &= 63 \cdot (2^{64} - 1) - 2^{63+6} - 2^6 = 63 \cdot (2^{64} - 1) - 2^{69} - 2^6 \approx \\ &\approx 2^{70} - 63 - 2^{69} - 64 > 0 \end{aligned}$$

При этом при $t > 63$ решение не существует из-за того, что у $g(x) - f(x)$ только один максимум

Тогда просуммировав все возможные x для t от 0 до 63 можно найти ответ:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{63} (t(2^{64} - 1) - 2^{t+6} - 2^6) &= 2016(2^{64} - 1) - (2^{71} - 1) - 2^6 = \\ &= 2016(2^{64} - 1) - (2^{71} - 1) - 2^6 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2016(2^{64} - 1) - (2^{71} - 1) - 2^6$$

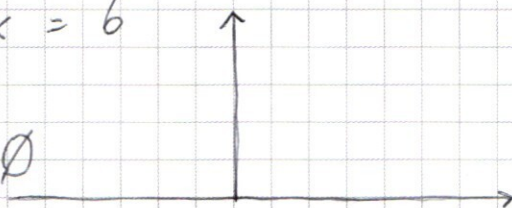
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7

Заметим что при $x = 6$

$$\begin{aligned} x &> 64 + 3 \cdot 2^{65} \\ x &\leq 64 + 3 \cdot 2^{65} \end{aligned}$$

$y \in \emptyset$



Каждый раз $70 + (2^{64} - 1) \times$ увеличивается
на $2^{64} - 1$

Каждый раз $2^x + 3 \cdot 2^{65}$ увеличивается

на какую-то степень двойки, а значит,
пока выполняется

$$\begin{aligned} t(2^{64} - 1) - 2^{t+6} - 2^6 &= 126 \\ t(2^{64} - 1) - 2^{t+6} - 2^6 > 0 & \quad \begin{array}{r} 126 \\ 189 \\ \hline 2016 \end{array} \quad (t = x - 6) \end{aligned}$$

Будут решения то

$$2^6 \cdot 2^{64} - 2^6 - 2^{64} - 2^6 > 0$$

При $t = 64$

$$64 = x - 6$$

$$x = 70$$

$$32 \cdot 63 - 2^3 > 0$$

$$6 < x < 70 \quad \text{и} \quad 9 \geq a \geq 10$$

$$\frac{(1+63)}{2} = 63$$

$$x = 3 \quad y = 3$$

$$x = -3 \quad y = 6$$

$$\text{При } x \in [-3, 3]$$

$$4 \pm \sqrt{a-9} \leq 3 \quad \begin{array}{l} 12 \\ 4x^2 - 9 = a \end{array}$$

$$a = 1$$

$$y = 0$$

$$\pm(4 \pm \sqrt{a-9})$$

$$4x + 27 = 16$$

$$a = 16$$

$$\begin{aligned} (|x| - 4)^2 &= a - 9 \\ |x| - 4 &= \pm \sqrt{a-9} \end{aligned}$$

$$x = \pm \left(4 \pm \sqrt{a-9} \right) \leq 4 \pm \sqrt{a-9} \leq 3$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x)$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 11x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 11x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x)$$

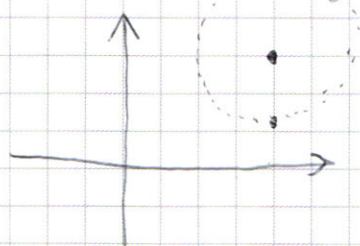
$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$- \sin 4x (\cos 2$$

$$a = 4$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \sin 4x (-\sin \cos 7x - \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) (2 \sin 4x - 2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}))$$

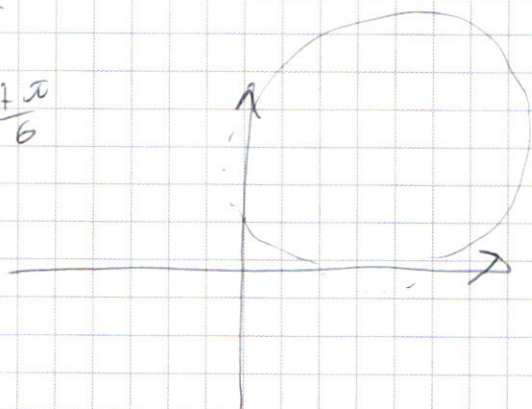
$$u_x = 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{11\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos \frac{14\pi}{12}$$

$$\cos \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{12} = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$\cos \frac{14\pi}{12} = \cos \frac{7\pi}{6}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 5 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 30 & 675 \\ \hline 37 & 5 \\ 35 & 11 \\ 25 & 15 \\ 25 & 25 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 135 & 5 \\ 10 & 27 \\ \hline 35 & \\ 35 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 76 \\ \hline 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 5 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 875 \\ 5 \\ \hline 3375 \\ 735 \\ 5 \\ \hline 1675 \\ 6 \end{array}$$

В любом числе 3 пятёрки

Может быть 3 тройки / 1 тройка и одна девятка

Примеры: $\frac{11333555}{11139555} \rightarrow \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = A$

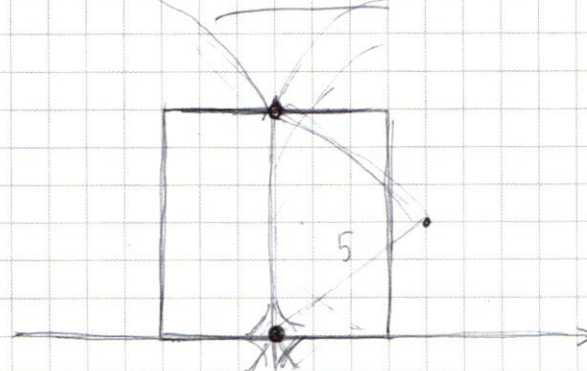
$$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 2^4 \cdot 7 \cdot 5 = 16 \cdot 35 = 560$$

$$B = \frac{2 \cdot 3 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3! \cdot 3!} = 560 \cdot 2 = 1120$$

Ответ: 1680

$a = 5$

25



(N2)

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cos 4x$$

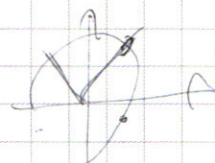
$$2 \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \cos 4x - 2 \sin 4x \cos 7x \quad | : -2$$

$$\sin 7x \cos 4x + \sin 4x \cos 7x$$

$$\sin(7x + 4x) = \sin 11x$$

$$\boxed{\sin 11x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x}$$



$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos 11x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 11x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \left(\cos 3x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 3x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = -2 \sin 14x$$

$$\cos 11x - \sin 3x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha - \beta = y$$

$$2\alpha = x + y$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2} \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N3)

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x}$$

$$\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -1$$

$$-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y + 4)x + (12y - 3y^2) = 0$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm \sqrt{4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y}}{2} =$$

$$0 - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$= y + 4 \pm \sqrt{20y^2 - 32y + 16} - 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

(N5)

$$1) \quad y - 3 - x \geq 0 \quad y - 3 + x \geq 0$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$2y - 6 = 6 \quad y = 0$$

$$0 - 3 - x \geq 0 \quad 0 - 3 + x \geq 0$$

$$x \leq -3 \quad x \geq 0$$

$$x \notin \mathbb{R}$$

$$2) \quad y - 3 - x \leq 0 \quad y - 3 + x \geq 0$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y - 3 \leq 0 \quad y - 3 \geq 0$$

$$y \leq 3 \quad y \geq 3$$

$$y = 3$$

$$3) \quad y - 3 - x \geq 0 \quad y - 3 + x \leq 0$$

$$x - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6 \quad x = -3$$

$$y - 3 - 3 \geq 0 \quad y - 3 - 3 \leq 0$$

$$y \geq 6 \quad y \leq 6$$

$$y = 6$$

$$y - 3 - x \geq 0 \quad y - 3 + x \geq 0$$

$$y - 3 - x + \frac{y-3}{2} + x = 6 \quad \Delta$$

$$2y - 6 = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6 \quad \text{При } x \leq -3;$$

$$0 - 3 + x \geq 0$$

$$2^{65} + 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{65} = 2^{67}$$

$$y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

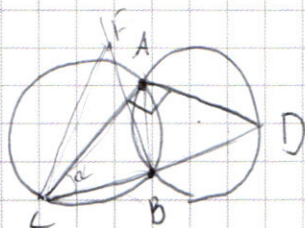
$$y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$(y^3 \cdot x^{-1})^{\lg x} = (y^2)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = (y^2)^{\lg y}$$

$$(|x| - 4)^2 + 9 = 9$$

$$y = 0$$



$$y) \quad y - 3 - x \leq 0 \quad y - 3 + x \leq 0$$

$$-y + 3 + x - x + 3 - x = 6$$

$$-2y = 6$$

$$y = -3$$

$$32 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$65 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$64 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$128 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$6 \leq x \leq 70$$

$$2^6 \cdot 2^{64} - 2^6 - 2 - 2^6 \geq 0$$

$$0 - 3 + x \leq 0$$

$$x \leq 3$$

$$0 - 3 - x \leq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \in [-3, 3]$$

$$y = 0$$

$$2^{64} - 1 - 64$$

$$2 \cdot (2^{64} - 1) - 64 - 128$$

$$x \cdot (2^{64} - 1) - 2^{x+6} - 64 \geq 0$$