

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

$y = x+3$

$y = 3-x$

Раскрываем модули

1+ $y-3-x-x$

2+ $y-3-x+y-3+x=6$

$2y = 12$

$y = 6$

1- $-y+3+x+y-3+x=6$

2+ $2x = 6$

$x = 3$

1- $-y+3-x-y+3-x=6$

2- $y=0$

1+ $y-3-x-y+3-x=6$

$-2x = 6$

$x = -3$

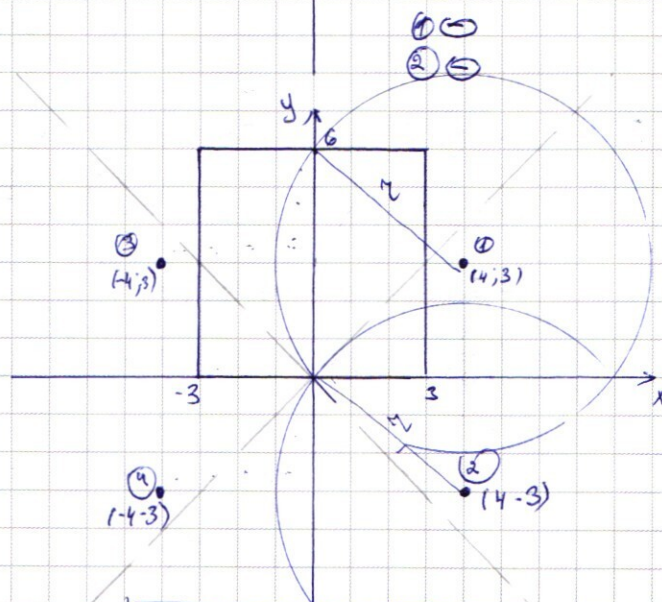
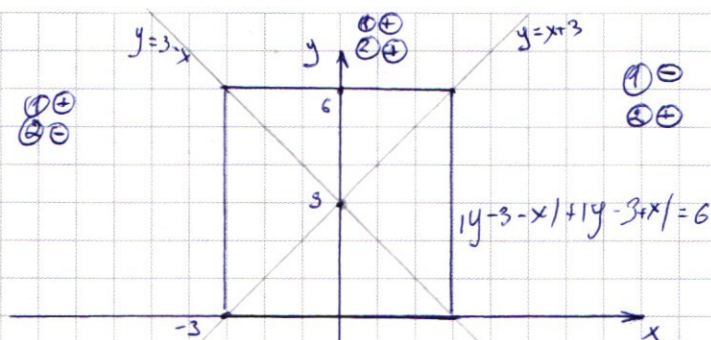
$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

Окр 1 $x \geq 0$
 $y \geq 0$ тогда центр окружности (4; 3)

Окр 2 $x \geq 0$
 $y < 0$ Ц. окр (4; -3)

Окр 3 $x < 0$
 $y \geq 0$ Ц. окр (-4; 3)

Окр 4 $y < 0$
 $x < 0$ Ц. окр (-4; -3)



из рисунка видно; у нас там
будет 2 решения, если
окружности 1 и 3 касаются
квадрата, тогда радиус
этих окружностей будет 1
 $\Rightarrow a = 1$

2) Будет 2 решения, если окруж-
ности 1 и 3 пересекут

точки (0; 0) (0; 6) и окр
ни 3 пересекут т (0; 0) и 3
тогда $a = \sqrt{16+9} = 5$ (потому что
тогда $r = \sqrt{16+9} = 5$
 $r^2 = a \Rightarrow a = 25$

Других случаев нет тк из-за симметрии если Окр 1 имеет 2 точки пересечения то и Окр 3 имеет 2 точки пересечения и если они не совпадают то в случае выше, то они различны и уже решены.

~~Если Окр 1~~ Если окр 1 и 3 не пересекают квадрат в своих зонах то и окр 2 и 4 не пересекут квадрат

Ответ: $a=1$ и $a=25$

$$\textcircled{12} (\cos 11x - \cos 5x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos 14x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 2 \sin^2 7x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = (\cos 7x - \sin 7x) \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \sin 7x \cos \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \frac{\pi}{4} = 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x \end{cases} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$$

$$-\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x$$

$$-\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - 1.5x\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - 5.5x\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k \\ \sin\left(\frac{\pi}{8} - 1.5x\right) = 0 & \frac{\pi}{8} - 1.5x = \pi l \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - 5.5x\right) = 0 & \frac{\pi}{8} - 5.5x = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi k}{7} - \frac{\pi}{28} \\ x = \frac{\pi l}{1.5} + \frac{\pi}{12} \\ x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2}{11}\pi m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ответ} \\ k, l, m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51

1) Разложим число 3375 на его множители

$$3375 \div 5$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$$

$$675 \div 5$$

Новое число

$$135 \div 5$$

У нас получатся расстановки с повторениями

$$27 \div 3$$

Используем 1 так как нам нужно

$$9 \div 3$$

$$3$$

получить ~~восемь~~ восьмизначное число,

а множителями однозначных у 3375 либо 6, как показано выше, либо 5 $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3$

$\Rightarrow$ У нас 2 группы восьмизначных чисел с 9 и без нее

Формула для расстановки с Повторениями $P = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_j!}$

где n - количество мест k_j - количество повторений j элементов

случай 1: $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

$$P_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} - \text{количество восьмизначных чисел,}$$

у которых нет 9

случай 2: $P_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} \quad 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$$P_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

Количество восьмизначных чисел: $P = P_1 + P_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} =$

$$= 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680

$$\begin{aligned} \textcircled{N7} \quad & \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \Rightarrow \\ & x > \frac{3 \cdot 2^{65} - 70}{2^{64} - 1} \\ & x > \frac{(6 \cdot 2^{64} - 6) - 64}{2^{64} - 1} \Rightarrow x > 6 - \frac{64}{2^{64} - 1} \quad x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 6 \end{aligned}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \text{ минимизируем по } x$$

$$\boxed{2^x + 1 + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + x \cdot 2^{64} - x}$$

① $x = 6$ тогда $2^6 + 1 \leq 64$ не верно

~~$x = 7$ и далее не верно тк левая~~

$x = 7$

$$2^7 + 1 + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + 7 \cdot 2^{64} - 7$$

$$2^7 + 1 \leq 63 + 2^{64} \text{ удовлетворяет условию}$$

$2^7 = 128$

$$128 + 1 \leq 63 + 2^{64}$$

② $36 \leq 2^{64}$

y может быть от $(2^6 + 3 \cdot 2^{65}) + 1$ до $(2^6 + 3 \cdot 2^{65}) \cdot (2^{65} - 36)$

уменьшим

$a > 0$

~~$\log x$
 $\frac{y^5}{x} = y$
 $y^5 \log x = x$~~

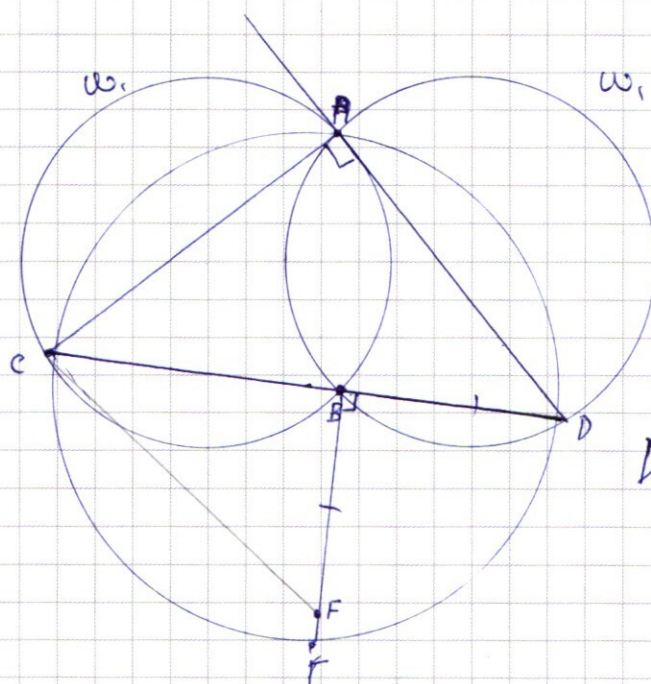
$x = 8$

а. на его количество y которое нам подходит

$$2^8 + 1 + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + 8 \cdot 2^{64} - 8$$

$$a \leq 2 \cdot 2^{64} + 62 - 2^8$$

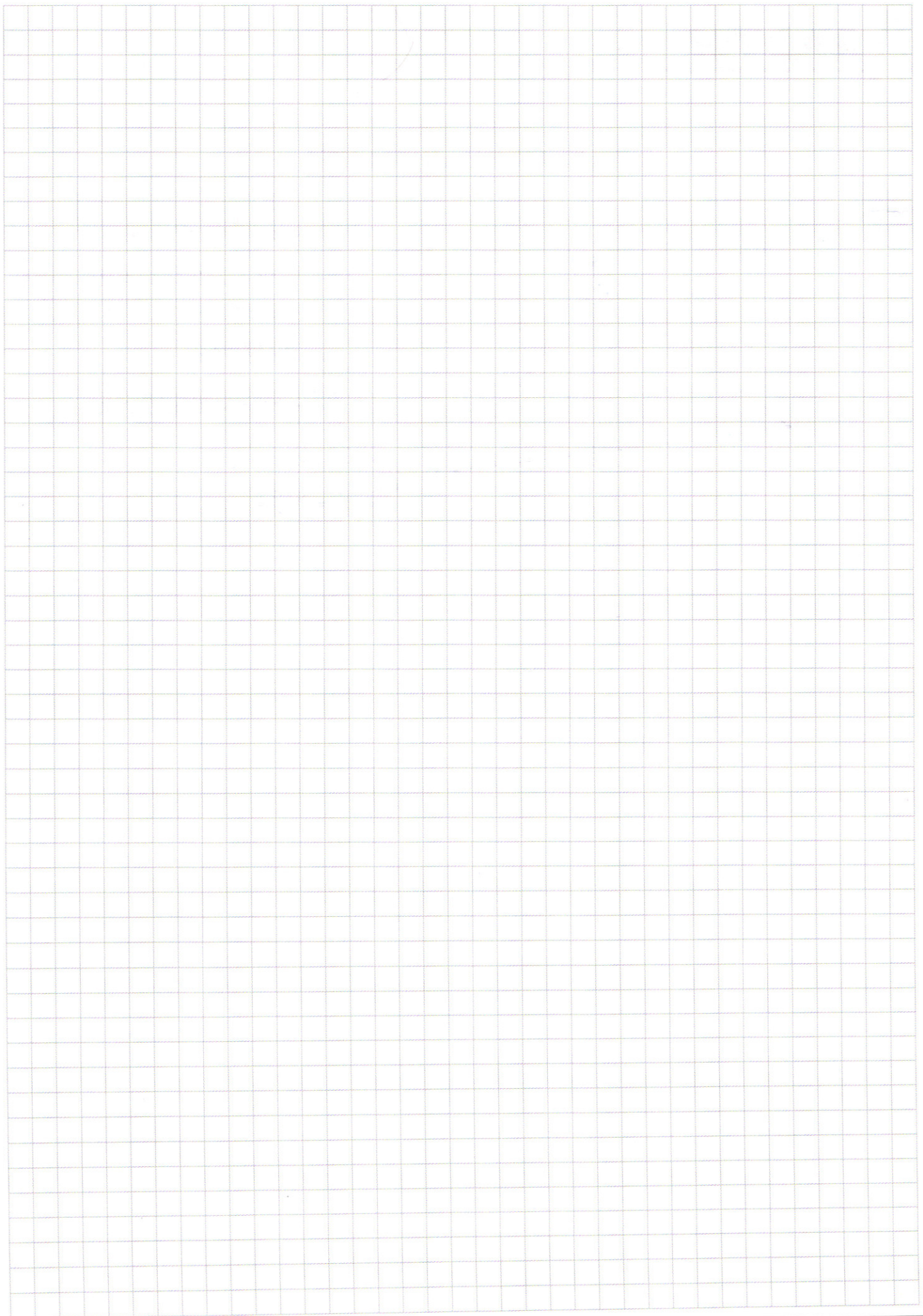
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ΔCAD - тупой угол $\Rightarrow$ вписан
в окружность. Можно вписать
окружность $\triangle DBC$ будет
прямоугольником

DA - касательная к

 ω_1 и ω_2
$$DA_{vac} \Rightarrow CA$$



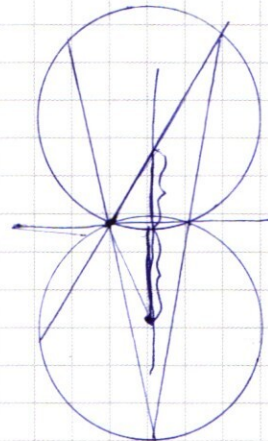
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 25 \\ \sqrt{5} \\ 125 \\ \sqrt{27} \\ 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$



$$1 + 2^6 + 2 \cdot 2^6 \leq 70 + 12 \cdot 6 \cdot 2^6 - 6$$

$$\cos^2 x - 1 = 2 \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 2 = 6$$

КООР

a_1, a_2, a_3, a_4

$$\begin{array}{r} 22222 \\ 22222 \\ \hline 44444 \end{array}$$

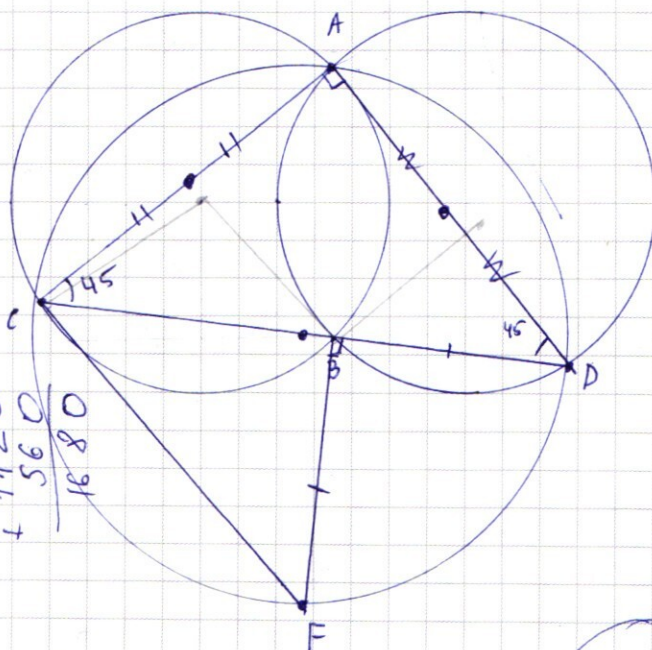
7.8

10.56

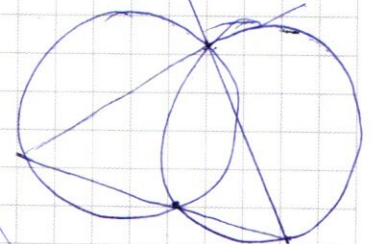
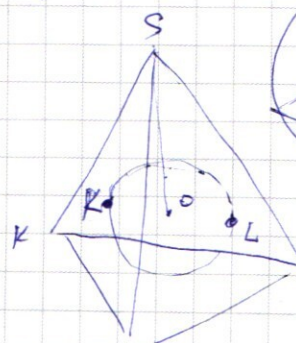
$$\begin{array}{r} 8785477 \\ 3277777 \\ \hline 12063254 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28432 \\ 3232 \\ \hline 31664 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 56 \\ \hline 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$



④



$$\frac{11}{2}x = \frac{n}{8} - \frac{4n}{8} - nm$$

$$\frac{11}{2}x = -\frac{3n}{8} - nm$$

$$x = \frac{3n \cdot 8}{11 \cdot 2} - \frac{2}{11}nm$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\cos 11x - \sin 11x$$

$$\cos 11x - \cos 3$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin 11x - \sin 3x$$

$$\frac{1}{2} \cos 11x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 11x + \frac{1}{2} \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 11x \right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 11x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

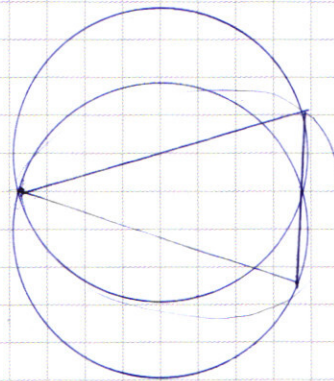
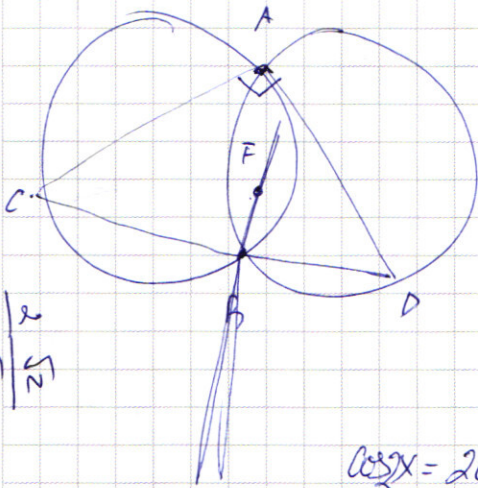
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x =$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 4x = \frac{1}{2} \left(\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

11

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$



$$2x - 64 > x - 6$$

$$(1, 3)$$

$$(-1, 3)$$

$$128$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 63 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\frac{84}{5}$$

$$\frac{64}{2} = 32$$

$$x - 3x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) + \sin 3x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin 11x \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-11x\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin 4x \cos\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)$$

$$= (\cos 3x - \sin 3x) \quad \frac{\pi}{4}-11x-3x+\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 3x - \cos$$

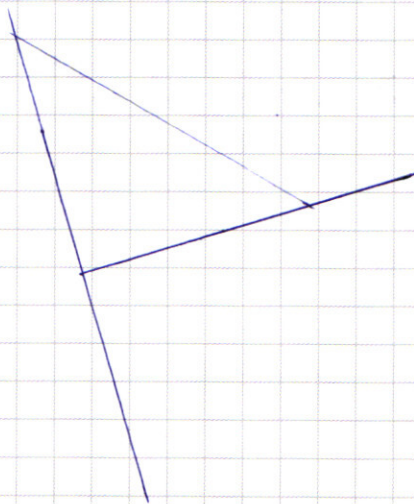
$$-2 \sin 4x \sin 7x = 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 + 4(-y^2 - x + 3y) = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2$$



$$-\frac{1}{\lg x} \cdot 10 =$$

$$a + 2x + 6 \cdot 2^{64} \leq 70 + 2^{64} - x$$

$$a < 2^{64} (x-6) + 70 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y > 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{65} < 70 + x \cdot 2^{64} - x$$

$$2^{64}(2 - x) < 70 - x$$

~~$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64}x - x$$~~

$$3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$x > \frac{3 \cdot 2^{65} - 70}{2^{64} - 1} = \frac{6 \cdot 2^{64} - 70}{2^{64} - 1} \Rightarrow x > 6 \frac{64}{2^{64} - 1} \Rightarrow$$

~~$$x > \frac{3 \cdot 2^{64} - 1 + 2^{64} - 70}{2^{64} - 1}$$~~

$$x > 6$$