

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 1680

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . 10

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF . 49

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Представим число 3375 в виде произведения простых множителей.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Какое число может содержать 2 комбинации чисел.

1° вариант

Число состоит из трех 5, трех 3 и двух 1, тогда таких чисел будет:

$$N_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

2° вариант

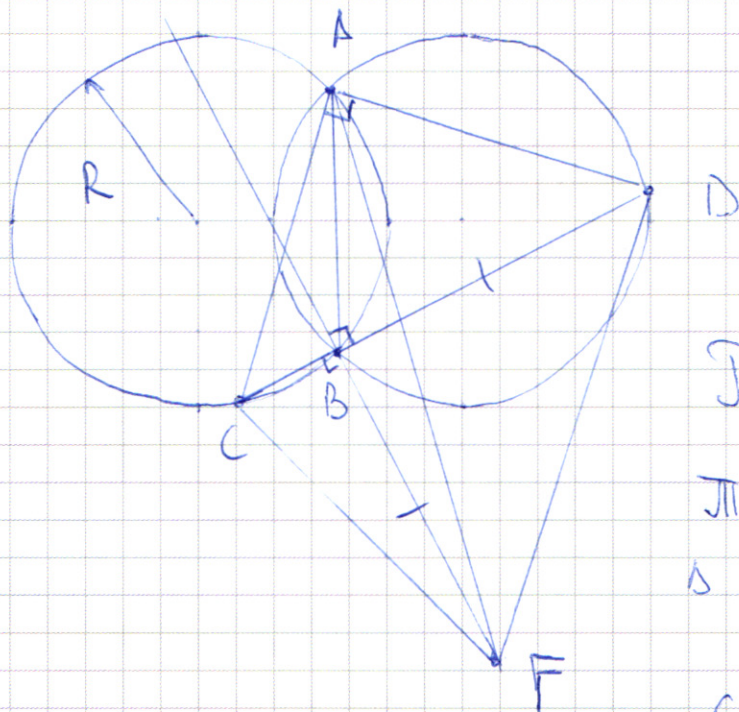
Число состоит из трех 5, одной 3, одной 3 и трех 1.

$$N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

$$N = N_1 + N_2 = 1680$$

Ответ: 1680

Задача 6



a) $\angle CAD = 90^\circ$
 $R = 5$
 $BF = BD$
 $BF \perp CD$

Решение:

П.к $BF \perp CD \Rightarrow$
 $\triangle BCF$ - прямоугольный
 $\Downarrow$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2}$$

$\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ - вписанные треугольники

По теореме синусов

$$\begin{cases} \frac{CB}{\sin \angle CAB} = 2R \\ \frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R \end{cases} \Rightarrow BC^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \angle CAB + \cos^2 \angle CAB) = 4R^2$$

$\angle CAB + \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \sin \angle BAD = \cos \angle CAB$

$$CF = 2R = 10$$

Ответ: $CF = 10$

5) $BC = 6$

Найти: $S_{\triangle CAF} = ?$

$$BD = BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8$$

Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90^\circ - \alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из теоремы синусов

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{\sin \alpha} &= 2R \\ \frac{AB}{\cos \alpha} &= 2R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\Downarrow \\ \alpha = 45^\circ$$

$\Downarrow$
 $\triangle ACD$ - равнобедренный

$$CD = BC + BD = 14$$

$$AC = AD = x$$

$$\sqrt{2} x = CD$$

$$AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{4}{5}$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\angle BCF + 45^\circ) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= 49$$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 49$

Задача 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & \Gamma_1 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & \Gamma_2 \end{cases}$$

Разберемся, как построить Γ_1
график

$$|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6$$

1° $y-3-x + y-3+x = 6$

$$y = 6$$

2° $y-3-x - y+3-x = 6$

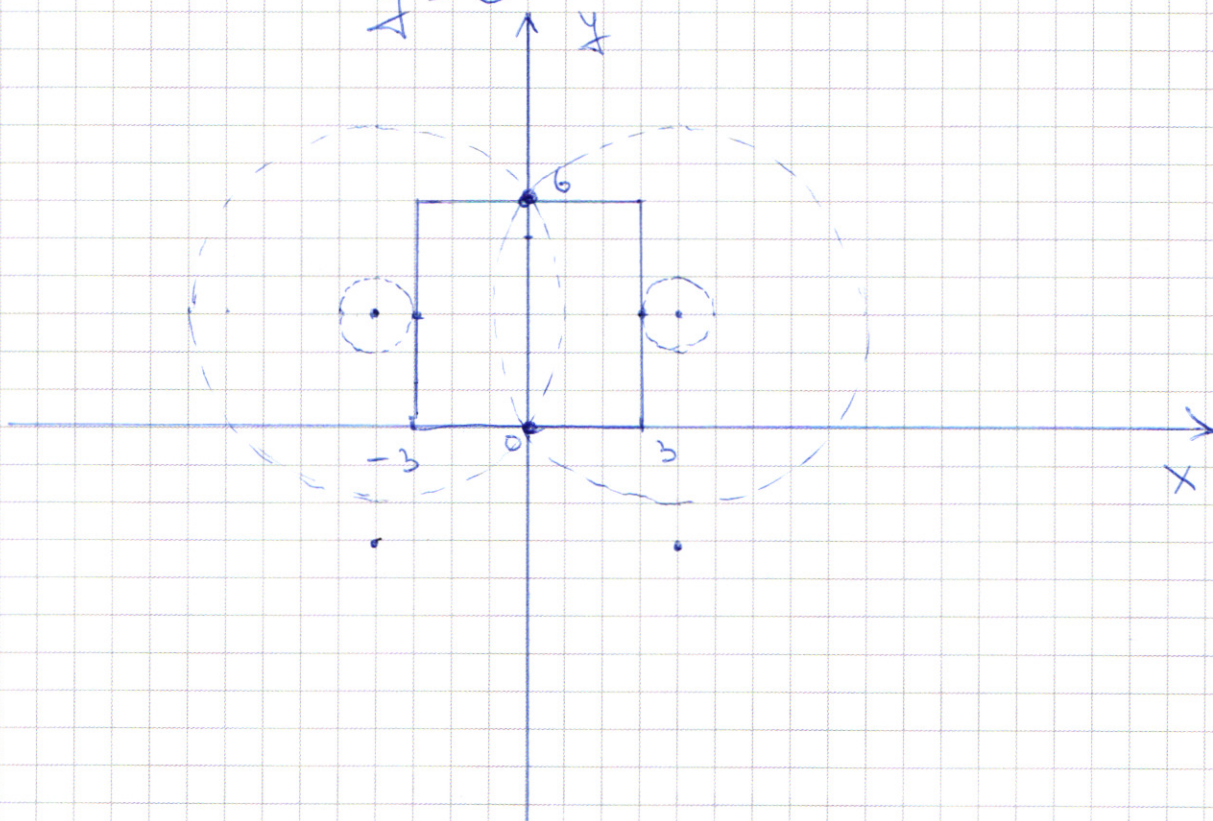
$$x = -3$$

3° $-y+3+x + y-3+x = 6$

$$x = 3$$

4° $-y+3+x - y+3-x = 6$

$$y = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Графики функции f_1 и f_2 — 4 окружности, либо части окружностей, в зависимости от параметра a .
(центрами в точках

$(4, 3)$
 $(-4, 3)$
 $(4, -3)$
 $(-4, -3)$

Пусть r — радиус окружностей

1° Если $r < 1$, то графики функций f_1 и f_2 не пересекаются $\Rightarrow$ решений нет.

2° Если $r = 1$, то верхние окружности в 2 точках касаются графика функции $f_1 \Rightarrow$ решений 2 $\Rightarrow$ $\boxed{a = 1}$

3° $r \in (1, 5)$, точек пересечения будет 4 $\Rightarrow$ решений будет 4

4° $r = 5$ графики пересекаются только в точках $(0, 0)$ и $(0, 6) \Rightarrow$ решений 2 $\Rightarrow$ $\boxed{a = 25}$

~~5° $r \in (5, \sqrt{58})$, точек пересечения будет~~

~~60~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~

$z \in (15; 17)$ - 4 решения

$z = 17$ - 6 решений

$z \in (17; \sqrt{558})$ - 8 решений

$z > \sqrt{558}$ - 0

При $z > 5$ не будут такие случаи, что точек пересечения ровно 2

Ответ: $a=1$; $a=25$

Задача 3

O.D.3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$xy > 0$$

$$x > 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ (x+y-4)(x-3y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x = 3y \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$1^0 \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^4 \lg 3y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) =$$

$$= \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

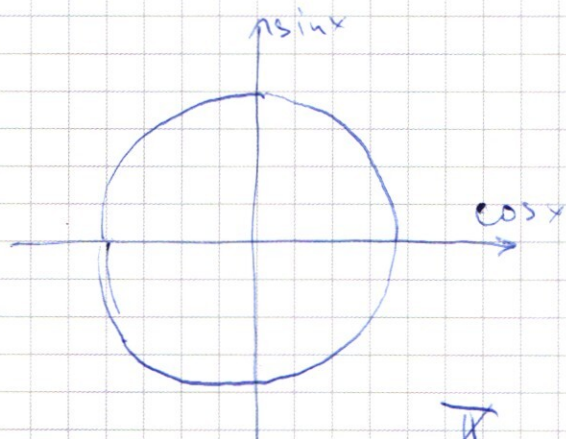
$$\alpha = 11x + \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = 3x - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha - \sin \beta$$

⇓

$$\begin{cases} \cos \beta = 1 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ \sin \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases}$$



$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$11x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{11}\right)h = \frac{1}{44} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{16}{3 \cdot 11} h = \frac{3 - 11}{11 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$h = -\frac{1}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$$

Ответ: $\boxed{x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$y > 3+x$

$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$

$R = 5$

$2y = 6$

CF

$CB + BD = 2R \sin \varphi$

$\sin \alpha = \cos \beta$

$\sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$2R = \frac{CB}{\sin \alpha}$

$2R = \frac{ABD}{\cos \alpha}$

$\alpha = 90^\circ - \alpha$

$\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha =$

$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$(\frac{y}{x})^{\lg x} = y^2 \lg xy$

$(x+y-4)(x-3y) = 0$

$x = 3y$

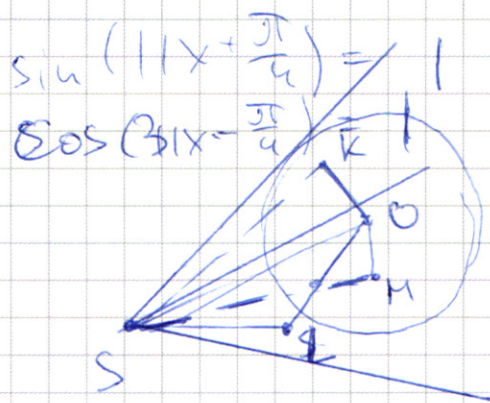
$x = 4 - y$

$x = 3y$

$x = 4 - y$

$\frac{2}{3} + \frac{2}{11} = \frac{1}{44} - \frac{1}{12}$

$\frac{16}{3 \cdot 11 \cdot 4} = \frac{3 - 11}{11 \cdot 3 \cdot 4}$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \quad \alpha = 5x$$

$$\beta = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\sin a + \sin b$$

$$\binom{1 \ 4 \ 4}{3 \ 1 \ 5} \lg^3 y = y^2 \lg^3 y^2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 9} = 1$$

$$\left(\frac{1}{3} y^4\right)^{\lg 3y} = (y^4)^{\lg 3y}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad (93) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha - \sin \beta$$

$$\cos \alpha (1 - \cos \beta) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a=1$
 $a=25$

$$\frac{3^8}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3^6}{2^3}$$

$$(x+y-4)(x-3y) = x^2 - 3xy + xy - 3y^2 = x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$C_8^3 \cdot C_8^3 \cdot C_8^2 = -4x + 12y$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$3375 \div 5 = 675$$

$$675 \div 5 = 135$$

$$135 \div 5 = 27$$

$$27 = 3^3$$

~~187~~

в числе может быть
три 5 и три 3 ост 1
три 5 одна 3 ост 1

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 56 \\ \hline 280 \\ 3112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3112 \\ 7 \\ \hline 21784 \\ + 21784 \end{array}$$

$$C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^2$$

$$\frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 2} \cos 11x$$

$$2-x = \sqrt{2}$$

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos(11x + 3x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x -$$

$$- \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$$

$$\sin 11x (\sqrt{2} \sin 3x - 1) + \cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x = 0$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{AB}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2R$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 11x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x\right) - \cos 3x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x\right) + \sin 3x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x\right) = \cos(11x + 3x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(11x + 3x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha + \cos \beta$$

$$\sin \beta =$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\cos \alpha \cos \beta$$

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2$$

$$10$$

$$\times 80$$

$$\times 7$$

$$8!$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$1120$$

$$\cos\left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin 4x = \sin 14x$$

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$1680 \quad \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$8!$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$560$$

$$45678$$

$$\times 560$$

$$\times 56$$

$$\times 3$$

$$1680$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

?