

Рег. №: М11-ХМ-0022

Класс участия: 11

Место проведения: Ханты-Мансийск

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное):

ШК

(заполняется секретарём)



Олимпиада школьников «Физтех»

ПО Математика
Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

<u>Кутша</u> Фамилия	<u>Владислав</u> Имя	<u>Юрьевич</u> Отчество	<u>12.04.2002</u> Дата рождения	<u>17</u> Возраст
<u>Российская Федерация</u> Страна	<u>ХМАО - Югра</u> Регион	<u>пгт. Тишинка</u> Населенный пункт		
<u>Паспорт РФ</u> Документ, удостоверяющий личность	<u>67 14</u> Серия	<u>450049</u> Номер	<u>28.04.2016</u> Дата выдачи	<u>860-043</u> Код подразделения
<u>Россия</u> Страна школы	<u>ХМАО-Югра</u> Регион школы	<u>пгт. Ханты - Мансийск</u> Населенный пункт школы		
<u>11</u> Класс обучения	<u>504 Югорский физико-математический лицей-интернат</u> Полное название образовательного учреждения			
<u>+79822084231</u> Мобильный телефон	<u>Доп. телефон</u>	<u>nxnn6132@mail.ru</u> E-mail		

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020 г.

БВЖИ -
Подпись участника олимпиадыКутша Юлия Андреевна
ФИО законного представителямать
Степень родстваГуф -
Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 3^3 \cdot 5^3$ возможные комбинации цифр:

а) 3 "3" по 8-м "местам":

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

3 "5" по оставшимся 5 местам:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

а) S_1 (кол-во чисел) = $56 \cdot 10 = 560$, при варианте а

$S = S_1 + S_2 = 1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \sin 14x$

$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \sin 14x$

$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \sin 14x$

$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$(-2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) (\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$2 \sin 4x - \sqrt{2} \cdot \cos 7x + \sqrt{2} \cdot \sin 7x = 0$

$\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$

$\sqrt{2} \cdot \sin 4x = \cos 7x - \cos(\frac{\pi}{2} - 7x)$

$\sqrt{2} \cdot \sin 4x = 2 \sin 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2} \cdot \sin 4x = 2 \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 7x + \cos 7x = 0$

$\sin 7x = -\cos 7x$

$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin 4x = \sin 7x \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pi k \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{11x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{11x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{11x}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{11} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{2\pi}{11} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

(*) По св-ву логарифма
 $a^{\log_b c} = b^{\log_b a \cdot \log_b c} = c^{\log_b a}$

1-е уравнение:

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = (y \cdot x)^{2 \lg x} \quad (\text{из } *)$$

$$\frac{y^5}{x} = y^2 \cdot x^2 \Rightarrow y^5 = y^2 \cdot x^3 \Rightarrow y^3 = x^3 \Rightarrow y = x$$

м.к. $x \neq 0$ ($x > 0$) м.к. $y \neq 0$ ($y > 0$)

Вернемся ко второму ур-ю:
 (запишем x на y)

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$-4y(y - 2) = 0$$

$$-4y = 0$$

выпадает
по ОДЗ.

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

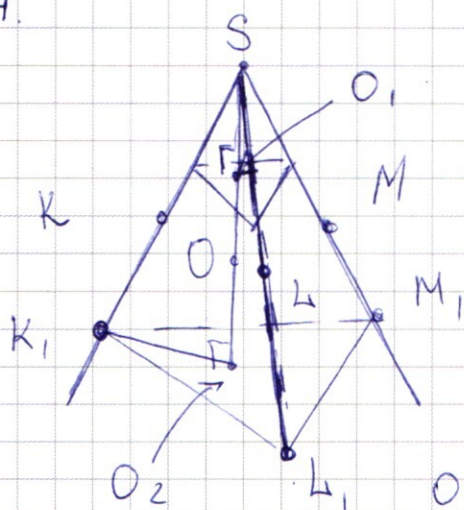
Ответ: $(2, 2)$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



1 две пл-ти $\perp$ SO и касающиеся сферы т.к. SO проходит через центр, пл-ти ее касаются, то между двумя пл-ми лежит диаметр. и эти пл-ти

II груз грузу $\Rightarrow$

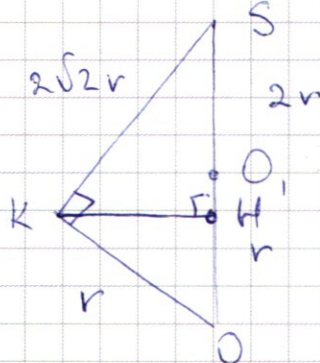
2 пирамиды с вершиной S и с плоскостями оснований, рассмотренных выше.

Основания пирамид II, высота лежит на одной прямой $\Rightarrow$ пирамиды подобны. $k = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = 2. \Rightarrow$

$$SO_1 = 2SO_2, \text{ и т.к. } O_1, O_2 \sim 2r$$

$$SO_1 = 2r$$

1 Δ Δ SOK :



$$SK = \sqrt{9r^2 - r^2} =$$

$$2\sqrt{2}r \Rightarrow$$

$$\cos S = \frac{2\sqrt{2}r}{3r} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$KH = \frac{SK \cdot OK}{SO} = \frac{2\sqrt{2}r \cdot r}{3r} = \frac{2\sqrt{2}r}{3}$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\angle KSO =$$

SK = SL = SW
(отрезки касат-х, из одной точки, равны)

1 пирамиды SKML

$$\frac{SK}{SL} = \frac{SM}{SW}$$

$$SO_2 = 4r \Rightarrow SK_1 = \frac{4r \cdot 3}{2\sqrt{2}} =$$

$$= 3\sqrt{2}r, \text{ аналогично } SL_1, \text{ и } SW_1 = 3\sqrt{2}r$$

$$\frac{V_{SKML}}{V_{SK_1ML_1}} = \frac{SK}{SK_1} \cdot \frac{SL}{SL_1} \cdot \frac{SM}{SW_1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}r}{3\sqrt{2}r} \cdot \frac{2\sqrt{2}r}{3\sqrt{2}r} \cdot \frac{2\sqrt{2}r}{3\sqrt{2}r} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{V_{SKML}}{V_{SK_1ML_1}} = \frac{SH \cdot S_{MKL}}{SO_2 \cdot S_{MK_1L_1}} = \frac{8}{27}$$

$$SH = \frac{2\sqrt{2}r}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}r}{3} = \frac{8r}{3}$$

$\angle ACB = \angle ADB$, т.к.
опираются на
равные дуги $AB \Rightarrow$

$$AC = AD$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ.$$

$\triangle BFD$:

$$BF = BD, \quad BF \perp BD;$$

$$\triangle BFD - p/5, \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow$$

$\angle ADN = 90^\circ \Rightarrow AN$ - диаметр.

 $\triangle \triangle C A E$ u $\triangle R N D$

$$\angle CRA = \angle ARN, \text{ т.к. вертикальные}$$

$$\angle ACF = \angle NAR \quad (\text{obg } \angle = 45^\circ) \Rightarrow$$

треугольники подобны и $AE \parallel ND$
(т.к. равны и углы $\angle NDR$ и $\angle ACR$)
а это означает наличие
углов при вершинах ~~ABC~~
 AE и AC .)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\Delta \quad \begin{cases} f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ f(x) \text{ всегда } \uparrow \end{cases}$$

Найдем точки их
пересечения:

аналогично $g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$
тоже всегда возрастает.

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x - 70 = (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^x - 2^6 = (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65} + 3 \cdot 2^6$$

$$2^6 (2^{x-6} - 1) = (2^{64} - 1)x - 6(2^{64} - 1)$$

$$64(2^{x-6} - 1) = (x - 6)(2^{64} - 1)$$

$$x = 6 \quad \text{и} \quad x = 70.$$

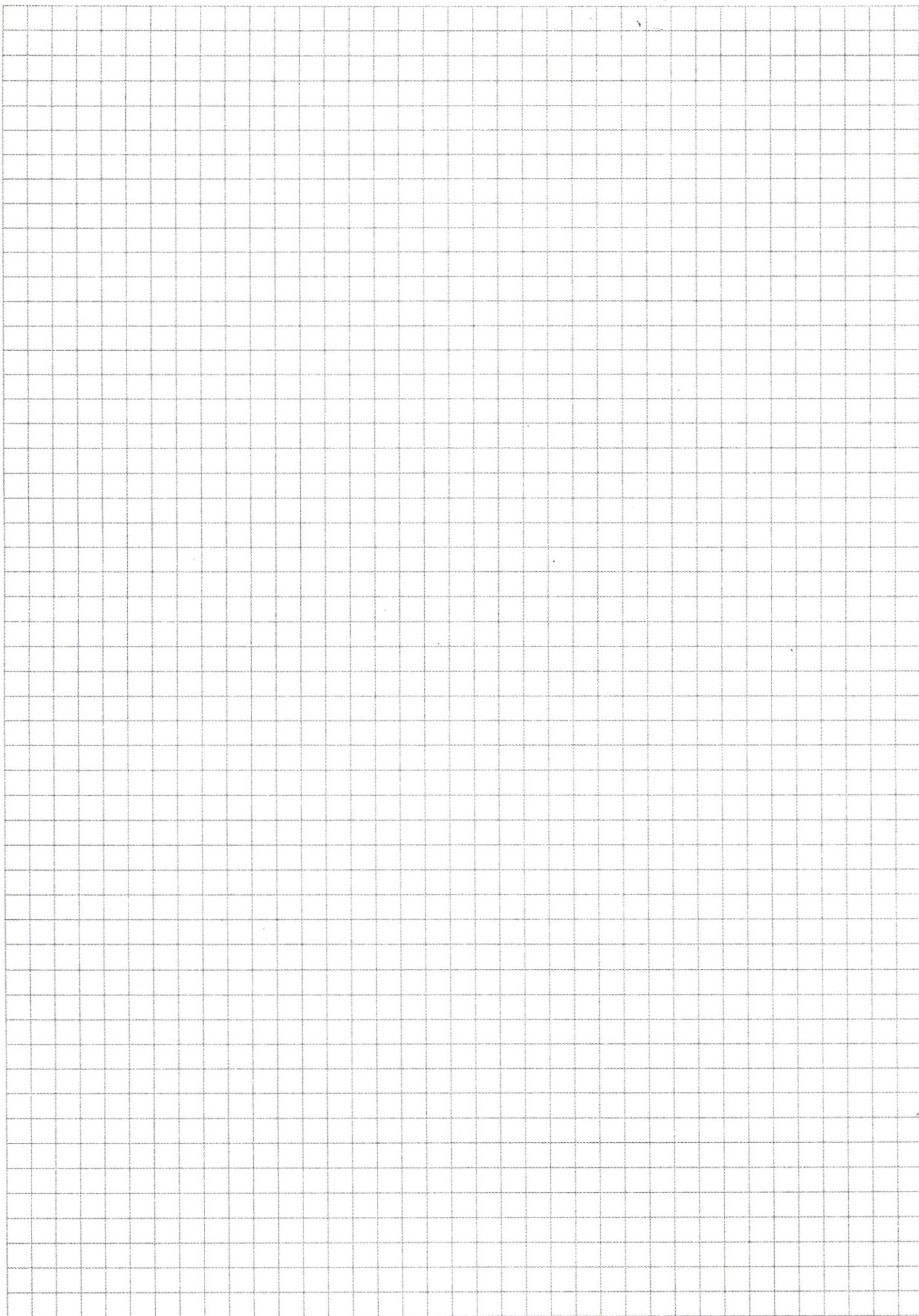
при $x < 6$

$g(x) < f(x) \Rightarrow$
система
не имеет решений.

Аналогично при $x > 70$.

Система неравенств имеет решения, только
при $x \in (6, 70)$:

Ответ: 63 значения.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7 \quad \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 < y \leq (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 2^6 - 3 \cdot 2 < y - 70 \leq (2^{64} - 1)x$$

$$2^6 (2^{x-6} - 1) + 3 \cdot 2 (2^{64} - 1) < y - 70 \leq (2^{64} - 1)x$$

$$\Delta x = 6, \text{ при } x = 6$$

$$\Delta x < 6$$

правая и левая части
неравенства становятся равны
 $(2^{64} - 1)6 \Rightarrow$
неравенство становится
неверным при любых y .

$$y = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \quad \Delta \text{ как функция.} \quad \nearrow$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x - 2^6 = (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^6 (2^{64} - 1)$$

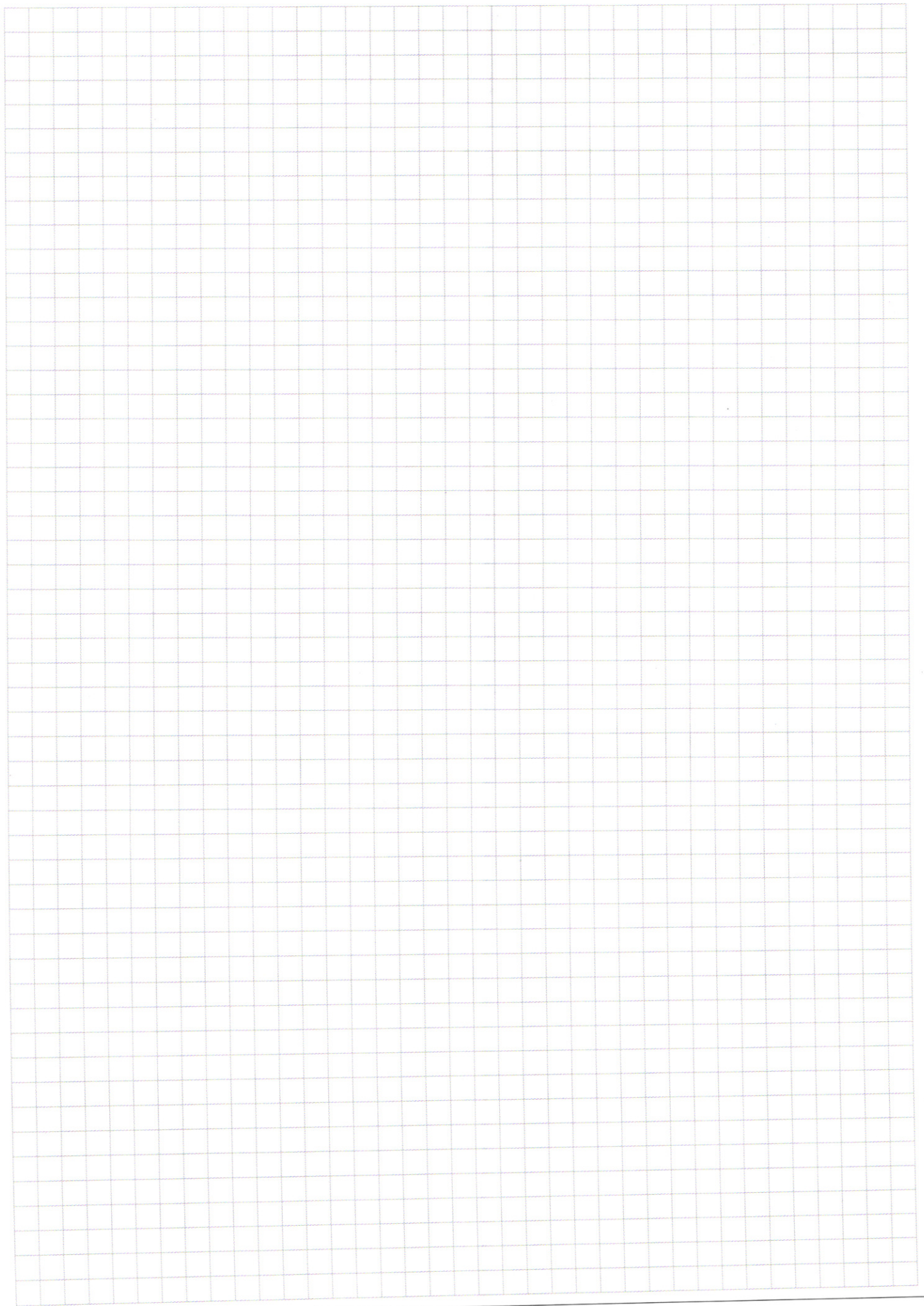
$$2^6 (2^{x-6} - 1) = (x - 6)(2^{64} - 1)$$

$$\text{при } x = 6$$

$$x = 70$$

$$64 \neq 70$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 < y - 70 \leq (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + \underbrace{3 \cdot 2^{65}}_{2^6} - \underbrace{2^6}_{3 \cdot 2^1} < y - 70 \leq \cancel{70} + (2^{64} - 1)x$$

$$2^6 (2^{x-6} - 1) + 3 \cdot 2 (2^{64} - 1) < y - 70 \leq \cancel{70} (2^{64} - 1)x$$

$$\text{1 } x = 6. \quad \underbrace{2^6 (2^{6-6} - 1)}_0 + 6 (2^{64} - 1) < y - 70 \leq (2^{64} - 1) 6.$$

т.к. $x = 5$
правая часть
будет меньше
левой.

$$\Rightarrow x > 6.$$

$$y > 70, \text{ т.к. } y - 70 > 0$$

(почти все члены
пер-ва положительны)

$$y = 0 \Rightarrow x = 3$$

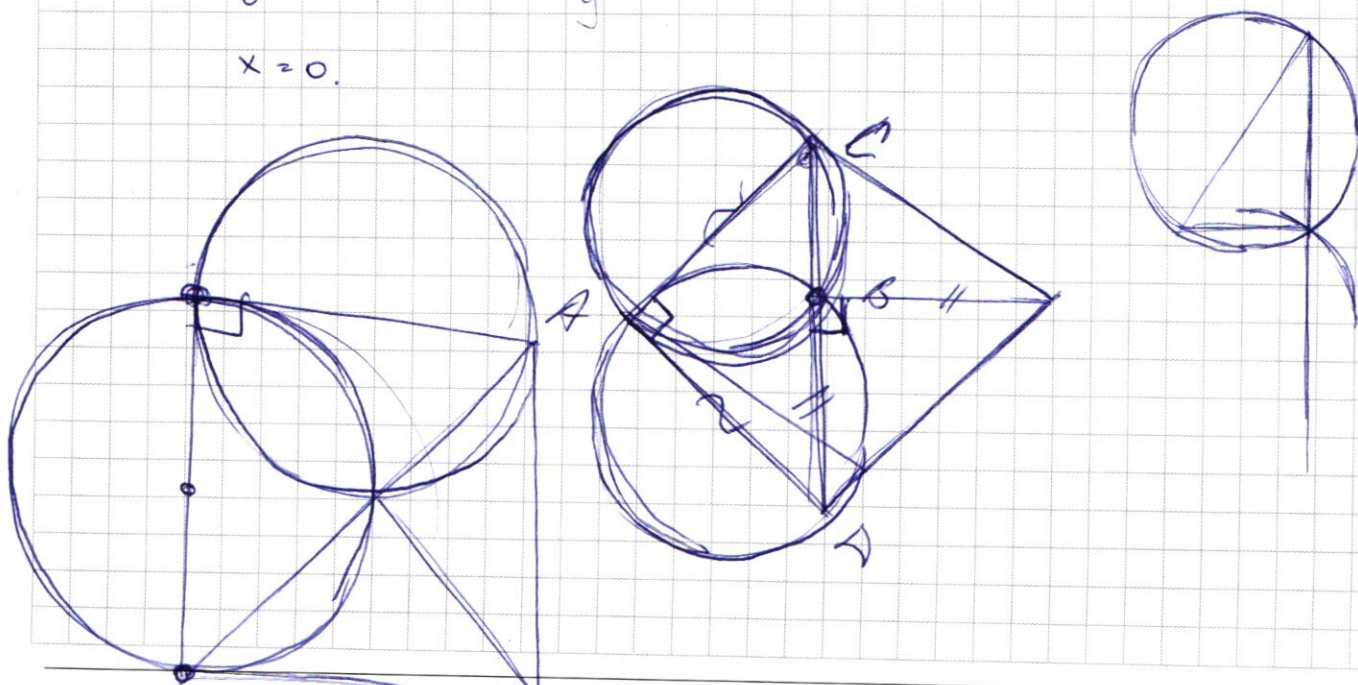
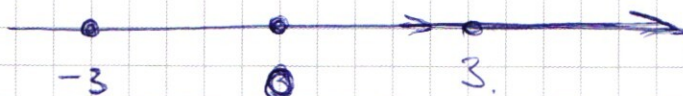
$$|-3-x| + |-3+x| = 6.$$

$$x < 3.$$

$$\cancel{x+3} + 3 = 6 \Rightarrow x = 3.$$

$$6.$$

$$x = 0.$$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(y^2 + x - 3y) = 0$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = y^2 \lg x$$

$$y^5 \lg x = x^5 \lg x \cdot y^2 \lg x$$

$$y^5 \lg x^5 = x^5 \lg x^5$$

$$\cos = \frac{\text{нпрот}}{\text{гипот}}$$

$$\log_a b = a^{\log_a c \cdot \log_a b} = a^{\log_a b \log_a c} = b^{\log_a c}$$

$$y^5 \lg x - x^5 \lg x = xy^2 \lg x = 0$$

$$\begin{matrix} xy > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = xy^2 \lg x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = xy^2 \lg x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 = (xy)^2$$

$$x \neq 0$$

$$y^3 = x^7 \Rightarrow y = x^{7/3}$$

$$y^5 = x^7 \cdot y^2$$

$$\frac{13}{35} = \frac{1}{5} - \frac{33}{35}$$

$$x^7 \cdot y^2 - y^5 = 0$$

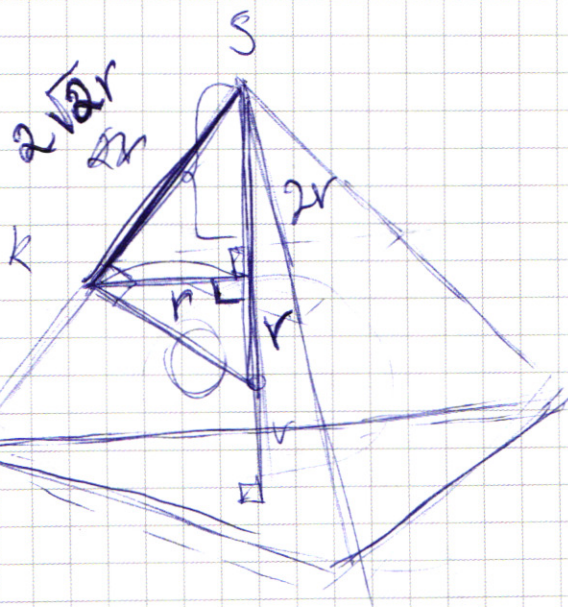
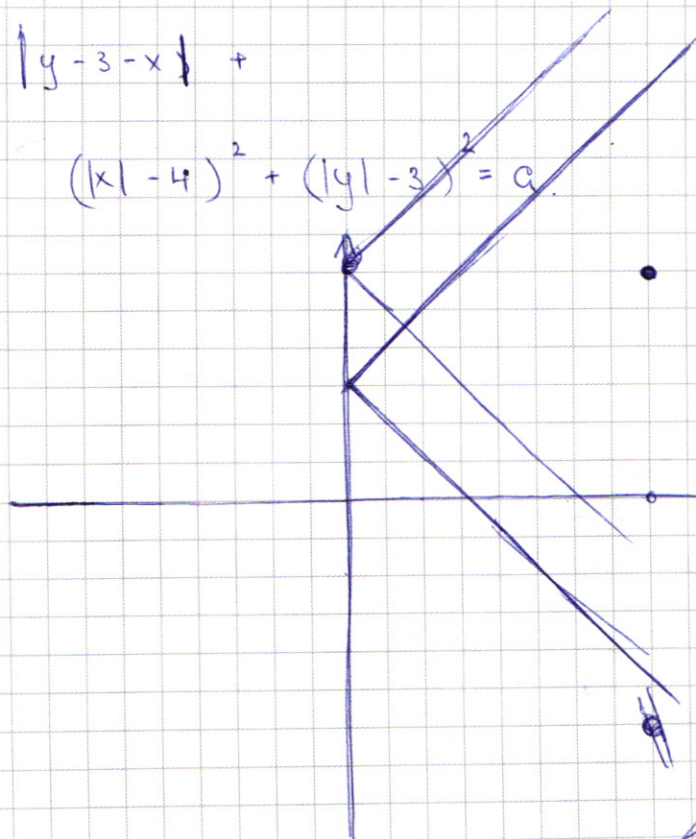
$$y^2 (x^7 - y^3) = 0$$

$$y^2 = 0 \quad ??$$

$$x^2 - 2x \cdot x^{7/3} - 4x - 3x^{14/3} + 12x^{7/3} = 0$$

$$|y-3-x| +$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$$



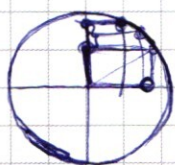
$$\frac{x}{1} = x \text{ и } 1$$

$$x = (x, y)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin \frac{14x}{2} \cdot \sin \frac{8x}{2} = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin -4x \cdot \cos 7x = -2 \sin 4x \cdot \cos 7x$$



$$-2 (\sin 4x) \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(-2 \sin 4x - (\cos 7x + \sin 7x)) (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

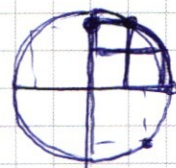
$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = -2 \sin 4x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x$$

$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k$$



$$\begin{array}{r} 99999999 \\ - 99999999 \\ \hline 90000000 \end{array}$$

Всего восемь нулей

$$\begin{array}{l} 3375 : 3 \\ 1125 : 5 \\ 225 : 5 \\ 45 : 5 \\ 9 : 3 \\ 3 : 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \overline{) 5} \\ 10 \\ \underline{12} \\ 10 \\ \underline{20} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

$$(3^3) \cdot (5^3) = 27 \cdot 125$$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 & 5 & \end{array} \quad - 560 \text{ чисел}$$

$$3 \text{ тройки} : C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

$$3 \text{ "5"} : C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

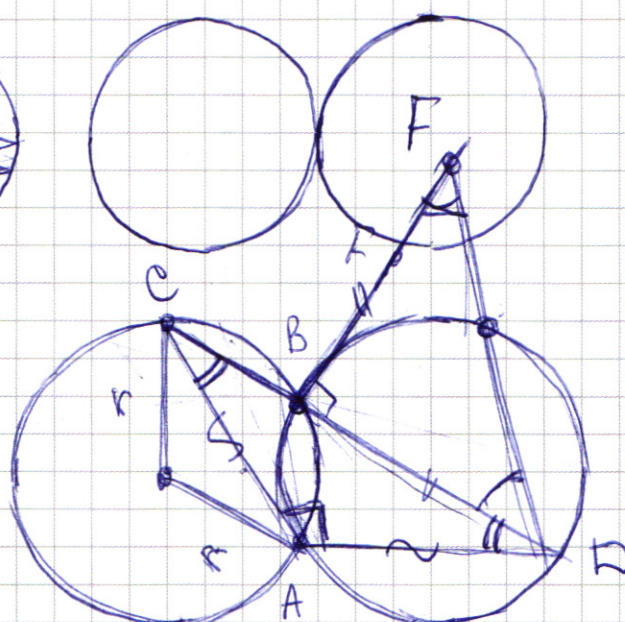
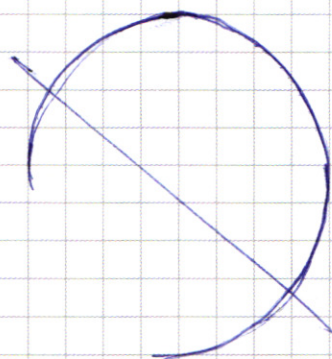
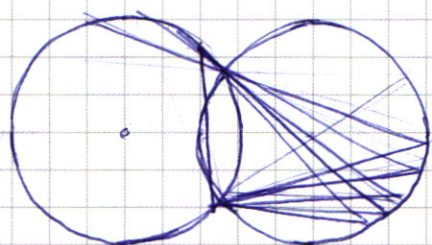
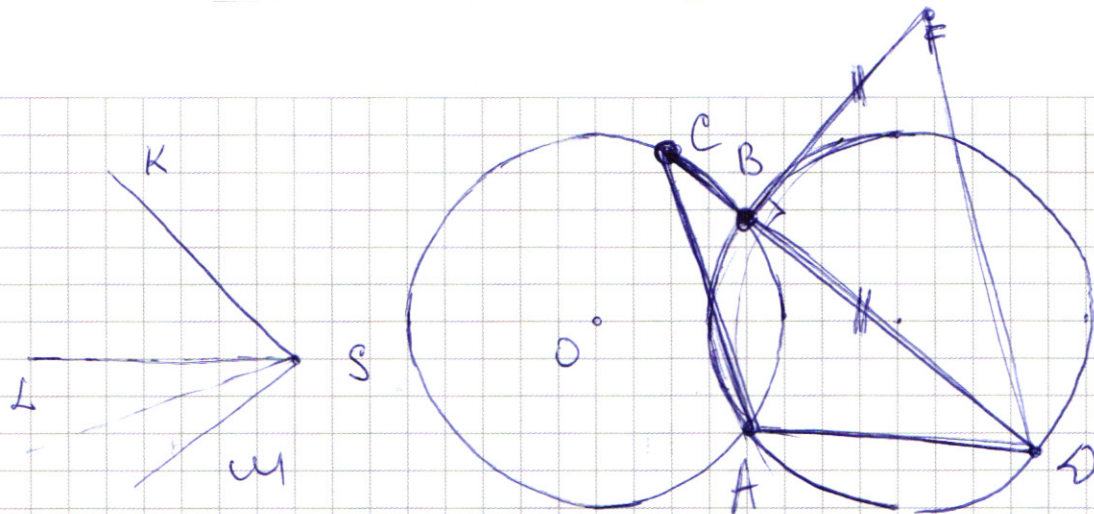
Остаточное запихивать "1"

$$1 \text{ "3"} : C_8^1$$

$$1 \text{ "9"} : C_7^1$$

$$3 \text{ "5"} : C_6^3$$

$$\begin{aligned} S &= C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20 \cdot 56 = 1120 \\ \text{Ответ} &: 1680 \end{aligned}$$



$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin \frac{14x}{2} \cdot \sin \frac{8x}{2}$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^x (1 + 3 \cdot 2^{65-x})$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x$$

$$2^x + x + 3 \cdot 2^{65} < y + x \leq 70 + 2^{64} \cdot x$$

$$2^{65} (2^{x-65} + 3) < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^1 + 2^{64}x - x$$