

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$ - 2 реш.

2-е ур-е задаёт 4 окр-ти с ц. $(4;3)$ $(-4;3)$ $(4;-3)$ $(-4;-3)$ и $r=\sqrt{9}$. Обозначим на рисунке ц. эти окр-тей, как A, A', B, B' соответственно.

Рассмотрим первое ур-е:

или $|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6$.

При $x > 0$; $3+x > 3-x$, тогда рассмотрим 3 случая:

1) $3+x < y$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

2) $3-x < y < 3+x$

$$3+x-y + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

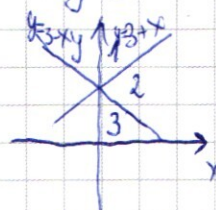
$$x = 3$$

3) $y < 3-x$

$$3+x-y + 3-x-y = 6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$



Изобразим это на рисунке. (положение y от $3-x$ и $3+x$ будем определять отн. прямой $y=3-x$, $y=3+x$).

Аналогично, при $x < 0$, $3-x > 3+x$, также возможны 3 случая:

1) $3-x < y$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

2) $3+x < y < 3-x$

$$y-3+x + 3-x-y = 6$$

$$-2x = 6$$

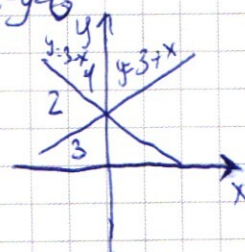
$$x = -3$$

3) $y < 3+x$

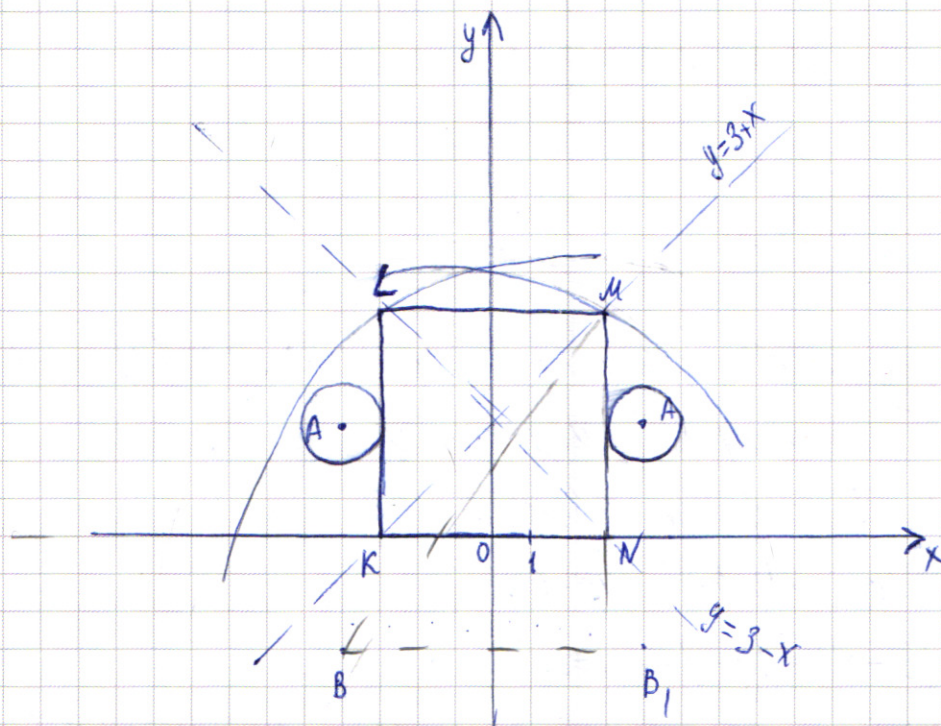
$$3+x-y + 3-x-y = 6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$



Таким образом 1-е ур-е задаёт квадрат с ц. $(0;3)$ и стороной 6. Обозначим его KLN



Окружности будут иметь с квадратом 2 точки пересечения, только если две, симметричные относительно Oy окр-ты, будут касаться сторон квадрата, а две другие не имеют с ним общих точек.

1) Если у окр с ц. в A и A' внешнее касание с квадратом, то ~~окр~~ окр с ц. в B и B_1 не имеют с ним точек $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow a = 1$ - подх.

2) Если у окр с ц. в A и A' внешнее касание с квадратом, то $r = 4 \Rightarrow$ окр-ты с ц. в B и B_1 также имеют с ним общие точки. $\Rightarrow$ не подх.

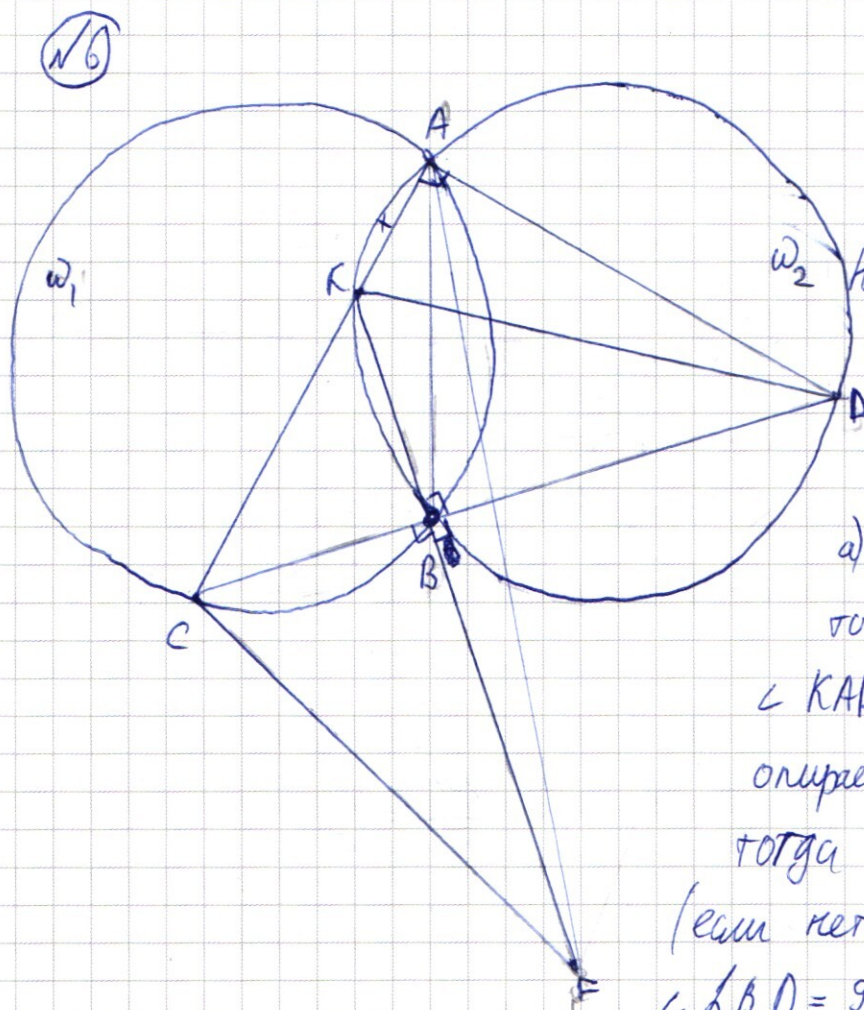
3) Если у окр с ц. в B и B_1 внешнее касание с квадратом (т.е. касание в т. K, N и L, M соответственно), то $r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \Rightarrow$ окр с ц. в A и A' будут пересекать квадрат в т. $K, L, M, N \Rightarrow 4$ т. перес $\Rightarrow$ не подх.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Если у окр с u, v, B, C, V_1 ^{три} касание с квадратом (то касание в M_1 и M_2 т.е. это наиболее удалённое т.), то

$$r = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}, \text{ т.е. окр с ц. в } O \text{ и } A_1 \text{ не будут} \\ \text{иметь общих г. с квадратами} \Rightarrow \text{подх } a = (\sqrt{97})^2 = \underline{\underline{97}}$$

Offber: $\alpha = 1$; ~~$\alpha = 130$~~ $\alpha = 130$



Дано:

$\Gamma = 5$, ω_1, ω_2 - окр-ти
 $BF = BD$.

 $BC = 6$

Найти: а) CF-?

of S_{ACE} - ?

Решение.

а) Пусть K - г. перес. A и ω_2 ,
тогда KD - диаметр ω_2 г.т.к.

↳ КАР-впис, ~~опира~~и прямой $\Rightarrow$ опирается на диаметр.);

тогда $K \in \mathbb{F}_B$ (т.е. ~~KBA~~ ~~был~~

Если нет, то $FV \times \omega_2$ в г. L_1 , причем $\angle LPO = 90^\circ$ и вписанный $\Rightarrow PL$ -

диаметр, но через Γ . В можно провести только один диаметр $\omega_2 \Rightarrow K$ и L - совпадают. Построим AB .

$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CB$ (т.к. вписан.), аналог. $\angle CAK = \angle KAB = \frac{1}{2} \angle KB$ (т.к. впис.) $\Rightarrow$
 хорды стягивающие эти дуги равны (т.к. равны осяр) $\Rightarrow BK = CB$.

Рассмотрим $\triangle CBF$ и $\triangle KBD$.

$$\angle CBF = \angle KBD = 90^\circ \text{ (т.к. диаметр)}$$

$$BF = BD \text{ (по укл.)}$$

$$KB = CB \text{ (по см. выше)}$$

$$\Rightarrow \triangle CBF = \triangle KBD \Rightarrow CF = KD, \text{ и } KD = d = 2r = 10 \Rightarrow \underline{CF = 10}$$

$$\delta) BC = KB = 6 \Rightarrow \text{по т. Пифагора } (\triangle KBD) BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow$$

$$CD = 6 + 8 = 14; \text{ по т. Пифагора } (\triangle CKB) CK = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Пусть } AK = x, \text{ тогда по т. Пифагора } (\triangle KAD): AD = \sqrt{100 - x^2},$$

$$\text{тогда по т. Пифагора } (\triangle CAD):$$

$$CA^2 + AD^2 = CD^2$$

$$(6\sqrt{2} + x)^2 + 100 - x^2 = 196$$

$$72 + 12\sqrt{2}x + x^2 + 100 - x^2 = 196$$

$$12\sqrt{2}x = 24$$

$$x = \sqrt{2}, \text{ тогда } AC = CK + AK = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}, AD = \sqrt{100 - 2} = 7\sqrt{2} \Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\text{Пусть } \angle BCF = \alpha, \text{ тогда } \sin \alpha = \frac{BF}{CF} = 0,8; \cos \alpha = \frac{BC}{CF} = 0,6,$$

$$\text{тогда } \sin \angle ACF = \sin (\angle BCF + \angle ACD) = \sin (45^\circ + \alpha) =$$

$$\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,6 + 0,8) =$$

$$= \frac{1,4}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{1,4}{\sqrt{2}} = 49$$

$$\underline{\text{Ответ: } CF = 10; S_{ACF} = 49.}$$

$$\textcircled{12} \cos 11x - \cos 9x - \sin 11x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2} - \left(2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \sin 7x \sin 4x \overset{-2 \sin 4x \cos 7x}{=} \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\sin 7x - \cos 7x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ 2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) & (2) \end{cases}$$

Решим ур-е (1):

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

Решим 2-е ур-е:

$$2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x)$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x - \cos 7x \quad (: \sqrt{2})$$

$$\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\pi k + 4x = 7x - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - 4x + 2\pi k = 7x - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$

1) Разложим 3375 на множители:

$$\begin{array}{r|l}
 3375 & 3 \\
 1125 & 3 \\
 375 & 3 \\
 125 & 5 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^3$$

Т.о. чтобы произведение цифр восьмизначного числа было равно 3375 возможно 2 случая:

а) число должно содержать 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1

б) число должно содержать 9, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1

Для пункта а возможно составов

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ чисел, а для пункта б:}$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70 \Rightarrow \text{всего } 126 \text{ чисел.}$$

Ответ: 126 чисел.

$$\begin{cases}
 \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg xy & (1) \\
 x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2)
 \end{cases}$$

Разберём 2-е ур-е:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x - y - 2)^2 - 4y^2 + 8y - 4 = 0$$

$$(x - y - 2)^2 - (2y - 2)^2 = 0$$

$$(x - y - 2 - 2y + 2)(x - y - 2 + 2y - 2) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

Теперь разберём 1-е ур-е: $0 \leq x, y \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прологарифмируем обе части по основанию 10:

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = \lg(y^2 \lg xy)$$

$$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = \lg y^2 \lg xy \cdot \lg y$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \cdot \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0.$$

Решим ур-е отн. $\lg y$: $D = 9 \lg^2 x - 4 \lg^2 x = \lg^2 x$

$$\lg x \lg y = \frac{3 \lg x - \lg x}{2} = \frac{\lg x}{2} \Rightarrow 2 \lg y = \lg x \Rightarrow x = y^2$$

$$\lg y = \lg x \Rightarrow x = y.$$

При $x = 3y$:

$$\begin{cases} 3y = y^2 \\ 3y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 - \text{не подх по ООЗ} \\ y = 3, \text{ тогда } x = 9 \end{cases}$$

Ответ: ~~$x = 9, y = 3$~~

$$x = 2, y = 2.$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}, y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

(17)

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\text{т.о. } 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{64} \quad \text{т.к.}$$

у строго больше в л-м пер-ве)

$$2^6 + 4 + 2^{64}x - x > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$$

$$2^6 + 4 + 2^{64} \cdot x > 2^x + 3 \cdot 2^{64} + x. \text{ Т.о. это условие точно}$$

выполняется при $x \in [3; 6]$. В этом интервале.

При $x = 4 - y$

$$\begin{cases} 4 - y = y \\ 4 - y = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \text{ тогда } x = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} - \text{не подх по ООЗ.}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, x = \frac{8 + 1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}.$$

4 целых значения $x \Rightarrow$ возможно для $x=6$

$$\begin{cases} y > 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} \cdot 6 - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \end{cases} \Rightarrow \text{Возможны}$$

и первый вариант верно.

При $x=5$ возможно

$$\begin{cases} y > 2^5 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} \cdot 5 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 2^5 (1 + 3 \cdot 2^{60}) & (1) \\ y \leq 68 + 5(13 + 2^{64}) & (2) \end{cases}$$

И далее необходимо искать кол-во целых чисел путей вычитания из значения $y = \dots$ в 2-м ввр-и) значения $y = \dots$ в 1-м ввр-и. полученное число и будет кол-вом целых y при заданном x . Это нужно проделать для $x=3$; $x=4$; $x=5$.

А затем сложить кол-во ~~в~~ полученных y для каждого из 3-х значений x .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 11x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ -2 \sin 4x = (\cos 7x - \sin 7x) \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Решим 1-е ур-е:

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Решим 2-е ур-е:

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x)$$

$$\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin 4x. \quad (: \sqrt{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \sin 4x$$

$$\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

Order: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}.$$

11) ~~Всё число~~ Разложим 3375 на множители:

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ \hline 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^3$$

Т.о. ~~чтобы~~ произведение цифр восьмизначного числа ~~было равно~~ 3375 ~~возможно~~ в ~~было равно~~

2 случая:

а) число должно содержать 3, 3, 3, 5, 5, 5. и 2 любые цифры (кроме 0, т.е. когда произведение будет равно 0)

б) число должно содержать 9, 3, 5, 5, 5. и 3 любые цифры (аналогично, кроме 0)

Т.о. всего возможных восьмизначных чисел, не содержащих 0 и 9. Чисел, не содержащих три тройки и 3 пятёрки:

$$7^6 \cdot 9^2 \Rightarrow \text{чисел, содержащих эти цифры (т.е. удоб. пункт)} \\ 9^8 - 9^2 \cdot 7^6 = 9^2 (9^6 - 7^6)$$

Аналогично, чисел, не содержащих 9, 3, 5, 5, 5:

б. т. $8^5 \cdot 9^3 \Rightarrow$ чисел, содержащих эти цифры (т.е. удоб. пункт):

$$9^8 - 9^3 \cdot 8^5 = 9^3 (9^5 - 8^5)$$

3.2.2.1

$$\begin{array}{r|l} 4.3.2.1 & 24 \\ \hline 7 & 3 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

1123

3.2.1

12

2.2.1.1

4.3.2.1

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 22 \\ \hline 250 \\ 2500 \\ \hline 2750 \end{array}$$

123

123

123

132

213

312

321

231

1123

1213

2311

1122

2211

1212

2112

1221

2121

1221

2121

1132

1231

3112

1122

2211

1212

2112

1221

2121

1312

2113

3211

1122

2211

1212

2112

1221

2121

1321

22131

3121

✓ черновик

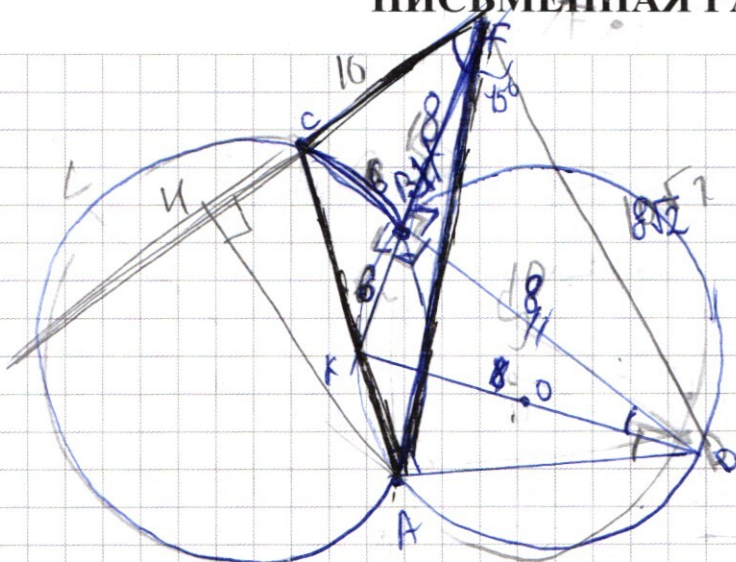
✗ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R = 5$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$\angle KAD = 90^\circ \Rightarrow$$

KD - диаметр

BF прох через т.к.,
т.е. $\angle KBB = 90^\circ$,

прох т.к. CF = 10.

$\angle CBF \neq \angle KBD$

Построим AB

$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CBK$ впис. блжр, следовательно $\angle CAB = \angle KAB$

$$\angle ABK = \frac{1}{2} \angle KBK \Rightarrow KB = CB \Rightarrow \text{т.е. } \Rightarrow$$

$$CF = KA = 2R = d = 10$$

$$BF = BD = 8 \Rightarrow CD = 14$$

$AC \parallel CD$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 45^\circ \cdot \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,8 + 0,6) =$$

$$= \frac{1,4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{тогда } S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1,4}{\sqrt{2}} \cdot 10 = 49$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \quad (2) \end{cases} \quad (y-(3+x)) + |y-(3-x)|$$

при $y >$

2-е ур-е

$$y-(3+x) \quad y-(3-x)$$

Окр. с $R=3$

при y

Квадрат $x \geq 0$

$$y \begin{cases} (4; 3) \\ (-4; -3) \end{cases}$$

При $x \geq 0$

$$3+x \geq 3-x$$

$$3+x < y$$

$$y > 3+x$$

$$y = 3+x$$

$$y = 3-x$$

$$y-3-x + y-3+x = 2y-6=6 \Rightarrow y=6$$

$$3-x < y < 3+x$$

При $x < 0$

$$y-3+x - y + y-3+x = 6$$

$$3-x \geq 3+x$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y > 3-x$$

$$y-3+x + y-3-x = 6$$

$$y < 3-x$$

$$3+x < y < 3-x$$

$$2y = 12$$

$$y = 3$$

$$3+x-y + 3-x-y = 6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

$$y-3+x + 3-x-y =$$

$$y < 3+x$$

$$y = 0$$

т.о. первое ур-е задает квадрат $-2x=6$
 $x=-3$

$$с ц (3; 3); a=6$$

2 реш - 2 т.ка. (возм. только этот случай, т.е. одна окр. не может пересек. б.т. тогда пересек. линии. ей отп. од. 2 т.ка. возм у окр с у-м A, A_1 и B, B_1 ;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x = 2 \sin 4x \cdot \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin -\frac{\pi}{4} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x = -2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$1) \quad \sin 7x - \cos 7x = 0$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{n\pi}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0$$

$$2^{64}x \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

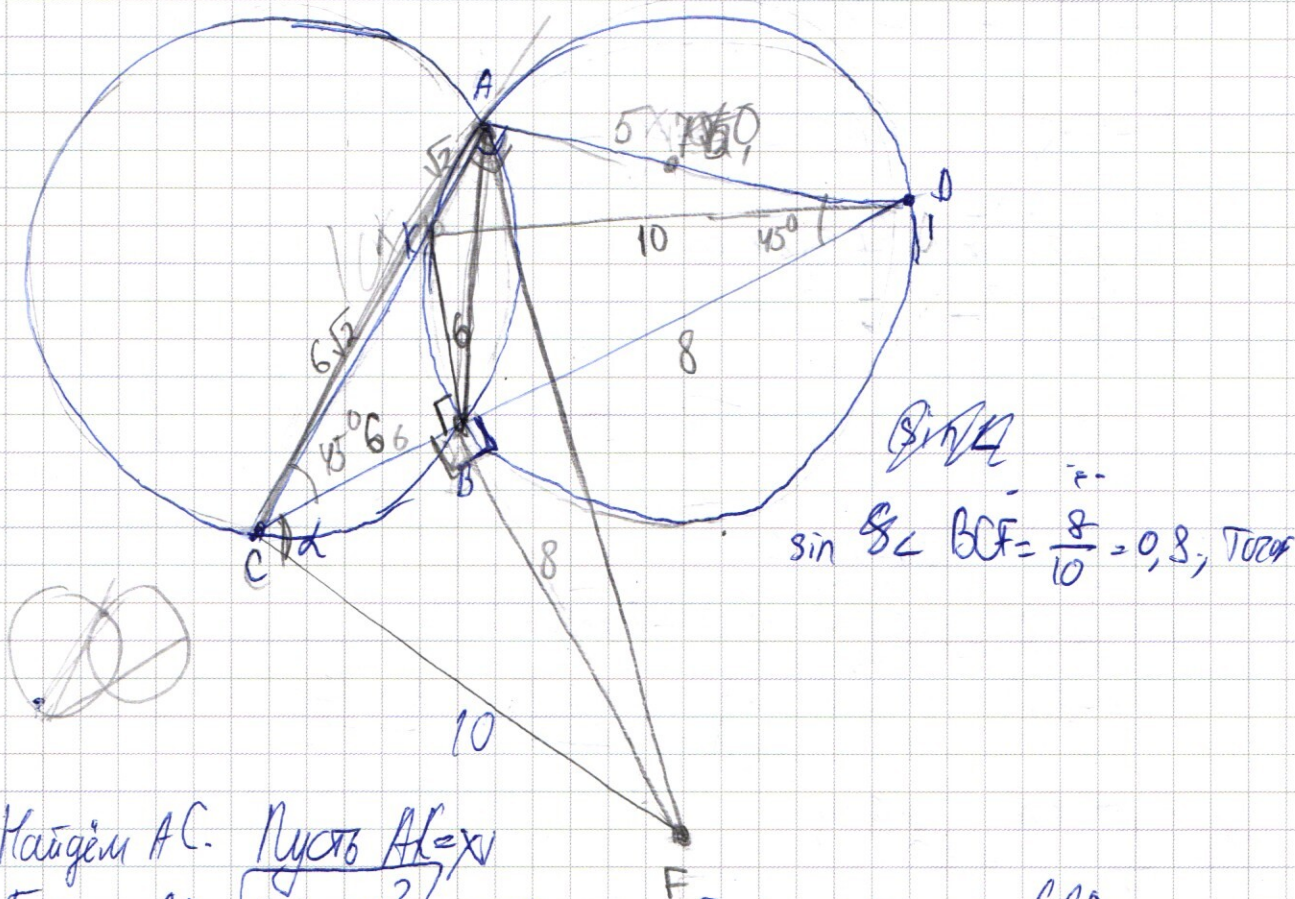
$$-70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y > 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y \leq -70 + (1 - 2^{64})x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Найдём АС. Пусть $A_k = x$

Поэтому $AD = \sqrt{100 - x^2}$; тогда по F. Апполония $\angle CAD$

$$72 + 12\sqrt{2}x + \cancel{x^2} + 100 - \cancel{x^2} = 196$$

$$12\sqrt{2}\lambda = 24$$

$$\sqrt{2}x = 2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad x = \sqrt{2} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}, \text{ то } AD = AC.$$

тогда по $\sqrt{2}$ синусов

$$AB = 98 + 64 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 162 - 16 = 146$$

B.E.g.

$$\begin{cases} \frac{y^5}{x} \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lg x \lg \frac{y^5}{x} &= 2 \lg xy \lg y \\ \lg x (5 \lg y - \lg x) &= 2 \lg x \lg y + 2 \lg y^2 \\ 2 \lg y^2 - 3 \lg x \lg y + \lg x^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 12y \\ (x^2 - 2xy + y^2)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0 \end{aligned}$$

$$(x - y - 2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4x + 4y - 2xy$$

$$(x - y - 2)^2 - 4y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$(x - y - 2)^2 - (y + 2)^2 = 0$$

~~$$x^2 + 12y - 2xy - 4x - 4y^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$$~~

$$(x - y - 2)^2 - (y + 2)^2 = 0$$

$$(x - y - 2 - y - 2)(x - y - 2 + y + 2) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

$$\lg \left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \lg y$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 y + \lg^2 x - 3 \lg x \lg y = 0$$



черновик



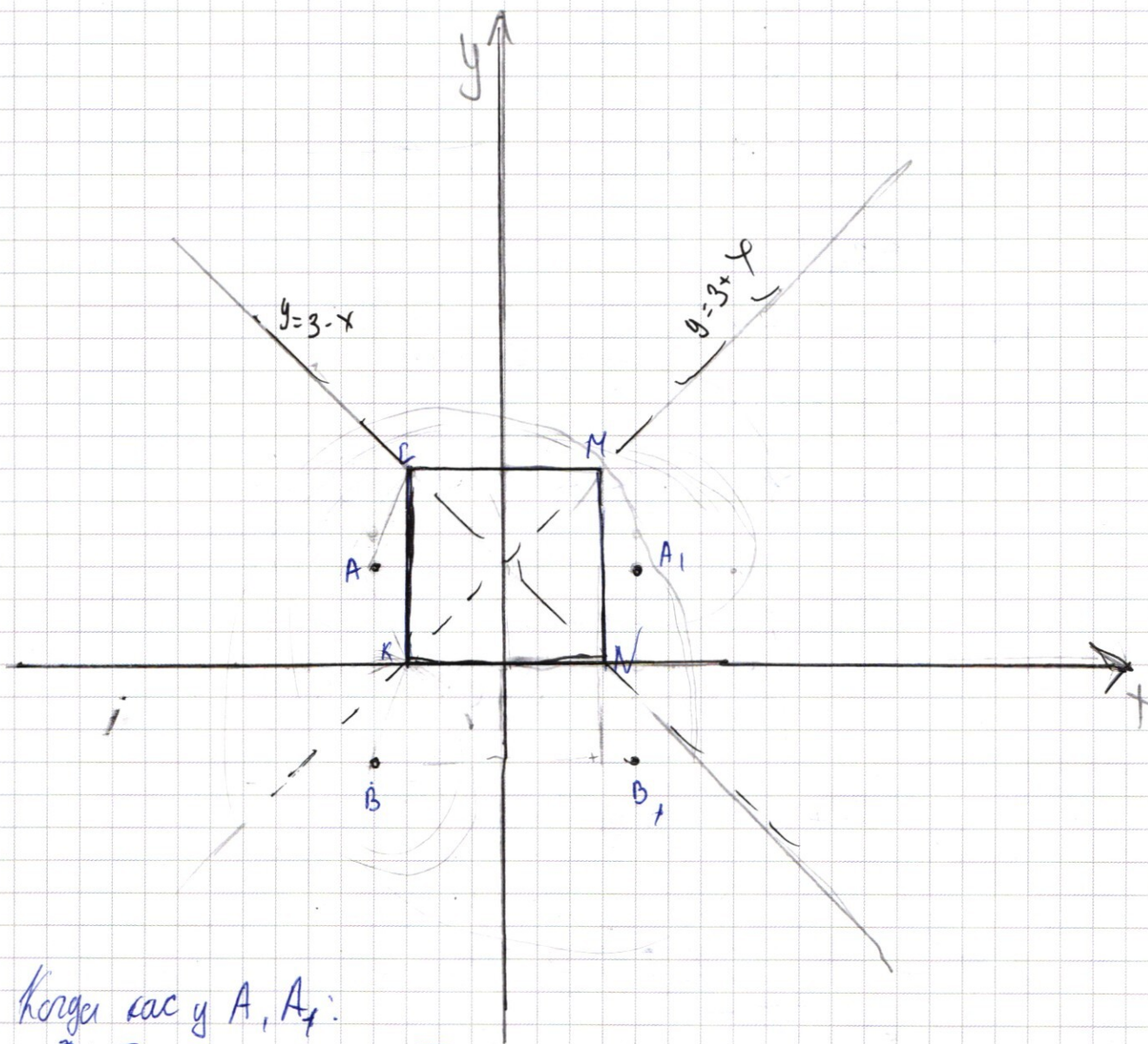
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Когда кас у A, A_1 :

$$\alpha = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 1; \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1.$$

(норм. кас

Когда кас. нитки. нуль с у. в т. В, тогда

г. кас - угол квадрата $\Rightarrow \Gamma = \sqrt{2}$. то тогда окр с A и A_1 пересека. квадрат. в т. L и M. $\Rightarrow$ Чрез $\Rightarrow$

не подх. то если окр с т. B и B, кас. в т. L и M, то окр. квадрат окажется вписан

окр-ти с г. A_1A_2 тогда рад. окр. диаметра
равным $\sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} \Rightarrow a=117$

Ответ: $a=117; a=1$

93 555

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ 7 \overline{) 651} \\ \underline{63} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y < 70 + 2^{64} \cdot x - x \end{cases}$$

$$7(7 \cdot 20 + 10 + 4 + 1 + 70 + 20)$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ 2^6 + 2^{64} \cdot x - x > y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y > x - 2^{64} \cdot x - 2^6 \end{cases}$$

81

$$\begin{array}{r} 69 \\ 3 \overline{) 207} \\ \underline{18} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$0 > \underbrace{2^x}_{\substack{\downarrow \\ 6}} - 2^6 + x + \underbrace{3 \cdot 2^{65}}_{\substack{\downarrow \\ 6}} 2^{64} \cdot x$$

$$\begin{array}{l} 9^5 = 729 \\ 4^3 = 64 \end{array}$$

$$2^6 + x + 2^{64} \cdot x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$729 + 38$$

1 9⁸ - 8. 7. 7. 7. 9. 9. 9. 9. - искомые др. в числ. в 1-м слове

$$9^2(9^6 - 7^6) = 9^2(9^3 - 7^3)(9^3 + 7^3) = 9^6(9^3 - 7^3)$$

$$9^8 - 6 \cdot 7$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим ур-е отсюда $\lg y$, тогда

$$2\lg^2 x - 3\lg x + \lg^2 y = 0$$

$$D = 9\lg^2 x - 4\lg^2 y = 0$$

$$t = \frac{3\lg x - \lg y}{2} = \lg x \Rightarrow \lg y = \lg x \Rightarrow y^2 = x$$

тогда

$$D = 1 + 16 = 17$$

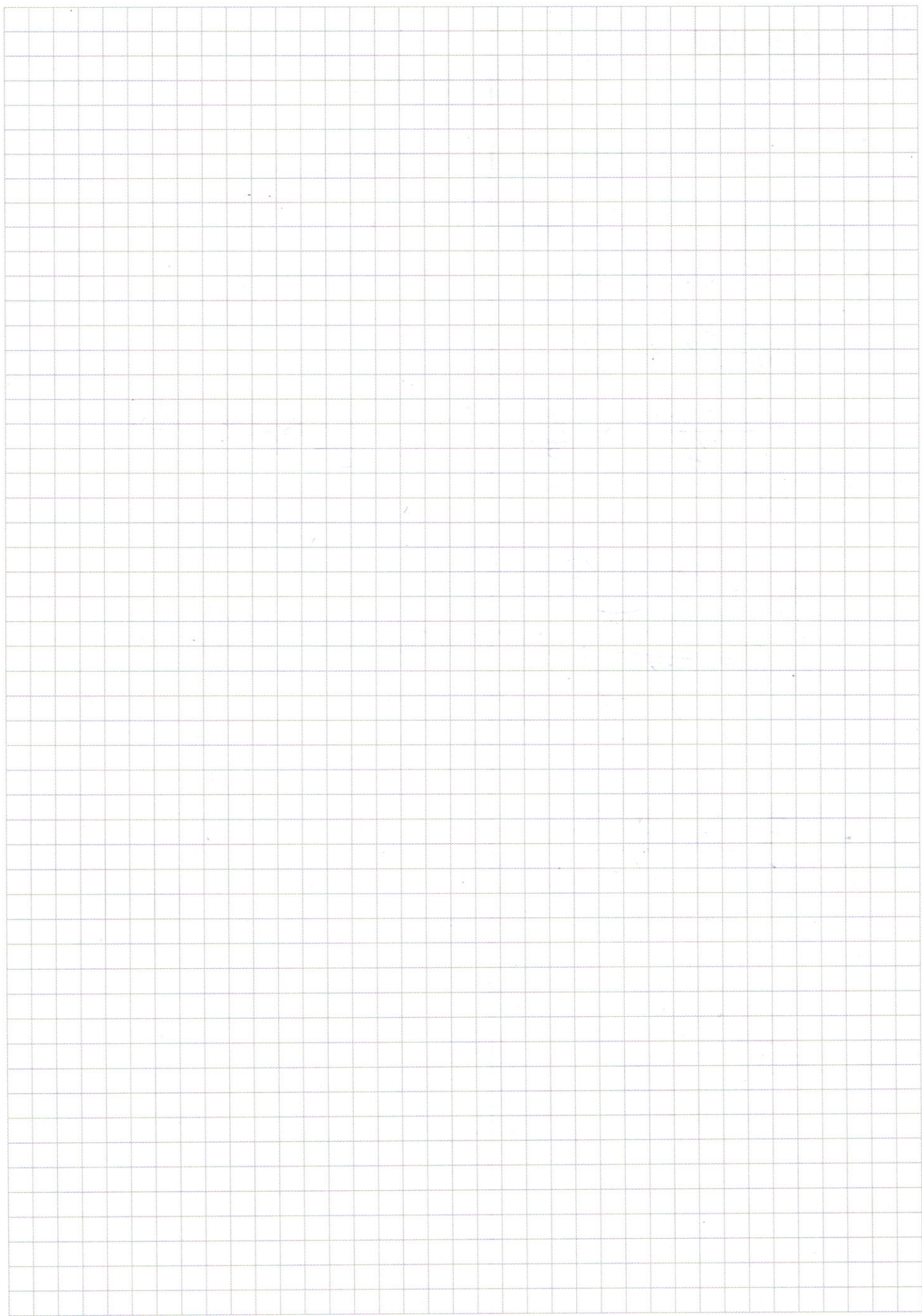
$$y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} - \text{не подходит}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} - \text{подходит}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = 4 - \frac{9 + \sqrt{17}}{2} =$$

$$16 \lg 2 = 2 \lg 16.$$

$$\frac{243}{9} = 27 \lg 9 = 9 \lg 27$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y-2)^2 - (2y-2)^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4y^2 + 8y - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3y^2 + 12y$$

$$(x-y-2-2y+2)(x-y-2+2y-2) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \lg y$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg xy + \lg^2 x = 0$$

при $x = 3y$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg 3y^2 + \lg^2 3y = 0$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg 3 - 6 \lg y + \lg^2 3 + \lg^2 y = 0$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x - 2 \sin 7x \sin 4x - (2 \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 4x - \sin^2 4x)$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = -\sqrt{2} \sin 4x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin 4x$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) = -\sin(-4x)$$

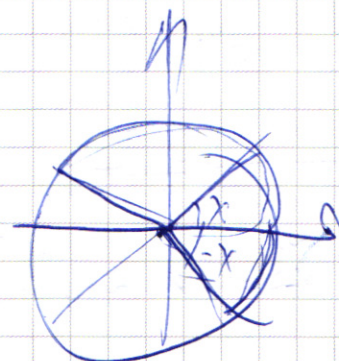
$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = -4x + 2\pi n \\ 7x + \frac{\pi}{4} = \pi - (-4x) + 2\pi n \end{cases}$$

$$11x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$$



$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin x = \sin \pi$$

$$\cos 11x - \cos 3x$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 99 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$4 \leftarrow 8 - 8 - (12 + 24) \quad 28$$

$$\frac{16\pi}{4} = -\frac{12\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$