

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{3375 = 3^4 \cdot 5^2} \quad 3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

~~Есть две конфигурации~~

Восьмизначное число может состоять из двух наборов цифр: 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5 и 1, 1, 1, 3, 5, 5, 5, 9.

Кол-во чисел с первым набором:  $\frac{8!}{2!3!3!} = 560$

Кол-во чисел со вторым набором:  $\frac{8!}{3!3!} = 1120$

Получаем, что общее кол-во чисел равно:  $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

N2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 14x + 2\sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2\sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) + 2\sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 & (1), \\ \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 & (2). \end{cases}$$

(1):  $\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = 0$

$$\sqrt{2} \sin \left( 7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(2) \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x - \sin \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\left[ \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \quad (3) \right.$$

$$\left. \cos \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \quad (4) \right]$$

$$(3): \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(4): \cos \left( \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow \frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}}$$

ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1), \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2). \end{cases}$$

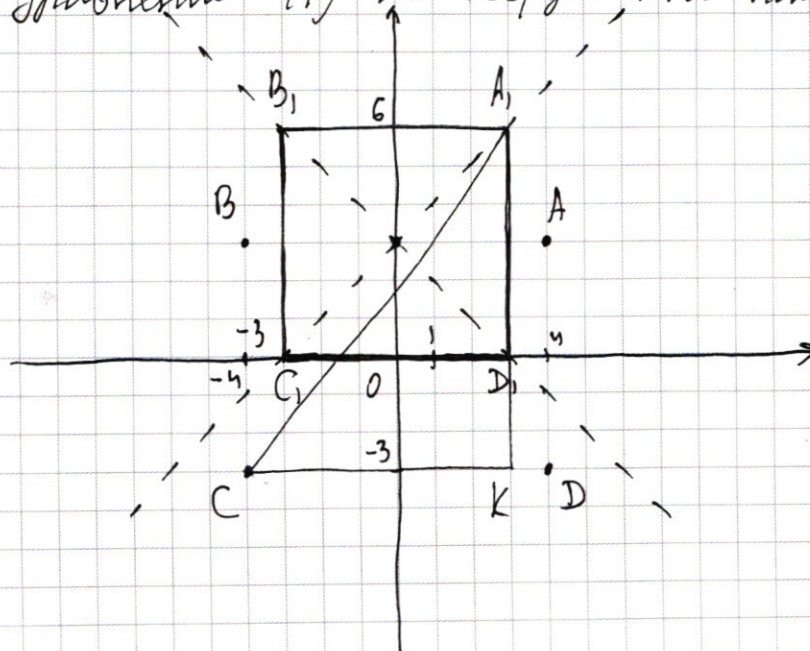
(1):  $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \\ 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq 3-x \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq 3-x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq 3-x \\ x = 3 \end{cases}$$

Изобразим уравнение (1) на координатной плоскости



уравнение (2) задает окружность с центрами в точках:  $A(4;3); B(-4;3); C(-4;-3); D(4;-3)$  и радиусом  $\sqrt{a}$ .

Уравнение (1) задает квадрат с вершинами;

$$A_1(3;6); B_1(-3;6); C_1(-3;0); D_1(3;0)$$

Если окружность с центрами в  $A$  и  $B$  будут касаться  $A_1D_1$  и  $B_1C_1$  соответственно, то система будет иметь только два решения, значит этот вариант подходит.

Расстояние от  $A$  и  $B$  до  $A_1D_1$  и  $B_1C_1$  равно 1, значит

$$\boxed{a=1}$$

Если окружности с центрами в  $C$  и  $D$  проходят через точки  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, то система будет иметь ровно два решения, т.к. окружности с центрами в  $A$  и  $B$  вообще не будут пересекать квадрат. Тогда радиус равен  $CA_1 = DB_1$ .

Рассмотрим  $\triangle CA_1K$ :  $CK=7$ ;  $A_1K=9$ . По п. Пифагора:

$$CA_1 = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}, \text{ тогда } \boxed{a=130}$$

ответ: 1; 130

13.

$$\int \left( \frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \quad (1)$$

$$[x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0] \quad (2)$$

$$(2): x^2 - (2y+4)x - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$$

$$x = \frac{6y}{2} = 3y$$

$$x = \frac{8-2y}{2} = 4-y$$

①

$x = 3y$ , подставляем в уравнение 1):

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y} \cdot y^{2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg 3y}$$

$$\frac{y^{2 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{2 \lg 3y - 2 \lg y}}{3^{\lg 3y}} = 1$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$\Leftrightarrow y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \quad | : 3^{\lg 3}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 3^{\lg y} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=3} \Leftrightarrow \boxed{x=9}$$

Получаем пару  $(9; 3)$ .

②  $x = 4-y$ , подставляем в уравнение 1):

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(4-y) = 4-y & (3) \\ \frac{y}{4-y} = y^2 & (4) \end{cases}$$

$$\textcircled{B}: y(4-y) = (4-y)$$

$$3(4-y) \neq 0 \Rightarrow y = 4$$

Значение  $y = 4$  не удовлетворяет уравнению (4).

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)} \quad | : y^{2\lg(4-y)}$$

$$\frac{y^{3\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} \cdot y^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \quad | : y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} \cdot \lg y^{\frac{4-y}{y}} = y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{\lg \frac{y^2}{4-y}}$$

Замечаем, что  $\boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=2}$

Ответ:  $(1; 3); (2; 2)$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and a geometric diagram on grid paper.

**Top left calculations:**

$$1254^2 5678$$

$$12 \times 17 \frac{1}{2}$$

$$20.58$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\frac{2}{2} = 4^1$$

**Right side calculations:**

$$S = pr.$$

$$4 - 5 = 9$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$\frac{2^{3 \lg 2}}{2^{\lg 2}} = 2^{2 \lg 2}$$

$$2^{2 \lg 2} = 2^{\lg 4}$$

**Central diagram:**

**Left side calculations:**

$$\lg 3 = 3$$

$$2 \lg 3 = 2 \lg 3$$

$$\lg 3 = a$$

$$10 = 3$$

$$2a$$

$$10 = 9$$

$$2a < 1 \quad a < \frac{1}{2}$$

**Bottom calculations:**

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3} = y^{2 \lg 3^2}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3}}{3^{\lg 3}} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{2 \lg 3}$$

$$\frac{y^{2 \lg 3 - 2 \lg 3}}{3^{\lg 3}} = 1$$

$$\frac{y^{2 \lg 3}}{3^{\lg 3}} = y^{2 \lg 3}$$

$$\frac{y^{2 \lg 3}}{3^{\lg 3}} = 3^{\lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3}$$

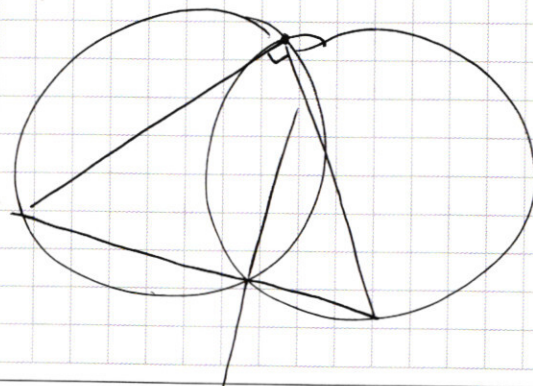
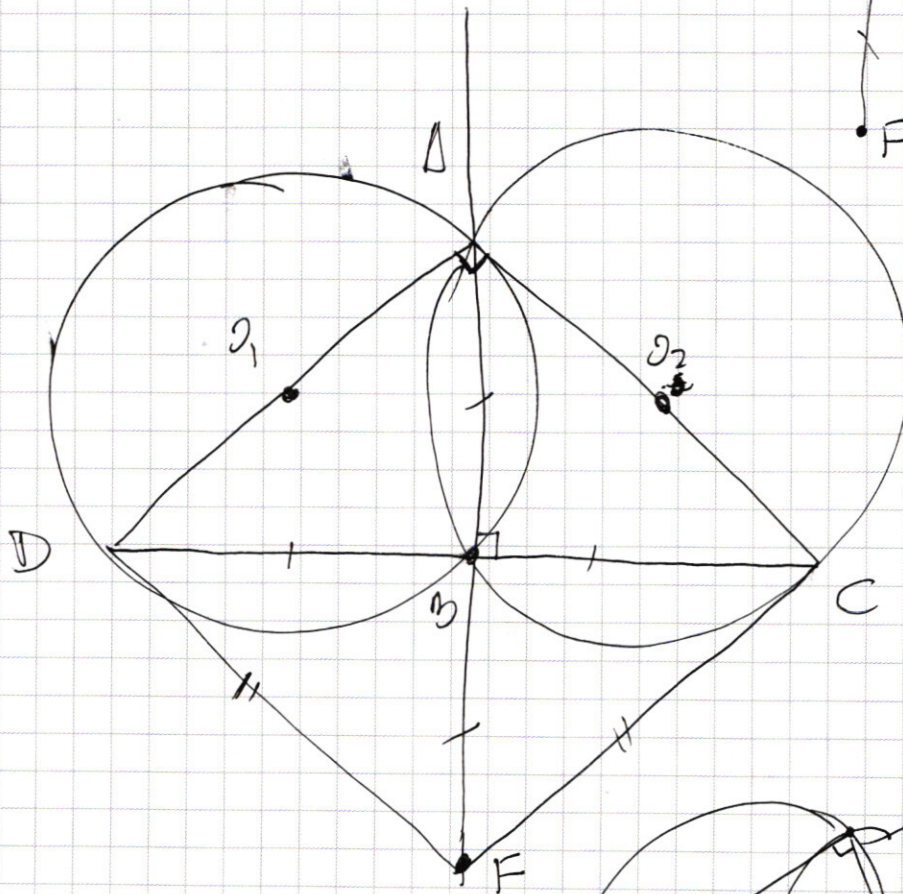
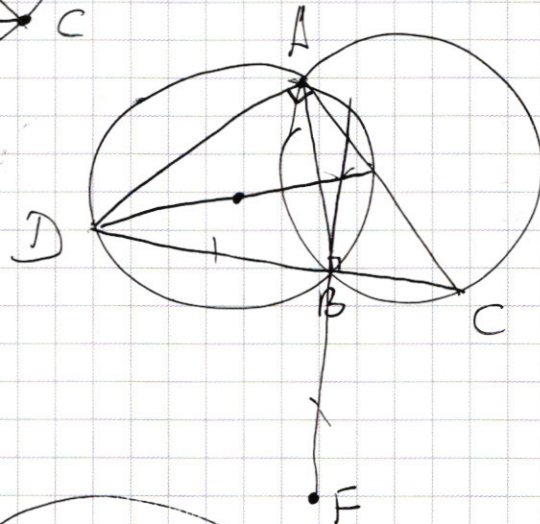
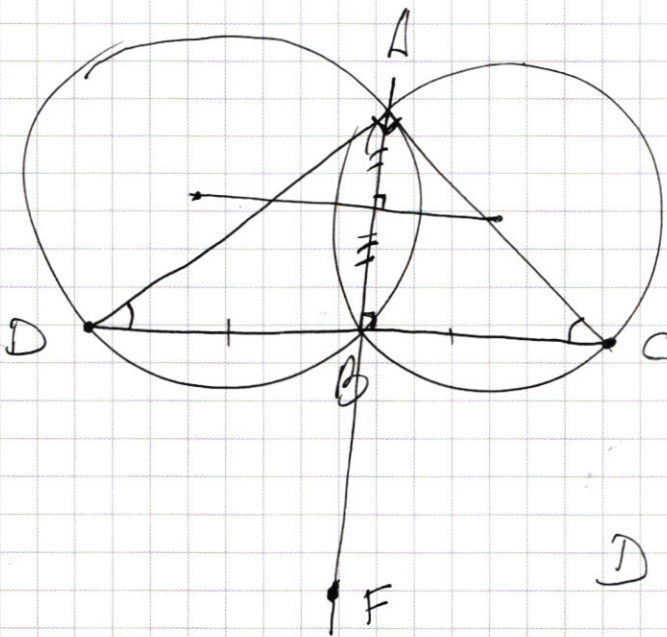
$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

№ 6

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$CF? \quad CF=10.$$

$$R=5$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a.$$

НС

$$y-3-x \geq 0 \quad y \geq 3+x$$

$$y-3-x \leq 0 \quad y \leq 3-x$$

$$y-3-x=0$$

$$y=3+x$$

$$y-3-x \leq 0$$

$$y \leq 3-x$$

(1)  $\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \geq 3-x \end{cases}$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12 \quad y = 6$$

(2)  $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$2x = -6 \quad x = -3$$

(3)  $\begin{cases} y \leq 3+x \\ y \leq 3-x \end{cases}$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$-2y = 0$$

(4)  $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$

$$x-x+y-3+x = 6$$

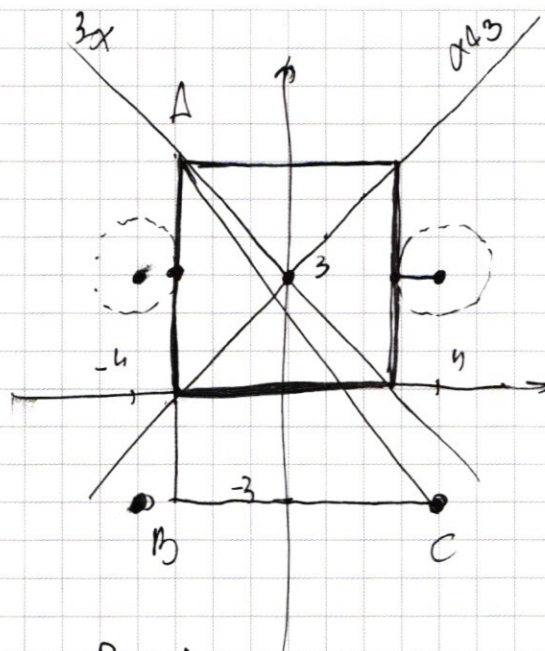
$$2x = 6 \quad x = 3$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

$$|x| = 4$$

$$|y| \leq 3$$

$$(4; 3); (-4; 3); (-4; -3); (4; -3)$$



$$R_1 = 1$$

$$R = \sqrt{a}$$

$$a = 1$$

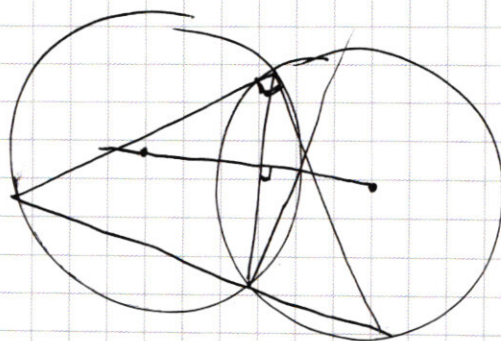
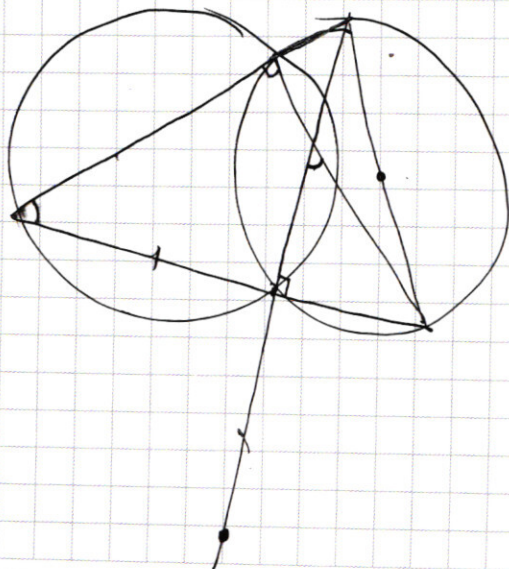
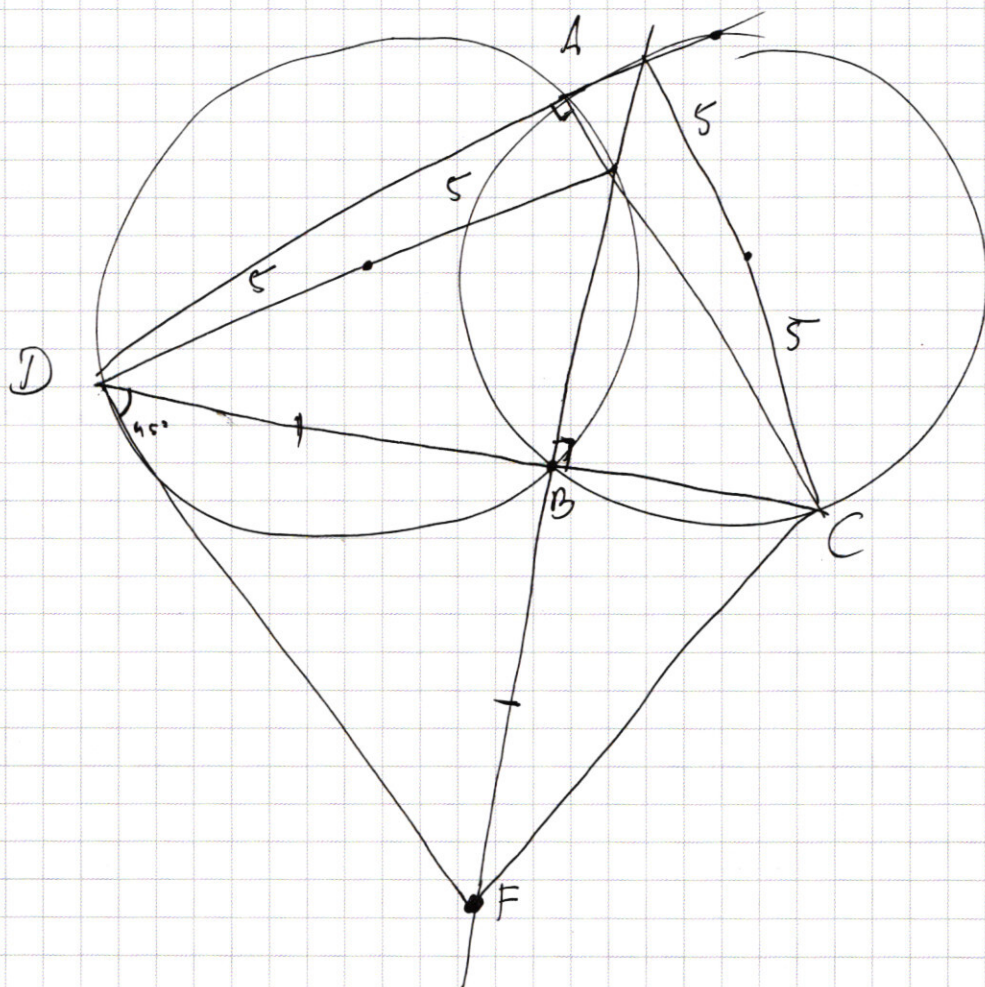
$$BC = 7$$

$$AB = 9$$

$$AC = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$$

$$a \leq R^2 \Rightarrow a = 130$$

$$R_1 = R_2 = 5.$$



☐ черновик      ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3375 = 3^4 \cdot 5^2$

$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow$   
 $3375 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \rightarrow$   
 $3375 = 9 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow$

$123 \rightarrow 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$   
 $223 \rightarrow \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$   
 $1122 \rightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$

$8! = 4! \cdot 2! + \frac{8!}{2! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1}$

$= 15 \cdot 56 (25) = 840 \cdot 25 = 21000$

$87 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 840$

$333555$   
 $93555$

$12345678$   
 $12345678$   
 $12345678$

$10 \cdot 56$   
 $20 \cdot 56 = 1120$

$3375$

№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x)$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x - \sin 11x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) + \sin 3x = 0$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \sin \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 11x \right) + \sqrt{2} \sin \left( 3x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 11x \right) + \sin \left( 3x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \cos 14x$$

$$-11x + 3x = -8x$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - 11x - 3x + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 14x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$2 \sin(-4x) \cdot \cos \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 7x \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - 7x \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 7x = 2 \cos^2 7x - 1$$

$$2 \cos^2 7x - 1 + \sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 7x (\sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x) -$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 7x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\cos 7x (\cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x) - \sin 7x (\sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 11x + \sin 3x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{3^{\lg 3}} \left( \frac{y^2}{3} \right)^{\lg 3} = 1.$$

$$\left( \frac{y^2}{3} \right)^{\lg 3} = 3^{\lg y}.$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 y}$$

$$\lg 3.$$

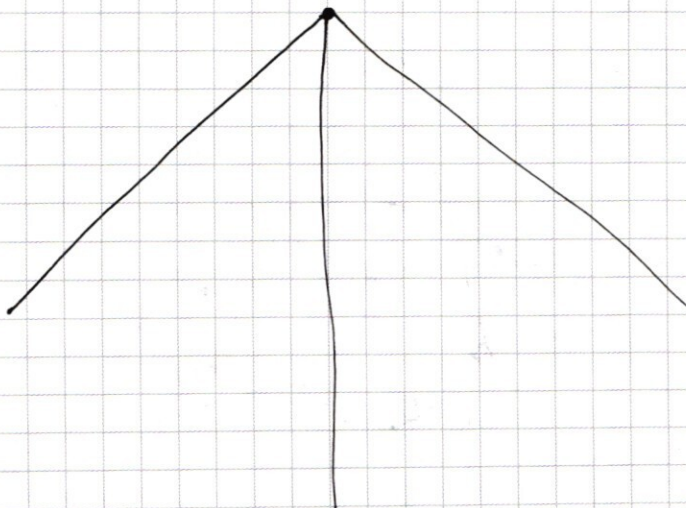
$$\lg 3 \approx 0.5 \Rightarrow 10^{0.5} \approx 3$$

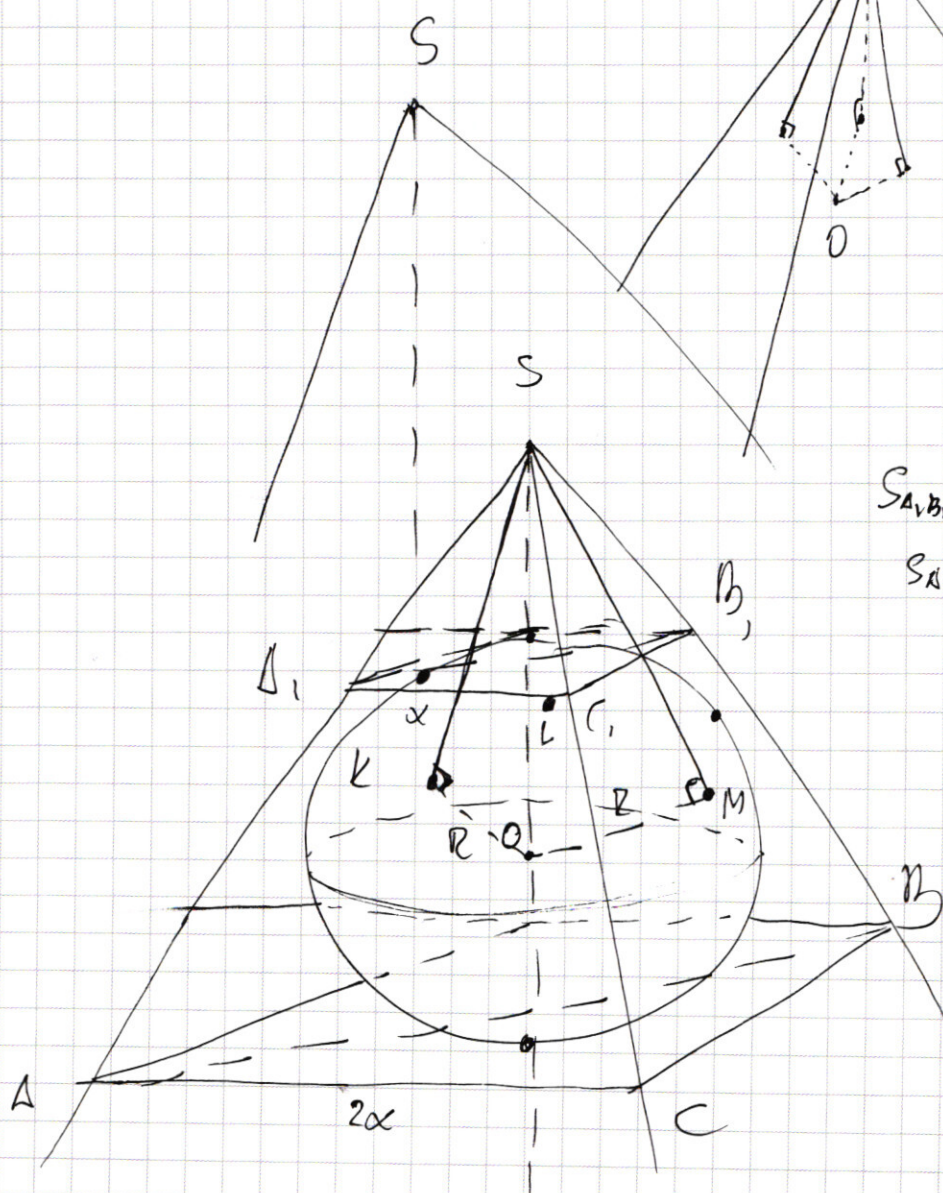
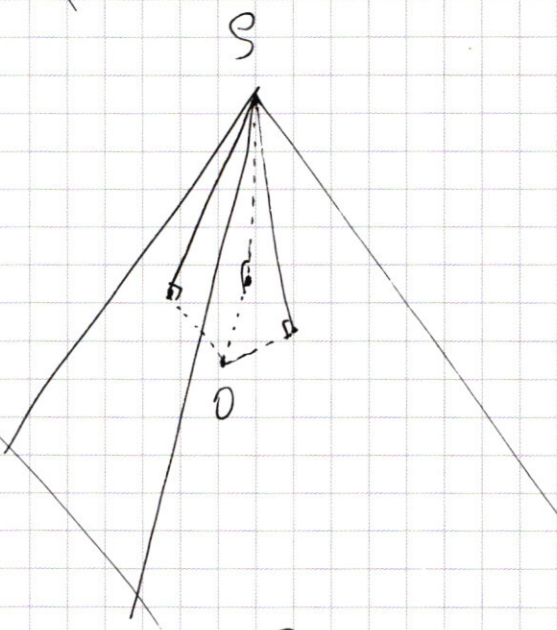
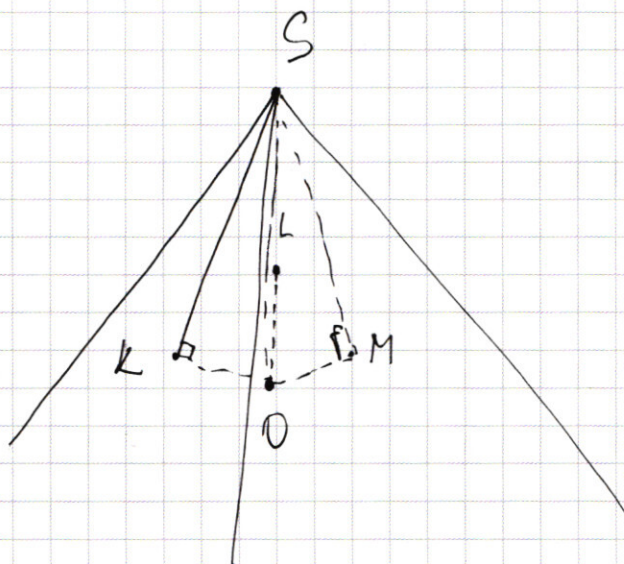
$$3^a = 10^{a^2}.$$

$$\lg_2 4 = 2 \quad 4 = 2^2 = 16.$$

$$\lg_3 27.$$

$$\lg_2 32 = 5$$





$$S_{A_1 B_1 C_1} = 1$$

$$S_{KLM} \leq 1$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$-2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 & (1) \\ \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \quad (2)$$

$$(1): \sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k; \quad 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(2): \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin 4x = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k \\ \frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi k$$

$$x = \frac{2\pi}{3 \cdot 8} - \frac{2\pi k}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} - \pi k$$

$$\frac{11x}{2} = -\frac{3\pi}{8} - \pi k$$

$$x = \frac{-6\pi}{88} - \frac{2\pi k}{11}$$

$$\boxed{x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{11x}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 - (4y^2 - 12y)$$

$$(x+y)^2 - (4y^2 - 12y)$$

$$x^2 - (2y+4)x - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$$

$$x = \frac{2y+4+4y-4}{2}$$

$$x = \frac{6y}{2} = 3y = x$$

$$x = \frac{2y+4-4y+4}{2} = \frac{8-2y}{2} = 4-y = x$$

$$x = 3y: \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2(\lg 3 + 2 \lg y)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{\lg 3y^2} \cdot y^{\lg 3y^2} = y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$2(\lg 3 + \lg y) = 2 \lg 3y^2$$

$$\lg y = a \Rightarrow 10^a = y \quad (10^a)^a = 10^{a^2}$$

$$\left(\frac{y^3}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg y} = y^{\lg y} \cdot y^{\lg y}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3} = 1$$