МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$ Нам надо представить число 3375 в виде произведения 8 натуральных чисел от 1 до 9 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Попробуем преобразовать множители числа 3375. Получим только два варианта:

1) $3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$

2) $3375 = 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

1) Нам надо выбрать три места для троек и три места из оставшихся для пятёрок, места для единиц определяются однозначно $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_1 = C_8^3 \cdot C_5^3$, где S_1 - кол-во восьмизначных чисел, состоящих из трёх 1, трёх 3 и трёх 5.

2) Нам надо выбрать три места для 5 и три места из оставшихся для ~~единиц~~ 1 и одно место из оставшихся для 3, место для 9 однозначно определится $\Rightarrow$

$S_2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$, где S_2 - аналогично S_1

Если S - кол-во всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, то $S = S_1 + S_2 = C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 =$

$= C_8^3 \cdot C_5^3 (1 + 2) = 3 \cdot 56 \cdot 10 = 1680$

Ответ: 1680

3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Рассмотрим (2):

$(x^2 - 2xy - 3y^2) - (4x - 12y) = 0$

$(x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = 0$

$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} x - 3y = 0 & (\mathrm{I}) \\ x + y - 4 = 0 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая:

I) $x = 3y$; Подставим $x = 3y$ в (1):

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$\frac{y^{4\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3y^2} \quad \Big| \cdot \frac{3^{\lg 3y}}{y^{2\lg 3y^2}}$$ т.к. $3^a \neq 0$ $y^b \neq 0$, т.к. $y \neq 0$.

$$y^{4\lg 3y - 2\lg 3y^2} = 3^{\lg 3y}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ 4\lg 3y - 2\lg 3y^2 = \lg 3y \end{cases} \\ \begin{cases} 4\lg 3y - 2\lg 3y^2 = \lg 3y \\ \lg 3y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ 8\lg 3 - 2\lg 3 - 4\lg 3 = 2\lg 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ -2\lg\frac{1}{3} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$ $\Rightarrow \varnothing$, т.к. $-2\lg\frac{1}{3} \neq 0$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 (продолжение)

II) $x = 4 - y$; Подставим $x = 4-y$ в (1):

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(y(4-y))} \Bigg| \cdot \frac{(4-y)^{\lg(4-y)}}{y^{2\lg(4y-y^2)}}, \text{ т.к.}$$

$4 - y = x \neq 0$
$\Rightarrow (4-y)^{\lg(4-y)} \neq 0$
$y^a \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^{5\lg(4-y) - 2\lg(y(4-y))} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 4-y \\ 5\lg(4-y) - 2\lg(y(4-y)) = \lg(4-y) \end{cases} \\ \begin{cases} 5\lg(4-y) - 2\lg(y(4-y)) = \lg(4-y) \\ \lg(4-y) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ 5\lg 2 - 2\lg 4 = \lg 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 \\ 5\lg 1 - 2\lg 3 = \lg 1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ \lg 2 = \lg 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3 \\ -2\lg 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing, \text{ т.к. } -2\lg 3 \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Общее решение: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$ Ответ: $(2;2)$; $(9;3)$

5.

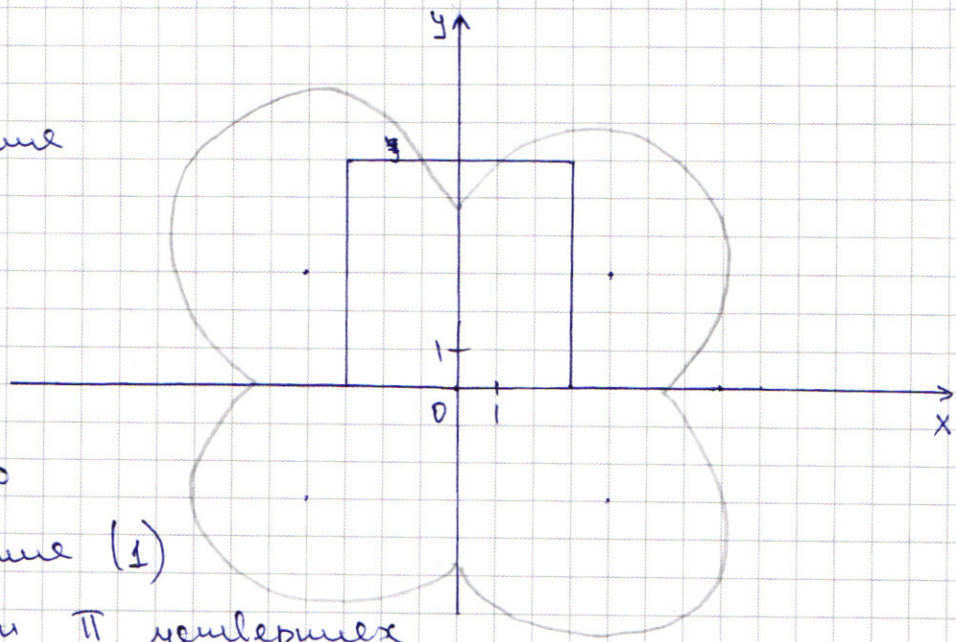
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Построим график уравнение (1):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \\ x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Графиком же уравнения (2) будет окружность с центром в точке (4; 3) с радиусом $\sqrt{a}$, ограниченная I четвертью, а после отражённая симметрично ~~на~~ II относительно Oy и Ox на четверти II и IV соответственно, а после, отраженная симметрично от Ox из II четверти в III.

График уравнения (1) – квадрат



Заметим, что график уравнения (1) лежит в I и II четвертях, значит рассмотрим только эти четверти: график уравнения (1) – четыре →

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 (продолжение)

Если существует решение $(x_0; y_0)$, то будет и решение $(-x_0; y_0)$.

1) Рассмотрим случай $x_0 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y-3| + |y-3| = 6 \\ (|y|-3)^2 = a-16 \end{cases} \quad \begin{cases} 2|y-3| = 6 \\ (|y|-3)^2 = a-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y-3| = 3 \\ (|y|-3)^2 = a-16 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 3 \\ y = 6 \\ a = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 3 \\ y = 0 \\ a = 25 \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right. \\ a = 25 \end{cases}$$

Других решений нет $\Rightarrow$ при $a = 25$ система имеет ровно 2 решения.

2) $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ чтобы всего было ровно 2 решения, должно быть только одно решение в I четверти. (не включая ось Oy). Если одно из решений лежит на прямой $x = 3$, то второе решение, в силу симметрии тоже лежит на прямой $x = 3 \Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ окружность не проходит через часть графика, лежащей на прямой $x = 3$. Однако если окружность пересекает часть

5 (продолжение)

графика, лежащую на прямой $y=6$, тогда окружность не имеет общих точек с отрезком, лежащим на прямой $x=3$, за исключением точки $(3;6)$, а так же окружность не пересекает график повторно $\Rightarrow$ нам подходит все такие a, что окружность пересекает в I четверти отрезок, лежащий на прямой $y=6$. От a зависит только радиус, а радиус окружности проходящей через точку $(3;6)$ равен расстоянию между точками $(4;3)$ и $(3;6)$, то есть $\sqrt{10}$, по мере увеличения радиуса, точка пересечения будет двигаться в направлении, противоположном положительному направлению Ox, а радиус окружности, пересекающей график в точке $(0;6)$ мы знаем $\Rightarrow$ все a из промежутка $(\sqrt{10}; 25)$ нам подходят, $a=25$ нам также подходит $\Rightarrow$ $a \in (\sqrt{10}; 25]$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\cancel{(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x + \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x}$$

$$\cancel{-2\sin 4x \sin 7x + 2\sin(}$$

2.

$$(\cos 11x - \cos 3x) + (\sin 3x - \sin 11x) = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$-2\sin\frac{11x-3x}{2}\cdot\sin\frac{11x+3x}{2} + 2\cdot\sin\frac{3x-11x}{2}\cdot\cos\frac{3x+11x}{2} = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) \quad \Big|:(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-\sqrt{2}\sin 4x = \cos 7x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$$

$$-\sqrt{2}\sin 4x = -2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{2} + 7x}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$-\sqrt{2}\sin 4x = -2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 4x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\sin\frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \Big|:2$$

$$-\sin\left(1{,}5x - \frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(5{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(1{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(5{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 1{,}5x - \frac{\pi}{8} = \pi k \;;\; k \in Z \\ 5{,}5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \;;\; k \in Z \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1{,}5x = \frac{\pi}{8} + \pi k \;;\; k \in Z \\ 5{,}5x = \frac{5\pi}{8} + \pi k \;;\; k \in Z \end{array}\right.$$

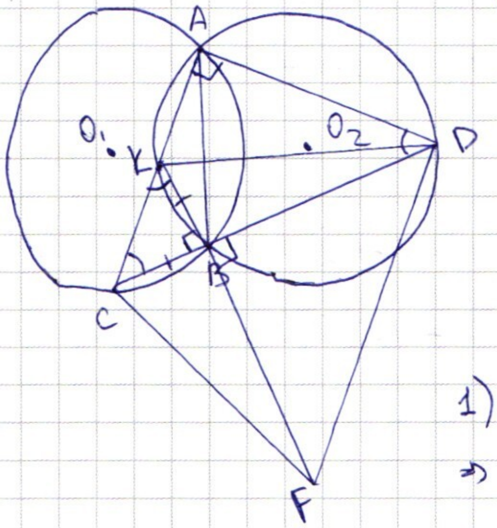
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \;;\; k \in Z \\ x = \frac{10\pi}{88} + \frac{2\pi k}{11} \;;\; k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3};\ \frac{10\pi}{88} + \frac{2\pi k}{11}.\ ;k \in Z$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



Дано: $R = R_1 = R_2 = 5$; $\angle CAD = 90^\circ$;

$BF \perp CD$; $BF = BD$;

а) Н-ти CF

б) $BC = 6$; Н-ти S_{ACF}

Решение:

1) Окружности равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AB_1 = \smile AB_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle BDA$ (опираются на равные дуги) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$, то $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AB_1 = \smile AB_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle AO_2B = \angle AO_1B = 90^\circ$;

~~$O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = 5 \Rightarrow O_1AO_2B$ – квадрат $\Rightarrow$~~

$\Rightarrow \triangle AO_2B$ – прямоугольный равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = O_2A \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

2) По теореме о секущих $CB \cdot CD = CK \cdot CA$;

$\triangle ACD$ – прямоугольный равноб. $\Rightarrow CD = AC\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = CB \cdot \sqrt{2}$, ~~тогда~~

3) По теореме косинусов для $\triangle BCK$:

$BK^2 = BC^2 + CK^2 - 2BC \cdot CK \cdot \cos\angle BCK$

$BK^2 = BC^2 + 2BC^2 - 2BC \cdot \sqrt{2} BC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = BC^2 \Rightarrow BK = BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCK$ – равнобедренный; $\angle BCK = 45^\circ \Rightarrow \triangle BCK$ – прямоуг. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точки F; B; K лежат на одной прямой.

4) По теореме косинусов для $\triangle AO_1C$:

$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \angle AO_1C = 2R^2(1 - \cos \angle AO_1C)$

$\angle AO_1B = 90^\circ$ (по доказ.) $\Rightarrow$ $\angle CO_1B = \angle AO_1C - 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \angle AO_1C = -\sin \angle AO_1C$

По теореме косинусов для $\triangle CO_1B$:

$CB^2 = 2R^2 + 2R^2 \sin \angle AO_1C = 2R^2(1 + \sin \angle AO_1C)$

Пусть $\angle AO_1C = \alpha$, тогда по теореме косинусов для $\triangle CAB$:

$$(5\sqrt{2})^2 = \cancel{2R^2}\ 2\cdot 25(1 + \sin\alpha + 1 - \cos\alpha) - 2\cdot 2\cdot 25\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$50 = 100 + 50(\sin\alpha - \cos\alpha) - 50\sqrt{2}$$

$$\frac{50\sqrt{2} - 50}{50} = \sin\alpha - \cos\alpha$$

$$\sqrt{2} - 1 = \sin\alpha - \cos\alpha$$

$$\sqrt{2} - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\alpha$$

$$\sqrt{2} - 1 = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

5) $\triangle ACD \sim \triangle BDF \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DF} = \frac{BD + BC}{DF}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{2} - 4x + \frac{\pi}{4}$

$-2\cos\frac{14x}{2}\sin$

$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ $\quad \cos\frac{3\pi}{4} =$

$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$-2\cos\frac{14x}{2}\sin\frac{8x - \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 14x.$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

$-2\cos\frac{14x}{2}$

$-2\cos 7x\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right) = \cos 14x.$

$-2\cos 7x\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right) - \cos^2 7x + \sin^2 7x = 0.$

$D = \cancel{\cos}\ \sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\sin^2 7x.$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 4x\ \cancel{\cos}\ \sin 7x$

$\cancel{-\sin 11x + \sin 3x = -2\sin 4x}$

$\sin 3x - \sin 11x = -2\sin 4x\cos 7x$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-\sqrt{2}\sin 4x = \cos 7x - \sin 7x.$

$-\sqrt{2}\sin 4x = \cancel{-2\sin 0\cdot\sin 7x}$

$-\sqrt{2}\sin 4x = \cos 7x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) =$

$= -2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right).$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{1-\cos\alpha+\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos\beta}{2}} = 2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\cos 14x.$$

$$\cancel{\cos(3x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-11x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) - \cos(}$$

$$\cos 11x - \cos\left(\frac{\pi}{2}-11x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) - \cos 3x =$$

$$= -2\sin\frac{22x-\frac{\pi}{2}}{2}\,\cancel{\sin\frac{\pi}{4}} + 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-6x}{2}\cdot\cancel{\sin\frac{\pi}{4}} = \cancel{\sqrt{2}}\cos 14x$$

$$-2\left(\sin\left(11x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right) = \cos 14x$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\cancel{2}}$$

$$\sqrt{3}+1 = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = \cancel{2}\cdot 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 0 = 0.$$

$$-2\cos\frac{14x}{2}\sin\frac{8x-\frac{\pi}{2}}{2} = \cos 14x$$

$$= \cancel{-2\sqrt{\frac{1+\cos 14x}{2}}}$$

$$-2(1+\cos 14x)\sin^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 14x$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

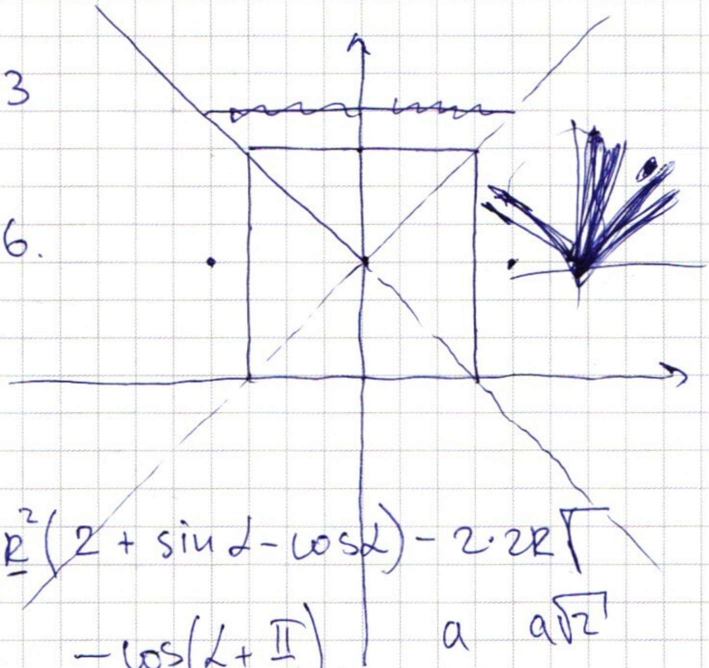
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$ $x \leq y-3$

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6.$

$2y=12$

$\underline{y=6.}$



2) $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$ $(5\sqrt{2})^2 = 2R^2(2+\sin\alpha-\cos\alpha)-2\cdot 2R$

$\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6$ $-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$ a $a\sqrt{2}$

$-2x=6$ $b^2=a^2+2a^2-2$

$\underline{x=-3.}$

1) $(|x|-4)^2=a-9$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha^2$

$(\alpha-\frac{\pi}{4})$ $a=9$

3) $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha$

2) $(|y|-3)^2=a-1$ 180^2

$a=1$

$x+\cancel{3}-\cancel{y}+y-\cancel{3}+x=6$ 3) $(|y|-3)^2=a-1$ $\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$

$a=1$ $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$

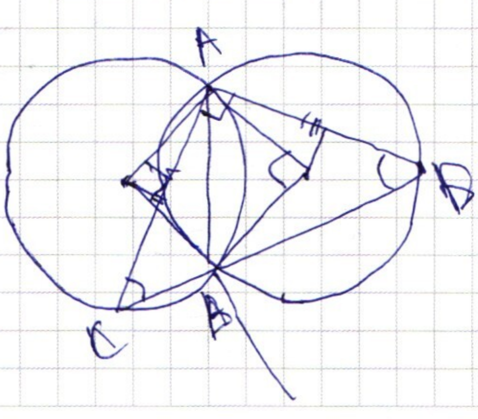
$\underline{x=3.}$ $\sqrt{2}-1$

$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$ 4) $\cancel{x}+3-y-y-\cancel{x}+3=6.$

$-2y=0$

$\frac{CK}{CB}=\sqrt{2}$ $\underline{y=0}$

$CK\cdot AC=CB\cdot CD$ $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)^2$

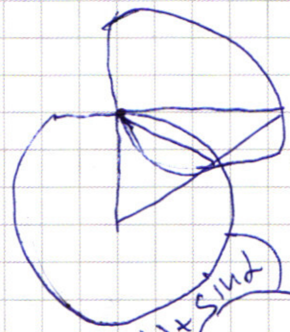


☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |3-x| + |3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 = a-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x < -3 \end{cases} \to \varnothing$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ 3 - x + x + 3 = 6 \end{cases}$$

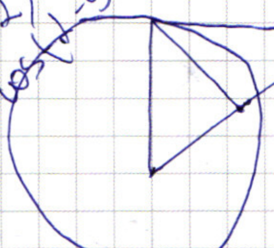


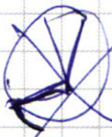
$\alpha - 90°$

$a = 9$

$a^2 = 50(1-\cos\alpha)$

$b^2 = 50(1-\cos(\alpha-90°))^2 = 50(1+\sin\alpha)$

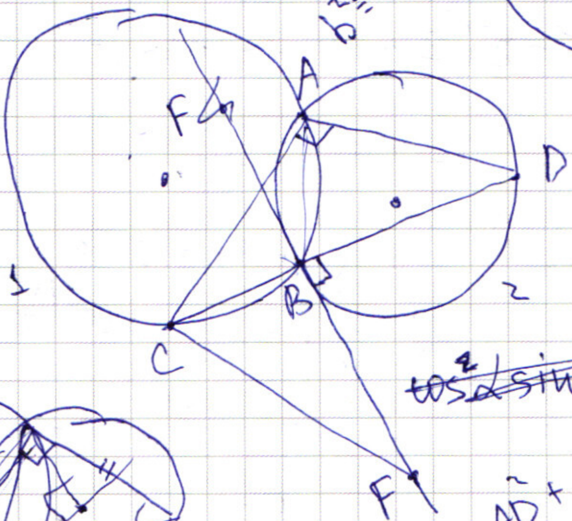




$4\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 4 - 4\cos\alpha + 4\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha$

$\cos\alpha \cdot 0 -$

$\sin\alpha$



$CB \cdot CD^2$

$= CB \cdot (CB + BF)^2$

~~$\cos^2\alpha \sin 90°$~~

$AD^2 + AC^2 = CD^2$

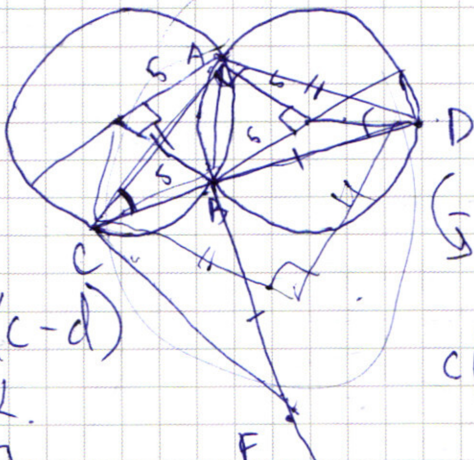
$CB \cdot CD^2$

$CB^2 + CB \cdot BF$

$50 = 50(1-\cos\alpha + 1 + \sin\alpha) + 2 \cdot 50 \cdot \sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\sin\alpha)}$

$2 + \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{1 - \cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2$



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ a^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\alpha \end{cases}$$

$c(c - 2b\cos\alpha) = d(d - 2b\cos\alpha)$

$c^2 - d^2 = 2b\cos\alpha(c-d)$

$c + d = 2b\cos\alpha$

$c + d = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x + \sin 3x = \cos 3x + \sqrt{2}\cos 14x + \sin 11x$

$\cos 11x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 3x + \sqrt{2}\cos 14x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right).$

$2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+8x}{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-8x}{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2} + \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos\frac{\pi}{2}\cos 14x = \cos$

$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} =$

$a+b=\pi$

$= 2\sin(15^\circ)\sin 45^\circ$

$a-b=14x$

$\sqrt{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+8x}{2} - \cos\frac{\frac{\pi}{2}-8x}{2}\right) = \cancel{\sqrt{2}}\cos 14x.$

$\sqrt{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+8x-\frac{\pi}{2}+8x}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right) = \cos 14x$

$\cos 14x - 0$

$14x =$ $\quad x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{4}$

~~cos 0 - 0 -~~

$\cos\frac{11\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{11\pi}{4} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

$\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

$\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 2 = 2\cdot(-1)\cdot(-1) = 2.$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = -1 = \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = -1.$

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 1 = -2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$ -30°

~~$\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} =$~~ $\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$\cos 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ $a+b=16$

$a-b=14$

$2\sin 15^\circ\cos 45^\circ =$ $a=15$

$b=x$

$\frac{\frac{\pi}{2}-\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$\sin a + \sin b =$

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = 3-2\sqrt{3}+1.$ $= 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 1 = -2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+8x}{2} - \cos\frac{\frac{\pi}{2}-8x}{2}\right) = \cos 14x$

$\sqrt{2}\cos\frac{14x-\frac{\pi}{2}}{2}\left(-2\sin 8x\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos 14x$

$\sin a - \sin b =$

$-2\sqrt{2}\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\sin 8x = \cos 14x.$ $\sin$

$\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \cos 14x.$

$a = 15x - \frac{\pi}{4}$

$+\begin{cases} a-b = 16x \\ a+b = 14x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $2a = 30x - \frac{\pi}{2}$ $b = -x - \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}\cdot\left(\sin\left(15x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos 14x$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3375	3
1125	3
275	5
55	5
11	11

3375	3
1125	3
275	5
55	5
11	

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} =$

$55 \times 5 = 275$, $275 \times 3 = 1125$, $1125 \times 3 = 3375$

$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2\cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ =$

$\cancel{\cos 60^\circ - \cos 30^\circ =}$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{2,7}{2} =$

$\cos 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}$

$2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$

333555

$9 \cdot 3 \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$81 - 54 - 36 - 27 + 36 =$

$-2\cos\frac{a+b}{2}$

$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 + C_8$

$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} =$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$3 \cdot 56 =$

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

$= 168$

$\sqrt{3}+1 = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$\cos 11x - \sin 11x$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$

$3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3}$

$-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$28 - 28 = 0$

$4 - 8 - 8 - 12 + 24 =$

$2^{4\lg 2} = 2^{4\lg 2}$

$16^{\lg 2} = 4^{\lg 4}$

$\left(\frac{2^5}{2}\right)^{\lg 2} = 2^{2\lg 4}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{2-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

$x^2-2xy+y^2-4y^2-4x+12y=0$

$\cancel{(x-y)^2}$

$\left(\frac{3^5}{9}\right)^{\lg 9} = 3^{2\lg 27}$

$(x-3y)(x+y)-4(x-3y)=0$

$27^{\lg 9} = 9^{\lg 27}$

$(x-3y)(x+y-4)=0$

1) $x=3y$

$x=4-y$

$y-3-x$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$3^{3\lg 9} = 3^{2\lg 27}$

$3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y-2\lg 3y^2} = 3^{\lg 3y}$

$y=3$

$4\lg 9-2\lg 27 = \lg$

$\cancel{8\lg 3-4\lg 3\sqrt{3}}$

$8\lg 3-6\lg 3-2\lg 3 = 2\lg 3$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(y(4-y))}$

$y^{5\lg(4-y)-2\lg(y(4-y))} = (4-y)^{\lg(4-y)}$

$\cos 30^\circ-\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$-2\sin\frac{\alpha-b}{2}$

$\cos\frac{\alpha+b}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)