

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Есть только 1 цифра, которая кратна 5 -
это 5. Поэтому в таких числах должно
быть ровно 3 "5".

3^3 можно представить 2-мя способами
в качестве произведения цифр

$$3^3 = 3 \cdot 9$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Имеется 2 типа чисел, произведение цифр
которых равно 3375

I Кол-во цифр	
3	5
3	3
2	1

II Кол-во цифр	
3	5
1	9
1	3
3	1

Кол-во чисел 1-ого типа:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 560$$

Кол-во чисел 2-ого типа:

$$C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

Всего

$$560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680.

$$2. \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos(4x) = \cos(14x)$$

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) \cos(4x) = \cos^2(7x) - \sin^2(7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cos 4x - (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) (\sqrt{2} \cos 4x - (\cos 7x + \sin 7x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x = \sin 7x & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos 4x = \cos 7x + \sin 7x & (2) \end{cases}$$

$$2: \quad \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\cos(4x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$4x + 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$$

$$\cos(4x) = \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 4x + 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k \\ (-4x) + 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1: \quad \sin 7x = \cos 7x$$

$$\tan 7x = +1$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \quad \left(\frac{y^5}{x} \right)^{1/9} = y^{2/9} (xy) \quad (1)$$

$$\left[x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \right] \quad (2)$$

$$2: \quad x^2 - 2xy - 3y^2 - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

используем замену $x = 3y$ и $x + y = 4$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$1: \quad y^{5/9} x = y^{2/9} (xy) \cdot x^{1/9} \quad x > 0$$

$$y^{5/9} x = y^{2/9} x + 2/9 y \cdot x^{1/9} \quad y > 0$$

$$y^{3/9} x - 2/9 y = x^{1/9}$$

$$10 \quad y^{1/3} (3/9 x - 2/9 y) = 10 \quad y^{1/3} x$$

$$3/9 y \cdot 1/9 x - 2/9 y^2 = 1/9 x^2$$

$$1/9 x^2 - 3/9 y \cdot 1/9 x + 2/9 y^2 = 0$$

$$(1/9 x - 2/9 y)(1/9 x - 1/9 y) = 0$$

$$\begin{cases} 1/9 x = 2/9 y \\ 1/9 x = 1/9 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{и } y \neq 0 \\ \text{и } y = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \\ x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = y^2 \end{cases} \quad (0;0) \quad \text{не подходят} \quad \text{при } 0; y > 0$$

$$(4;3) \quad (9;3)$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = y \end{cases} \quad (0;0) \quad \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ x = y^2 \end{cases} \quad y^2 + y - 4 = 0 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ x = y \end{cases} \quad (2;2)$$

Ответ: ~~(0;0)~~; (2;2); (9;3) $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$.

$$5. \begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 & (1) \\ ((x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

1: график 1-го ур-ня является двучленом.

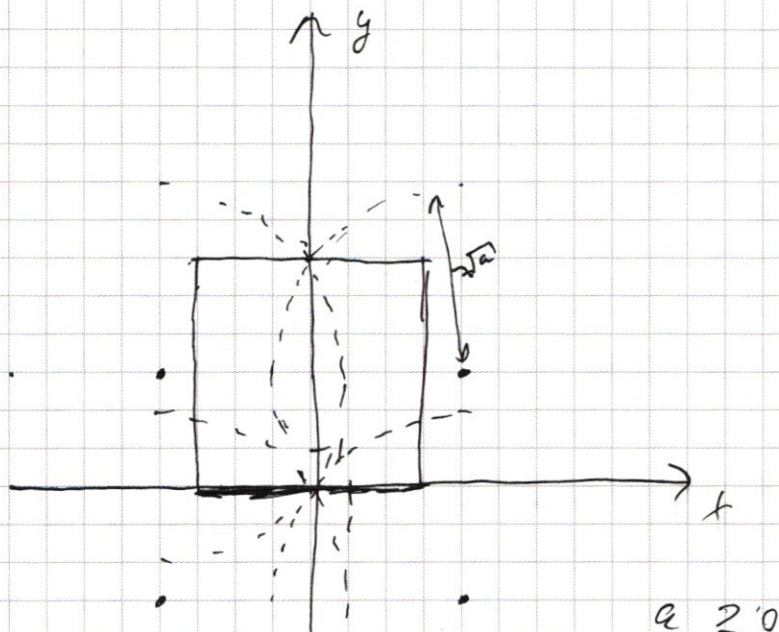
с центром в (0;3), сторонами || ок и оу
и, сторонами 6

2: график 2-го уравнения является

и окружностью с центрами в $(\pm 4; \pm 3)$

и радиусом $R = \sqrt{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



При $a=0$ система не имеет решений. При

увеличении a ~~увеличении~~ $\sqrt{a} < 1$

система не имеет решений. При $a=1$

система имеет ровно 2 решения $(3;3); (-3;3)$

При $\sqrt{a} \in (1; \sqrt{7^2+3^2}) \setminus \{5\}$ система будет иметь не менее 4 различных решений. Т.к. 2

внешние окружности будут пересекать квадрат по 2 раза каждая

При $\sqrt{a}=5$ будет 4 решения $(0;0); (0;6); (3;1); (-3;1)$

При $\sqrt{a} \in (\sqrt{7^2+3^2}; +\infty)$ Внешние окружности не дают решения. Кол-во решений системы

Будет зависеть только от количества пересечений
нижних опр. с квадратами

Из соображений симметрии если левая
опр. ~~пересекает~~ пересекает квадрат, то и правая
опр. пересекает квадрат. Поэтому система
будет иметь ровно 2 решения если
каждая из опр. пересекает квадрат в
одном месте, либо они пересекают опр.
дважды, то абсцисса пересечения равна
0

Каждая из опр. будет иметь по одному решению
при $\sqrt{a} = \sqrt{7^2 + 3^2}$

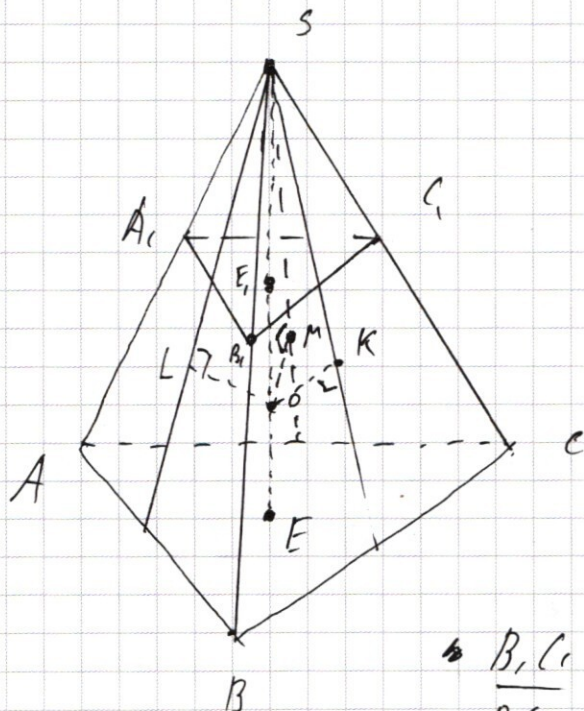
Случай, когда обе опр. пересекают квадрат
в точках вида $(0; y)$, не будет т.к. их
уравнения не лежат на прямой $y=3$.

При $\sqrt{a} > \sqrt{7^2 + 3^2}$ система решений не
имеет.

а Ответ: $a = 1$; $a = 130$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Пусть $A_1B_1C_1$ и ABC —
исконные сечения

$$S_{ABC} = 4$$

$$S_{A_1B_1C_1} = 1$$

$$(A_1B_1C_1) \perp SO$$

$$(ABC) \perp SO \Rightarrow$$

$$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$$

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$

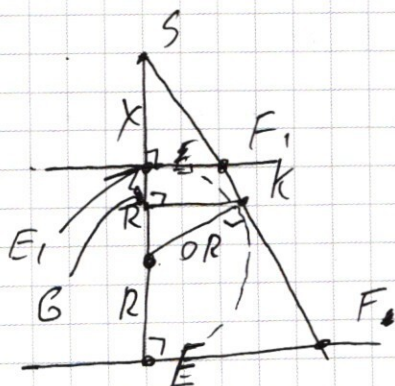
$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} \quad k = 2$$

(SKO):

$$EF \subset (ABC); \quad E, F \in (A_1B_1C_1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$$

$$EF: E_1F_1 = k = 2$$



$$\triangle SE_1F_1 \sim \triangle SEF \quad (EF \parallel E_1F_1 \Rightarrow \text{3 угла равны})$$

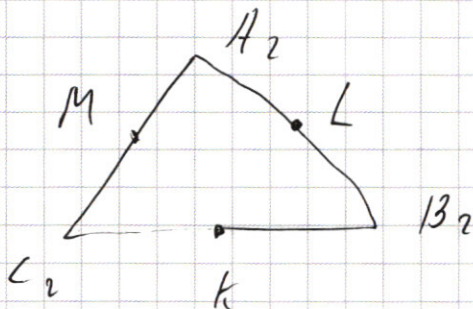
$$\frac{X}{X+2R} = \frac{E_1F_1}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow X = 2R$$

$$\triangle SKO: \quad \angle K = 90^\circ \Rightarrow \sin(\angle KSO) = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

ΔSKO : GK - высота $GK = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$

$\Delta A_2 B_2 C_2$:

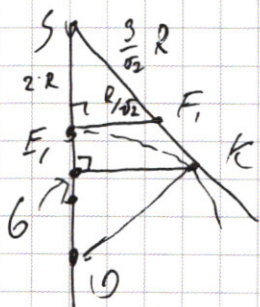


$SK = SL = SM$ (касательные) $\Rightarrow$

$\Delta SKO = \Delta SLO = \Delta SMO$

Остатки $\perp$ опущенных из точек K, M, L совпадают в точке $G \Rightarrow (A_2 B_2 C_2) \perp SO$

(SKO): $\Delta A_2 B_2 C_2 \neq \Delta A_1 B_1 C_1$
 $\Delta SE, F$ с ΔSK



$k_2 = \frac{GK}{E_1 F_1} = \frac{2\sqrt{2}R}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}R} = \frac{4}{3}$

$E_1 F_1 \parallel GK$; $E_1 F_1 \in (A_1 B_1 C_1)$;

$GK \in (A_2 B_2 C_2) \Rightarrow$

k_2 - коэф. подобия гл $\Delta A_2 B_2 C_2$ и $\Delta A_1 B_1 C_1$

$S_{\Delta A_2 B_2 C_2} = k_2^2 \cdot S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{16}{9}$

Ответ: $\arcsin(\frac{1}{3})$; $\frac{16}{9}$.

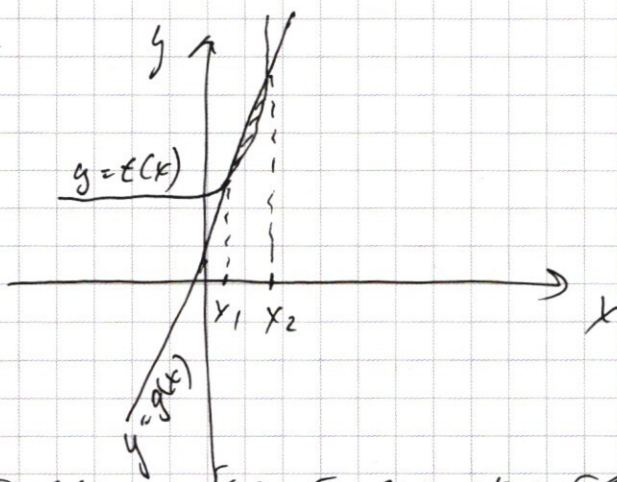
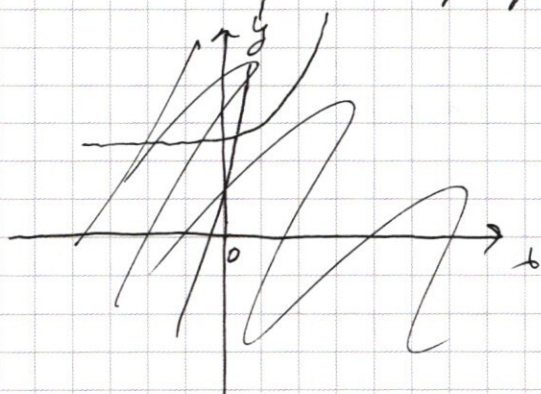
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Решить $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$; $g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$

Схематический график



Враждеб. Решением системы будет множество
точек в закрашенной области

Заметим, что $f(6) = g(6) \Rightarrow x_1 = 6$

$$f(68) = 2^{68} + 3 \cdot 2^{65} \quad g(68) = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 68$$

$$f(70) = g(70) \Rightarrow x_2 = 70$$

условия
✓

Возьмем $x \in (x_1, x_2)$ $x \in \mathbb{Q}$ тогда кол-во решений

враждебных от $x \neq$ равно $g(x) - f(x)$

А кол-во всех ^{условия} решений равно $\sum_{i=6}^{70} (g(i) - f(i))$

$$\sum_{i=6}^{70} f(i) = 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} + 2^6 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{64}) =$$

геом. прогрессия

$$= 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} + 2^6 \cdot (2^{65} - 1)$$

$$\sum_{i=6}^{70} g(i) = 64 \cdot 70 + (2^{64} - 1) (6 + 7 + \dots + 70) =$$

арифм. прогрессия

$$= 64 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 65$$

$$\sum_{i=6}^{70} (g(i) - f(i)) = \sum_{i=6}^{70} g(i) - \sum_{i=6}^{70} f(i) =$$

$$= 64 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 65 - 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} - 2^6 (2^{65} - 1) =$$

$$= 64 \cdot 70 + 2^{64} \cdot 38 \cdot 65 - 38 \cdot 65 - 64 \cdot 3 \cdot 2^{65} - 2^{65+6} + 2^6 =$$

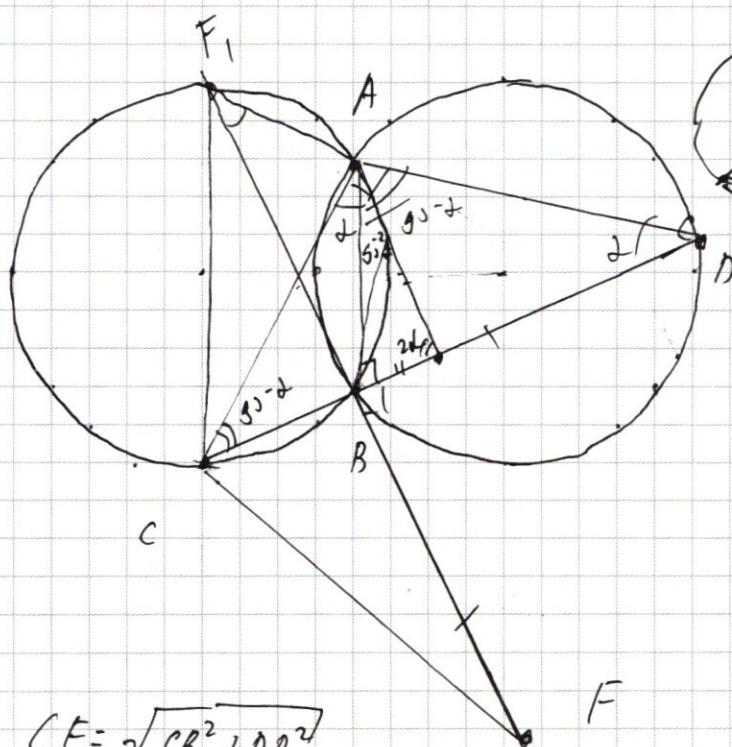
$$= 2^{64} (38 \cdot 65 - 64 \cdot 6 - 64) + 64 \cdot 70 + 64 - 38 \cdot 65 =$$

$$= (38 \cdot 65 - 64 \cdot 7) 2^{64} + 64 \cdot 71 - 38 \cdot 65 =$$

$$= 1292 \cdot 2^{64} + 2074$$

Ответ: $1292 \cdot 2^{64} + 2074$

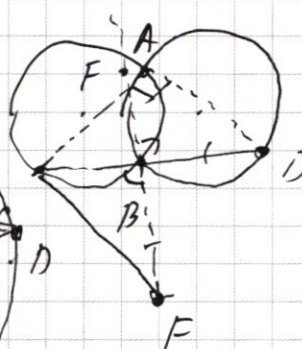
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CF = \sqrt{CB^2 + DB^2}$$

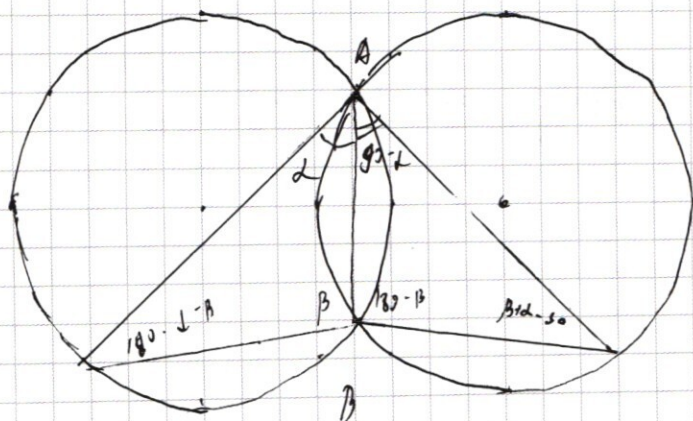
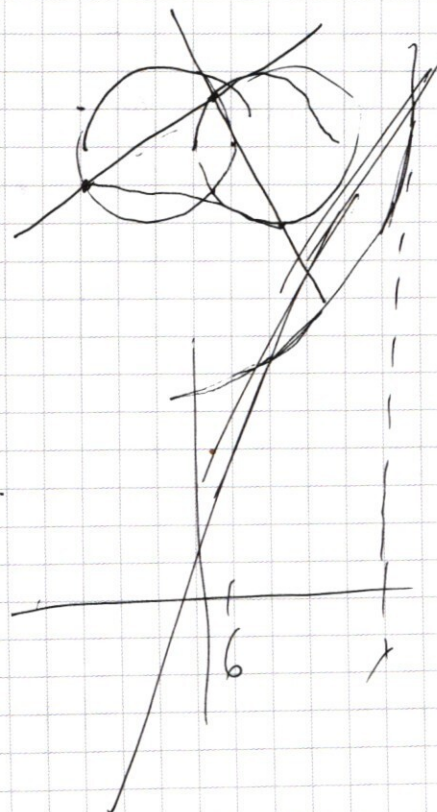
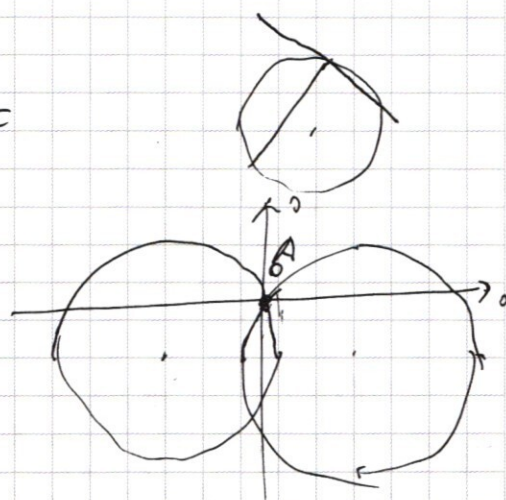
$$CB = AF_1$$

$$24 - AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

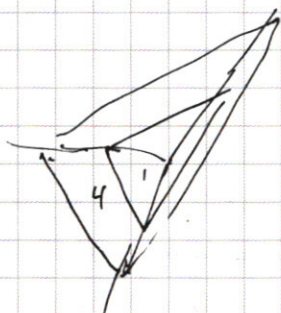
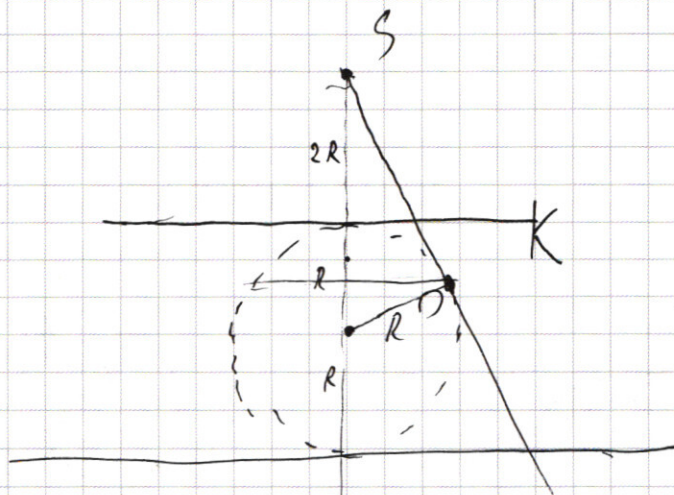
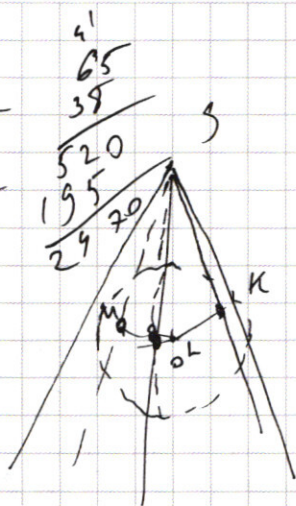


$$R = 5$$

$$\approx 65\%$$



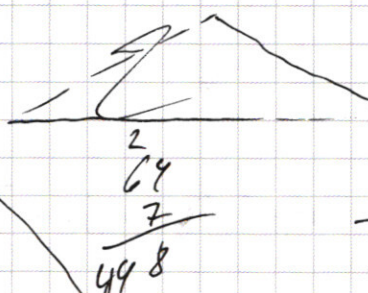
$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 71 \\ \hline 64 \\ 448 \\ \hline 4544 \\ - 2920 \\ \hline 2074 \end{array}$$



$$G(x) = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$G'(x) = 2^{64} - 1 - \ln 2 \cdot e^x$$

x	$f(x)$	$g(x)$
2^5	32	$70 - 2^5 + 2^{65}$
2^7	128	$58 + 2^{71}$
2^6	64	$6 + 2^{70}$
2^7	128	



$$\begin{array}{r} 3 \\ 65 \\ 36 \\ \hline 390 \\ 195 \\ \hline 2340 \\ - 448 \\ \hline 292 \end{array}$$

$$64 + 1 = 2^1$$

$$\sin = \frac{1}{3} \quad \cos = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \tan = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

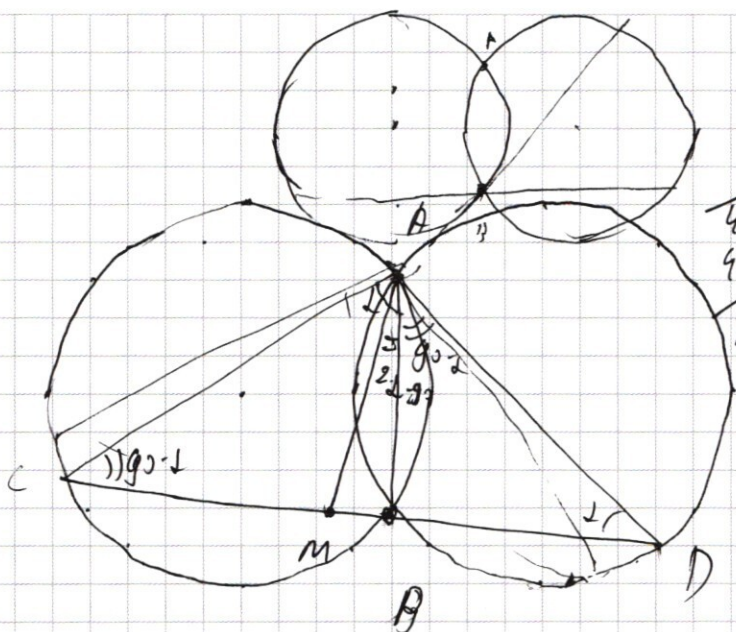
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

64

128

[6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



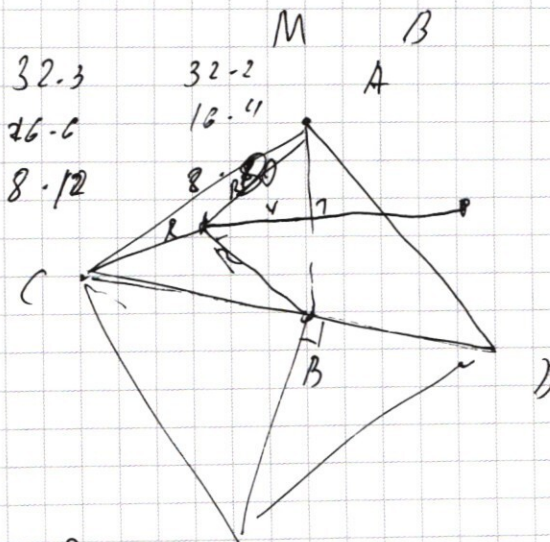
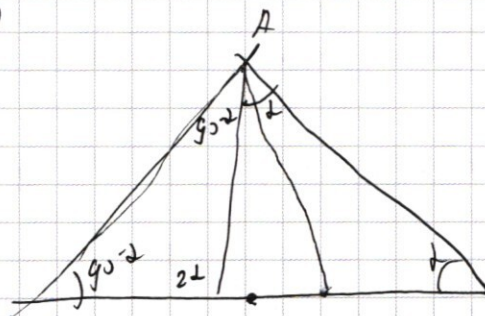
$$\begin{array}{r} 2 \\ 64 \\ 7 \\ \hline 498 \\ 92 \\ \hline 862 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 36 \\ \hline 210 \\ 15.5 \\ \hline 2160 \\ 868 \\ \hline 292 \end{array}$$

$$2^6 + 32^{65} \quad 84$$

$$\angle - 90^\circ + \angle = 2\angle - 80^\circ$$

$$AB = 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad 2x$$



$$\begin{array}{r} 32.3 \\ 26.6 \\ 8.12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32.2 \\ 12.11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2^3.5 \\ 2^2.18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 39.2 = 136 \\ 62 \end{array}$$

$$6 \rightarrow 34$$

y	$f(x)$	$G(x)$
32.3	$2^{96} + 3 \cdot 2^{65}$	$-26 + 3 \cdot 2^{65}$
2 ^{4.5}	$2^{80} + 3 \cdot 2^{55}$	$-10 + 5 \cdot 2^{68}$
2 ^{3.9}	$2^{72} + 3 \cdot 2^{65}$	$-2 + 9 \cdot 2^{67}$
2 ^{2.17}	$2^{68} + 3 \cdot 2^{65}$	$2 + 17 \cdot 2^{66}$
	$2^{65}(11)$	$2^{65}(18)$
	$j = 6 \rightarrow 68$	
	$Sum = 2^{68} 70 + (2^{64} - 1)x$	

$$\begin{array}{r} 42 - 71 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 65 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 426 \\ \hline 4544 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 520 \\ \hline 195 \end{array}$$

$$\qquad \qquad \begin{array}{r} 2170 \end{array}$$

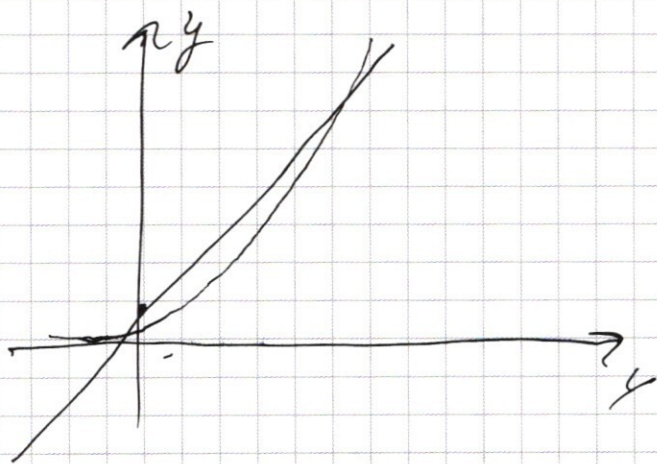
$$f(4) = 3 \cdot 2^{65} + 2^x = 12 \cdot 2^{63} + 2^x = \quad \rightarrow \infty$$

2 64 70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7 \quad y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} = f(x) \quad y(0) = 3 \cdot 2^{65} + 1 = y(1)$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x = g(x) \quad y(0) = 70 \quad y(1) = 2^{64} + 69$$



$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$$

x	f(x)	g(x)
-1	$3 \cdot 2^{65} + \frac{1}{2}$	$71 - 2^{64}$
0	$3 \cdot 2^{65} + 1$	$70 + 1 \cdot 2^{64}$
1	$3 \cdot 2^{65} + 2$	$69 + 2 \cdot 2^{64}$
2	$3 \cdot 2^{65} + 4$	$68 + 3 \cdot 2^{64} = 68 + 2^{65}$
3	$4 \cdot 2^{65} + 8$	$67 + 4 \cdot 2^{64}$

$$y > f(x) \quad f(x) < y \leq g(x)$$

$$y \leq g(x)$$

$$g(x) > f(x)$$

$$\ln 2 \cdot x$$

$$G(x) = g(x) - f(x)$$

$$G(x) > 0$$

$$G(x) = (2^{64} - 1)x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$G'(x) = 2^{64} - 1 - \ln 2 \cdot 2^x$$

$$f(k) = 2^k + 3 \cdot 2^{65}$$

$$g(k) = 70 + (2^{65} - 1)k$$

$$70 + (2^{65} - 1)k > 2^k + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\frac{81}{83} \cdot 20$$

$$|4 - x| + |-4 - x| = 6$$

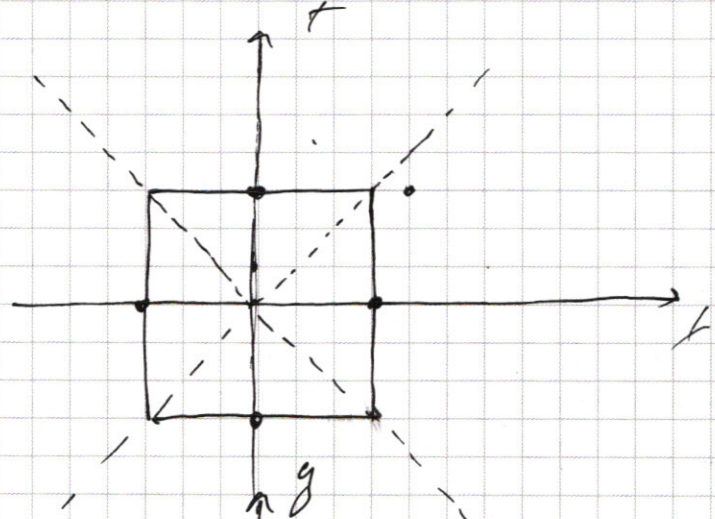
$$k \quad f(k) \quad g(k)$$

0	$3 \cdot 2^{65} + 1$	20
1	$3 \cdot 2^{65} + 2$	$69 + 2^{65}$
2	$3 \cdot 2^{65} + 4$	$68 + 2^{65}$
3	$3^{26} + 8$	$67 + 3 \cdot 2^{65}$
4	$3 \cdot 2^{65} + 16$	$66 + 2 \cdot 2^{65}$
5	$+11 + 32$	$55 + 5 \cdot 2^{65}$
6	$+64$	$64 + 3 \cdot 2^{65}$
7	$+128$	$63 + 7 \cdot 2^{65}$
8	$+256$	$62 + 4 \cdot 2^{65}$
9	$+512$	$61 + 9 \cdot 2^{65}$
10	$+1024$	$60 + 5 \cdot 2^{65}$

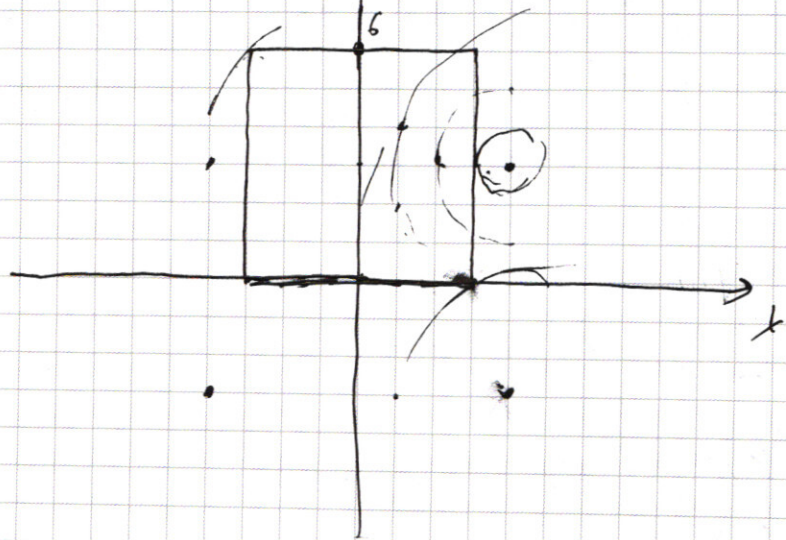
$$f(k) = g(k)$$

$$|f - x| + |f + x| = 6$$

$$f(k) - ?$$



$$9^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 3375 \div 5 = 675 \\ 675 \div 5 = 135 \\ 135 \div 5 = 27 \\ 27 \div 3 = 9 \\ 9 \div 3 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{array}{l} 3-5 \quad 3-3 \quad ; \quad 2-1 \\ 1-31 \quad 1-9 \quad ; \quad 3-1 \\ 4- \end{array}$$

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{3!} = \frac{5^3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{5 \cdot 4}{3!} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ 3! \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ 3! \\ 3 \cdot 9 \cdot 1 \end{array}$$

2. $\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$\cos(-11x) + \sin(-11x)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 14x}{2} \cdot \cos 6x = \cos 14x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) (\cos 6x) = \cos 14x$$

$$2\left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x\right) \cdot \cos 6x = \cos 14x$$

$$\cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cos 6x = (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) (\sqrt{2} \cos 6x - \cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 6x - (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\cos 6x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = 0$$

$$2 \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - 6x - \frac{\pi}{4} - 7x\right) \frac{1}{2}\right] \cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = 2 \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2} \right) \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin a \cos^2 \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \sin b \sin^2 \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin b \cdot \cos^2 \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin a \cdot \sin^2 \frac{b}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin a \left(\cos^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} \right) + \sin b$$

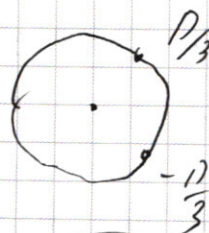
$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 0$$

$$-2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \pi k \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \pi k$$

$$\alpha+\beta = 2\pi k \quad \alpha-\beta = 2\pi k$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{1/5} = y^{2/5} (xy)^{1/5}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2$$

$$(x-y)^2 + (x-2)^2 - 3(y^2 - 4y + 4) = x^2 + y^2 + 4 - 12$$

$$(x-y)^2 + (x-2)^2 - 3(y-2)^2 = x^2 + y^2 - 8$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x + (y+2)^2 - 4(y^2 + x) = x^2 + y^2$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$x > 0$$

$$x(x-4) = y(2x + 3y - 12)$$

$$y > 0$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$x+y = 4$$

$$y^{5/5} x^{1/5} = y^{2/5} x^{1/5} \cdot x^{1/5}$$

$$y^{5/5} x^{1/5} = y^{2/5} x^{2/5} \cdot x^{1/5}$$

$$y^{3/5} x^{1/5} = y^{2/5} x^{1/5}$$

$$y^{3/5} x^{1/5} = x^{1/5}$$

$$y^{5/8x} = y^{2/8x} \cdot x^{1/8x}$$

$$x/y = 9$$

$$y^{5/8x} = y^{2/8x + 2/8x} \cdot x^{1/8x}$$

$$y^{3/8x} = y^{2/8x} \cdot x^{1/8x}$$

$$y^{3/8x - 2/8x} = x^{1/8x}$$

$$\log y (3/8x - 2/8x) = \log x^{1/8x}$$

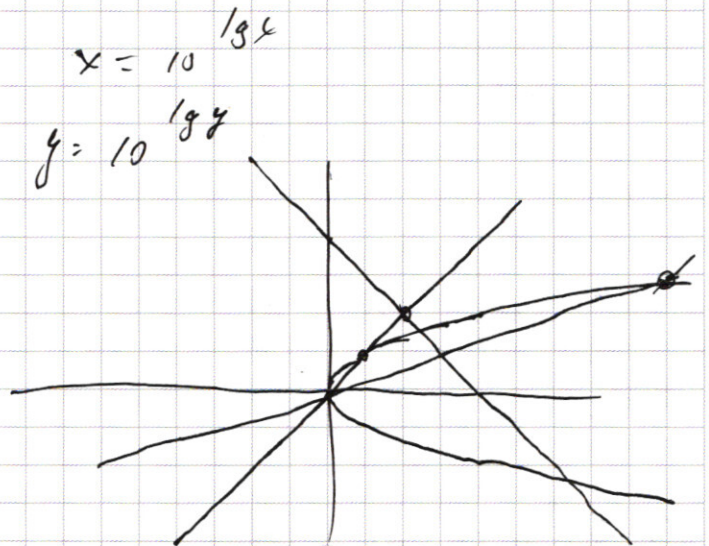
$$\log$$

$$(A/B) \cap (C/D)$$

$$y^2 = 3y$$

$$y = 0 \quad y = 3$$

$$x = 0 \quad x = 9$$



$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x =$$

$$y = 4 - y$$

$$2y = 4$$

$$\frac{8 - (-1 \pm \sqrt{17})}{2} = \frac{9 \mp \sqrt{17}}{2}$$