

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 7x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$\cos 7x - \sin 11x = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos 7x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin 11x \right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right);$$

$$\cos 7x - \sin 11x - (\cos 3x - \sin 11x) = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right) = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{3x - 11x}{2}\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x;$$

$$-2 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\cos 7x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x - \cos 3x = \cos 7x + \cos(17 - 3x) = 2 \cos(17 + 3x) \cos(14x - 5) = 2 \cos 8x \cos 4x;$$

$$\sin 3x - \sin 11x = \sin 3x + \sin(-11x) = 2 \sin(-2x) \cos 4x;$$

$$\cos 4x (2 \cos 8x - 2 \sin 8x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos 7x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x; \Rightarrow \cos 7x + \cos(17 - 3x) + \sin 3x + \sin(-11x) = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \cos\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin 4x \cos 7x \right) = 2 (-\sin 4x \sin 7x - \sin 4x \cos 7x) = -2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 4x; \quad \cos 7x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x;$$

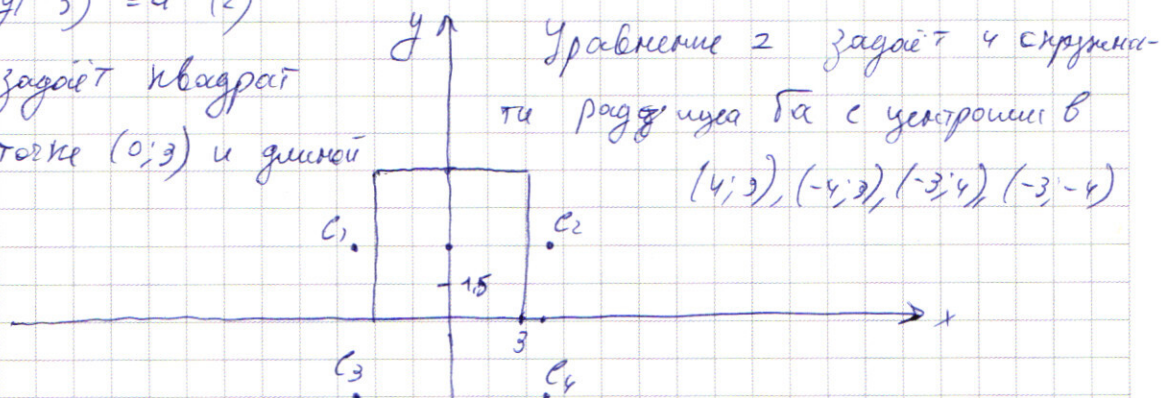
$$\cos 7x - \cos 3x = -2 \sin 4x \sin 7x; \quad \sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 4x \cos 7x;$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \cos 4x;$$

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \text{ Построим графики уравнений:} \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = \alpha & (2) \end{cases}$$

Уравнение 1 задает квадрат с центром в точке $(0;3)$ и длиной стороны 6;



Пусть C_i — точки центра окруж.

Если решений ровно 2, то рассмотрим несколько ситуаций:

1) C_1 и C_2 касаются. Окружности в C_1 и C_2 (центры) касаются ближайшей стороне квадрата, тогда $\alpha^* = 1$;

2) Если окр. в C_1 и C_2 пересекают ближнюю сторону к ближней стороне, то они пересекаются в точках $(0;0)$ и $(0;6)$, тогда $R = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, но

в этой ситуации окр. C_3 и C_4 по 2 раза пересекают квадрат и решений

3) Если C_1 и C_2 (окружности) ^{касаются} ~~пересекаются~~ дальше от себя стороны, то они ^{Ближе двух} пересекают ближнюю сторону и решений больше двух;

4) Если ^(в C_1 и C_2) окр-ты ~~не~~ пересекают вершину квадрата, то решений больше двух;

5) Если окружности в C_3 и C_4 пересекают ближнюю вершину, то это ш. № 4

6) Если окр.-ты в C_3 и C_4 пересекают дальше от себя вершину квадрата, то окружности в C_1 и C_2 не пересекают квадрат и решений ровно 2:

$$\alpha = (3 - (-4))^2 + (6 - (-3))^2 = 49 + 81 = 130$$

Ответ: $\alpha = 1$ и $\alpha = 130$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$3375 = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3$. Нужно найти кол-во комбинаций из 8 чисел в определенном порядке, если есть гарантировка 3 пятерки, а также 1) 3 тройки 2) 9 и 3. Всего есть $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ способов выбрать пятерку. Осталось 5 цифр. 5 способов выбрать тройку. Итого $\frac{8!}{3!} = 1680$. Осталось 4 цифры. Из них в любой ситуации 2 единицы. Рассмотрим оставшиеся 2 цифры. Возможные цифры: 3 и 9, или 1 и 2. Две единицы выб. Из них тогда есть 2 ситуации: 1) есть 3 тройки и 2 единицы 2) есть тройка, тройка, девять и единица. Случай №1: кол-во способов выбрать тройки: C_5^3 , тогда перемешиваем единицы отдельно. Случай №2: кол-во способов выбрать единицы: C_5^3 , остаются 2 способа расставить 9 и 3. Итого перемешиваем: 56 способов ~~бы~~ расставить пятерки, далее $C_5^3(2+1) = 3 \cdot C_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$ способов выбрать оставшиеся числа. Итого $30 \cdot 56 = 1680$ способов.

Ответ: 1680.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2\lg xy} ; \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0; \end{aligned} \right. \Rightarrow \lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right) = \lg x (\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y^{2\lg xy} \text{ по (1)} \quad 2\lg^2 y + \lg^2 x - 3\lg x \lg y &\Rightarrow \lg^2 x - 3\lg y \lg x + 2\lg^2 y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg x = \frac{3\lg y \pm \lg 4}{2} &\Rightarrow \lg x_1 = \lg y, \text{ и } \lg x_2 = 2\lg y \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = y, \text{ и } x_2 = y^2$; Рассмотрим второе уравнение системы: рассмотрим:

$$1) \begin{cases} y = x \\ y^2 x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ -6y^2 + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ или } y = \frac{4}{3}, \text{ тогда } x = 0 \text{ и } x = \frac{4}{3} \text{ соответ.}$$

$$2) \begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ и } x = 0 \text{ или:}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ (y-3)(y^2+y-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = 3 \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 \quad | \quad y-3 \\ \underline{y^3 - 3y^2} \\ -y^2 - 7y + 12 \\ \underline{-y^2 - 3y} \\ -4y + 12 \\ \underline{-4y + 12} \\ 0 \end{array}$$

Заметим, что $y \cdot \Delta D$ имеет, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$$\text{Значит } x = 3^2 = 9 \text{ и } x = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Итого найдем: $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (9, 3), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (9, 3), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$N^{\circ} 7$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad \text{Для существования решения нужно чтобы}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{64}(x-6) - 2^x + (70-x) > 0. \quad \text{Найдём граница верхняя } x:$$

нижняя граница x мало, тогда $2^{64} \gg 2^x$, ищем x , чтобы член

перед 2^{64} стало положительным, очевидно, что $x = 7$. Если $x < 6$, то

неравенство неверно, если $x = 6$, то $0 > 0$, это неверно, далее

$2^{64}(x-6)$ растёт больше, чем 2^x . Но это закончится, когда $x \sim 64$ и

$2^x \sim 2^{64}$, найдём верх. границу: подберём, малюшка с $x = 65$, получим,

это верхняя граница $x = 69$, при $x = 70$ нарушается строгость неравенств.

Итого $x \in [7; 69]$, при этом $x \in \mathbb{Z}$. Учитывая строгость знаков,

получим, что для каждого x ун. следуя. значение y :

$$N = 70 - x + 2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}; \quad \text{Искомое число пар равно сумме:}$$

$$S = \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{x=7}^{69} (70 - x + 2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) = 63 \cdot 70 - \left(\frac{7+69}{2} \right) =$$

$$= \sum_{x=7}^{69} ((2^{64} - 1)x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) = \frac{(2^{64} - 1)(7+69)}{2} \cdot 63 + 70 \cdot 63 - \sum_{x=7}^{69} 2^x -$$

$$- 63 \cdot 3 \cdot 2^{65}$$

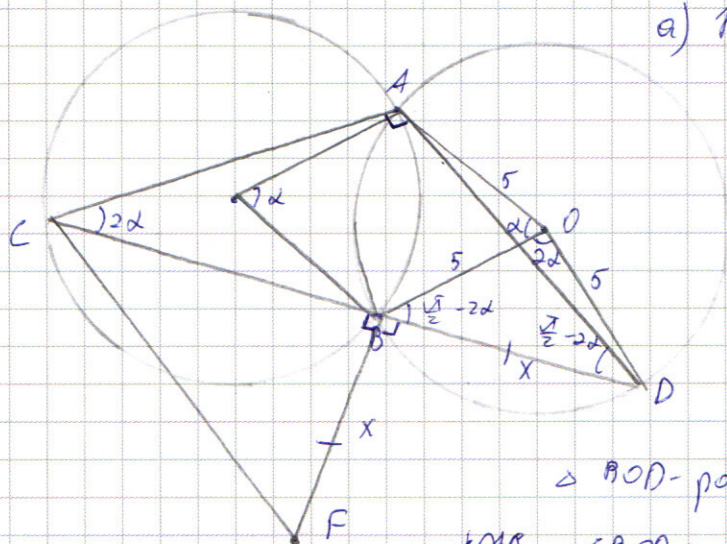
$$\sum_{x=7}^{69} 2^x = \sum_{x=0}^{69} 2^x - \sum_{x=0}^6 2^x = \frac{2^{69} - 1}{1} - \frac{2^6 - 1}{1} = 2^{69} - 2^6$$

$$S = (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 63 + 70 \cdot 63 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 - 2^{69} + 2^6 = 63(38 \cdot 2^{64} - 38 + 70 - 6 \cdot 2^{64}) -$$

$$- 2^{69} + 2^6 = 63 \cdot 32(2^{64} + 1) - 32 \cdot 2^{64} + 64 = 62 \cdot 32 \cdot 2^{64} + 63 \cdot 32 = 1984 \cdot 2^{64} + 2016 =$$

$$= 31 \cdot 2^{70} + 2016$$

Ответ: $31 \cdot 2^{70} + 2016$.



а) Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle A'CB = 2\alpha$,

Т.к. опирается на дугу $\angle AB$

$$BF = BD = x$$

(касат. + септум. + точки)₂

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 10x + x^2$$

$$\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \angle ACP = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\angle OBD = \angle ODB = \frac{\pi}{2} - 2\alpha, \text{ r.k.}$$

$\triangle BOD$ - равнобедр. ($BO = OD$).

$$\text{falsch } \angle BOD = \pi - 2 \cdot \angle BDO = \pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2\alpha$$

$$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOD = 3x;$$

$$X = 2B0 \cos\left(\frac{ct}{z} - 2\alpha\right) = 10 \sin 2\alpha ; \quad 10 = 2 \cdot 5 \cdot \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$$

$$(D)^2 = AC^2 + AD^2 = (CB+x)^2 = CB^2 + x^2 + 2CBx \Rightarrow CB^2 AC^2 + x^2 + CBx =$$

$$= CB^2 + x^2 + 2CBx \Rightarrow AC^2 = CBx + CB^2 \quad \text{by Beer's theorem}$$

уравнений можно найти x и x , одних x и x в

$$CF^2 = CB^2 + x^2 \Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + x^2}$$

(γ. Πυθαγόρας)

б) Т.н. $BC = 6$, найдем из $BC \times$, даем CF ; $\angle ACF = CF - AC \sin(2\alpha + \angle BCF)$

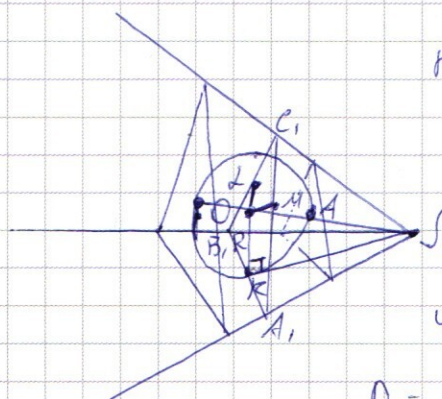
тже $\angle BCF = \arctg\left(\frac{5}{13}\right)$, а AC менше y $\triangle AEB$,

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = 2R = 10, \quad AB = 2.5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow AB = 10 \sin 2\alpha \text{ (к максимуму в т. а)}$$

Тогда всё есть и маркетинг пишущего (не ученик превратился в расчёт).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Т.к. данное сечение перпендикулярно SO , то сечение параллельно и подобно. при этом

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{1} = 4 = \frac{(SA + 2R)^2}{SA^2} \Rightarrow 3SA^2 = 4R^2 + 4RSA,$$

(т.к. $S \sim a^2$, а $a \sim L$, то $S \sim L^2$ (а-сторона треуг.))

т.к. $A \in SO$ обозначим $SA = l$

$$4R^2 + 4RL - 3l^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{-4L + 8L}{8} = \frac{L}{2}$$

$$D = 16L^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3L^2 = (8L)^2 \Rightarrow$$

Искомый угол $\angle KSOA < KSO = \arccos\left(\frac{R}{SO}\right) = \arccos\left(\frac{R}{R+L}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

Обозначим внешнюю (искомую) треугольную $\triangle ABC$, - внешнюю которого ищем. очевидно, что $KA_1 = MA_1$, $C_1M = LC_1$ и $LB_1 = B_1K$

$SO = L + R = 3R$; Данное треугольнику сечение и треугольнику искомого

сечения параллельны, значит $\frac{S_x}{S_1} = \frac{S_x}{4} = \frac{(L+R)^2}{(L+2R)^2} = \frac{(3R)^2}{(4R)^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_x = \frac{9}{4}$

Ответ: $\angle KSO = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, $S_x = \frac{9}{4}$.

$$\cos 4x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$\cos 4x - \cos 3x = -2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (1 - \sin^2 7x)$$

$$\sqrt{2} \cos 4x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 4x \sin 3x =$$

$$\cos 4x (\sqrt{2} \cos 3x - 1) - \sin 4x (\sqrt{2} \sin 3x - 1) + \cos 3x - \sin 3x = 0;$$

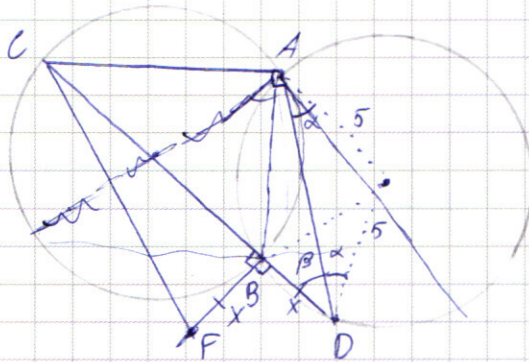
$$(\sqrt{2} \cos 3x - 1) (\cos 4x + 1) + (\sqrt{2} \sin 3x - 1) (\sin 4x + 1)$$

$$\frac{\pi x}{2}$$

$$\cos 4x$$

$$CF^2 = CB^2 + FB^2$$

$$0 + 5 + 5 + 3 = 19;$$



$$\beta + \alpha$$

$$\angle CKB = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\pi - 2\alpha + \beta + \beta = \pi - 2\alpha + 2\beta$$

$$\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} + \alpha = \pi + \alpha - \beta$$

$$2 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$69 + 2^{64}$$

$$4 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$68 + 2 \cdot 2^{64}$$

$$8 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$x=1; \quad 2 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$20 + 69 + 2^{64}$$

$$x=2;$$

$$4 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$40 - 2 = 68 + 2^{65}$$

$$x=7;$$

$$27 + 8 \cdot 2^{64}$$

$$63 + 7 \cdot 2^{64}$$

$$70 + 2^{64}x - x - 2^x + 3 \cdot 2^{65} = \frac{2^6 + 6 \cdot 2^{64}}{2^{64} + 6 \cdot 2^{64}}$$

$$= 2^x (2^{64-x}x - 8 \cdot 2^{64-x} - 1) + 70 - x$$

$$2^{64}(x - 8) - 2^x + (70 - x) < 0; \quad 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$70; \quad 2^{64} \cdot 2^6 - 2^{20} + (70 - x) < 0; \quad \text{--- } 70x$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = \frac{(2-1)(1+2+\dots+2^n)}{2-1} = \frac{2^{n+1}-2}{2-1}$$

$$\frac{62}{32}$$

$$\frac{2^3-1}{1} = 7$$

$$1 + 2 + 4$$

$$4 \cdot 180$$

$$1800 + 4 + 180 + 60 =$$

$$= 1984$$

$$65 \cdot 3L = 10 + 1800 + 180 + 120 =$$

$$= 2110$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 = \frac{(L+2R)^2}{R^2} \quad 1984/2 = 992 - 2 = \frac{496 \cdot 2^2}{2} =$$

$$4R^2 = 4R^2 + L^2 + 2RL \quad L =$$

$$4L^2 = L^2 + 4R^2 + 2RL$$

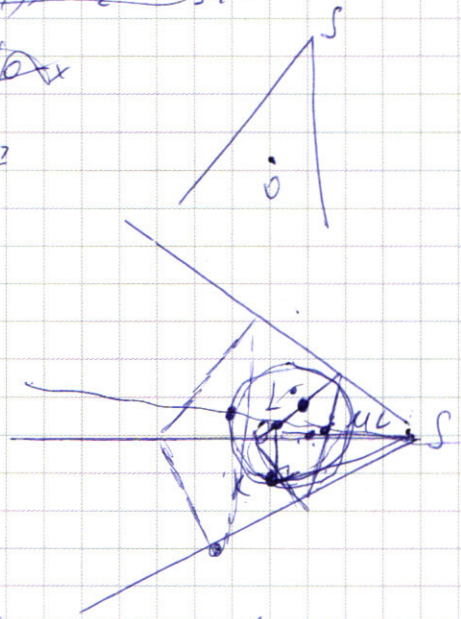
$$3L^2 = 4R^2 + 2RL$$

$$248 \cdot 2^3$$

$$124 \cdot 2^4 = 62 \cdot 2^5 = 91 \cdot 2^6$$

$$4R^2 + 2RL - 3L^2 = 0;$$

$$D = 4L^2 + 4 \cdot 4L^2 = 20L$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 14x + \cos 34x - \sin 14x + \sin 34x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \cos(\pi + 2x) \cos(14x - \pi) + \sinh 3x + \sinh(-10x)$$

$$2 \cos 8x \cos 14x = 2 \sin 3x \sin 14x = \sqrt{2} \cos 9x$$

$$\cos u_1 t + \cos u_2 t = \cos$$

$$\sqrt{2} \cos x \cdot \sqrt{1 - 2 \sin^2 x}$$

CCP1X - CCP3X,

$\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 7x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$-\sqrt{2} \sinh 4x \cosh 7x - \sqrt{2} \sinh 4x \sinh 7x = 1 - 2 \sinh^2 7x$$

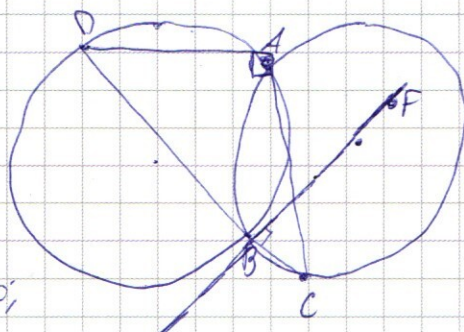
$$\sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \sinh^2 7x - \sqrt{2} \sinh 4x \sinh 7x - \sqrt{2} \sinh x \cosh 8x - 1 = 0$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D = 25,000x^2 + 8.$$

$$\sinh\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sinh\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sinh 4x \cosh\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cosh 4x$$



$$y^2 - 4y - 7 = 0;$$

$$D = 16 + 28 = 44$$

12

196

$$27 - 2 \cdot 9 - 7 \cdot 3 + 12$$
$$= 6 - 18 + 12$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - (-4x) \right)$$

$$\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x = \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \cos 4x =$$

$$-\sin 2x \cos 4x - \cos 2x \sin 4x + \sin 2x \cos 4x - \sin 4x \cos 2x =$$

$$= -2(\sin 2x \sin 4x + \sin 4x \cos 2x) = -2\sin(1+x) = \sqrt{2}\cos 4x - \sqrt{2}\sin(1+x) = \cos 4x;$$

$$y \geq 65 (3 + 2^{x-65})$$

$$y = 70 + (2^{64} - 1)x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 4x = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$$

$$\cos 4x - \cos 3x - \sin 3x + \sin x = \sqrt{2} \cos 4x - \sqrt{2} \sin 4x$$

$$\cos 4x(1 - \sqrt{2} \cos 3x) + \sin 4x(\sqrt{2} \sin 3x - 1)$$

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{2} \sin(x - \varphi) \quad \varphi = \arctan \frac{B}{A}$$

$$\sqrt{2} \sin x \cos \varphi - \sqrt{2} \cos x \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{B}{A}$$

$$\sqrt{2} (\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi)$$

$$\tan^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\cos 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \left(\cos 4x \frac{A}{\sqrt{A^2+1}} + \sin 3x \frac{B}{\sqrt{A^2+1}} \right) = \sqrt{2} \sin(4x + \frac{\pi}{4}) \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$$

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+1}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2})$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{4}) - \sin(4x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

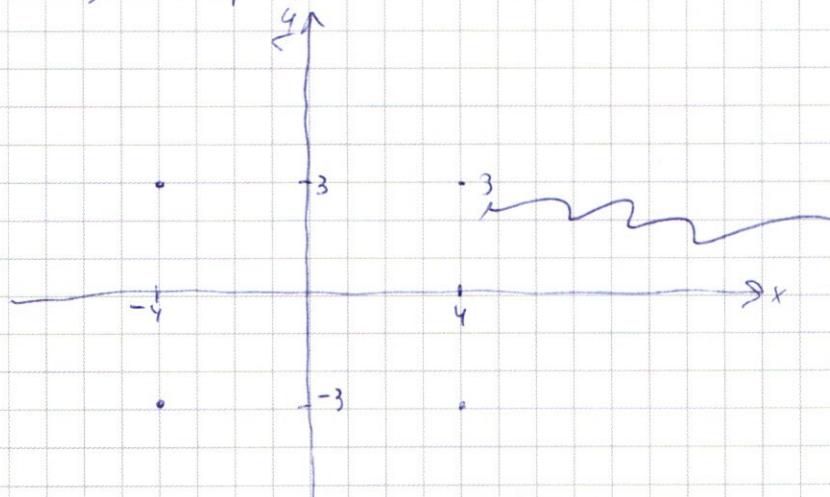
$$\sin(4x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$\sin 4x$$

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

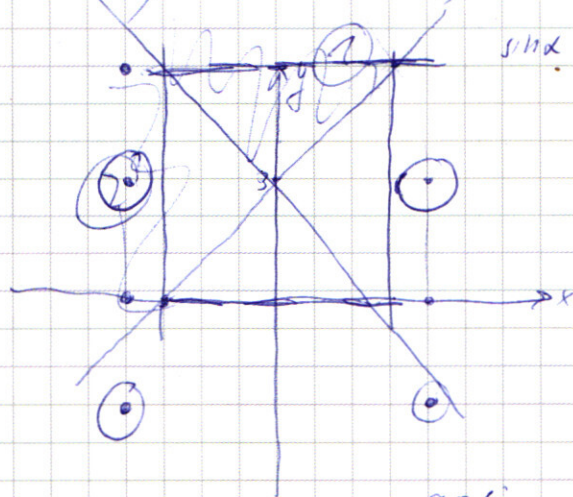
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$y - 3 > x, \quad y \geq x + 3$$



$$\cos 45^\circ x - \sin 45^\circ x = \sqrt{2} (\cos 45^\circ x \sin 45^\circ - \sin 45^\circ x \cos 45^\circ) = \sqrt{2} \sin(45^\circ - 45^\circ)$$

$$\sin(45^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ x$$



$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{✓}$$

$$1) y \geq x + 3; \quad y \leq -x + 3$$

$$2y = 12; \quad y = 6$$

$$2) y \geq x + 3; \quad y \leq -x + 3$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = -2x = 6$$

$$x = -3$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\lg x} = y^{\frac{\lg x}{\lg y}}$$

$$x^2 (x - y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = (x - y)^2 - 4(y^2 + 3y + x) = 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\lg_{10} xy} = \left(xy\right)^{\frac{2 \lg_{10} y}{\lg_{10} y}} = x \lg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$33 \cdot 15 / 5 = 600 + 60 + 15 = 675 / 5 = 100 + 5 + 10 = 135 / 5 = 27 = 3^3$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^3 \quad x x x x x x x x$$

$$225 \cdot 15 = 3375$$

$$\text{милл. } 3 \cdot 5;$$

$$0.7 \cdot 5 \cdot 2$$

$$\left(\frac{8}{8}\right) \left(\frac{8}{8}\right)$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 30(2^{60} - 1)x$$

$$(x - 2)^2 - 4 - 3(y - 2)^2 + 12 - 7xy = 0$$

$$\frac{5}{2} \lg x \lg x / (5 \lg y - \lg x) = 2 \frac{\lg x + \lg y}{\lg y} \lg y = \lg(y^2 \lg xy) = 2 \lg xy \lg y$$

$$\lg^2 y + \lg^2 x - 3 \lg y \lg x = 0$$

$$D = 9 \lg^2 y - 4 \lg^2 y - 5 \lg y \lg x$$

$$\lg x = \frac{3 \pm \sqrt{5} \lg y}{2 \lg y}$$