МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x \sin 4x$$

$$\cancel{\sin 3x}\ (\sin 11x - \sin 3x) = -2\sin 4x \cos 7x$$

$$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\sin 7x = -\cos 7x}$$

$$-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2}\left(\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = -\sqrt{2}\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cancel{-2}\sin 4x = \cancel{-2}\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (1) \\ \cancel{\sin 7x =}\ \underline{\sin(-7x) = \cancel{\cos}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)} \quad (2) \end{array}\right.$$

$\cancel{-7x =}$ (2):

$$\left[\begin{array}{l} -7x = \frac{\pi}{2} - 7x + 2\pi n \to \varnothing \qquad n, k \in \mathbb{Z} \\ -7x = \pi - \frac{\pi}{2} + 7x + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z}}$$

(1):

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \qquad m, t \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi + \frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi t \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi t}{11} \end{array}\right. \quad m, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi t}{11} \end{array}\right. \quad k, m, t \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}$; $\frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi t}{11}$, $k, m, t \in \mathbb{Z}$

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad (2) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (1) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}$$

(1): $(x - y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$

$(x-y)^2 = 4y^2 - 12y + 4x$

$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$

$D = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 - 2y + 1) =$

$= (2(y-1))^2 = (2y-2)^2$

$x_{12} = y+2 \pm (2y-2)$ ← ~~мод~~ $\sqrt{t^2} = |t|$ по модуль реализуется в обоих случаях.

$x_{12} = y + 2 \pm (2y - 2)$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 4 - y \end{array}\right.$$

Подставим во (2):

1) $x = 3y \Rightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\frac{y^{4\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3y^2}$ $\qquad$ $\frac{y^{4\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2(\lg 3 + 2\lg y)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{y^{4\lg 3+4\lg y}}{3^{\lg 3+\lg y}}=y^{2\lg 3+4\lg y}$$

$y^{4\lg y}>0$, т.к ~~...~~ $y>0$ и функция показательная

$$\frac{y^{4\lg 3}\cdot \cancel{y^{4\lg y}}}{3^{\lg 3+\lg y}}=y^{2\lg 3}\cdot\cancel{y^{4\lg y}}$$

$y^{4\lg 3}=3^{\lg y}\cdot 3^{\lg 3}\cdot y^{2\lg 3}$, Заметим, что $3^{\lg y}=y^{\lg 3}$ по

св-вам лог. (Док-во: $t>0$, $t\neq 1$ $t^{\lg 3}=3^{\lg t}$)

Пролог. обе части, т.к они >0 (показ. функции)

$\lg 3\cdot\ln t=\ln 3\cdot\lg t\Rightarrow\frac{\lg t}{\lg 3}=\frac{\ln t}{\ln 3}\Rightarrow\log_3 t=\log_3 t$, ч.т.д)

$y^{4\lg 3}=y^{3\lg 3}\cdot 3^{\lg 3}$, $y^{\lg 3}=t$, $t>0$

$t^4=t^3\cdot 3^{\lg 3}$

$t=3^{\lg 3}\Rightarrow y^{\lg 3}=3^{\lg 3}$, $\cancel{\lg 3}\cdot\ln y=\cancel{\lg 3}\cdot\ln 3$

$\Downarrow$

$\ln y=\ln 3$, т.к $\ln t$ монотонна, то $\underline{y=3}$

$x=9\Rightarrow (9;3)$

2) $x=4-y$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg y(4-y)}=y^{\cancel{2\lg(4y-y^2)}\ 2\lg((4-y)y)}$$

$$\frac{y^{5\lg y(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}}=y^{2\lg(4-y)}\cdot y^{2\lg y}$$

$\Downarrow$

$$\frac{y^{3\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y}$$

$$\cancel{(4-y)^{3\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y}}$$

$$y^{3\lg(4-y)-2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{\lg\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$ $\boxed{y=2}$ $2^{\lg 2} = 2^{\lg 2}$

$y \in (0;4)$, т.к $4-y>0$

$(4-y)^3 = (16-8y+y^2)(4-y) = 64-16y-32y+8y^2+4y^2-y^3 =$

$= 64-48y+12y^2-y^3$

$$\frac{(4-y)^3}{y^2} = \frac{64}{y^2} - \frac{48}{y} + 12 - y = f(x)$$

$$f'(x) = -\frac{128}{y^3} + \frac{48}{y^2} - 1$$ $y^3-48y+128=0$

$g(x) = (y^3-48y+128)$

$$f'(x) = \frac{48y-y^3-128}{y^3}$$ $g'(x) = 3y^2-48 = 3(y-4)(y+4)$

$-\ [\ +\ ]\ -$; -4, 4, y

~~для $(g(y))$ при $y>0$, но $y<4$, т. минимума $y=4$~~ ~~$g(4) = 2^6 + 64+128-48\cdot 4 = 192-192=0$~~

$\Downarrow$

~~$g(y) \geq 0$~~, при $y \in (0;4) \Rightarrow f'(x)$

$g(y) = -(y^3-48y+128)$

$g'(y) = -3(y-4)(y+4)$, $g(y)\uparrow$ при $y \in (0;4)$

$\Downarrow$

$y=0$ – т. минимума, и $y=4$ – т. максимума

$g(4) = 192-192=0$

$\Downarrow$

$f(y)\downarrow$ на $y \in (0;4)$

~~$y^{\lg(4-y}$~~

$$\frac{y^{3\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y}$$

$$y^{3\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)}\, y^{2\lg y}$$ $\log_y$, т.к обе части >0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3\lg(4-y) = \lg(4-y)\cdot\log_y(4-y) + 2\lg y$$

Если $y=3$, то

$$3\lg 1 = \lg 1\cdot\log_3 1 + 2\lg 3$$

$0 = 2\lg 3$ – не может быть

поделим обе части на $\lg(4-y)$

$$3 = \log_y(4-y) + 2\frac{\lg y}{\lg(4-y)}$$

$$3 = \log_y(4-y) + 2\log_{4-y} y$$

$\log_y(4-y) = t$

$$3 = t + \frac{2}{t} \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1 \end{array}\right.$$

$\log_y(4-y) = 1$

$\Downarrow$

$y = 4-y$

$2y = 4$

$\boxed{y=2}$

$\log_y(4-y) = 2$

$y^2 = 4-y$ $\quad y\in(0;4)$

$y^2+y-4=0$

$D = 1+16 = 17$

$y_{12} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}} > 0$

1) $x = 4-y \Rightarrow x = 2.$

$y=2$

$(2;2)$

2) $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$x = \frac{8+1-\sqrt{17}}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0$

$\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Ответ: $(9;3)$; $(2;2)$; $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Заметим, что цифры либо 3, либо 5, либо 9, либо 1, т.к $5^2 = 25$ – нет такой цифры и $3^3 > 10$. ч.т.д.

1) нет цифры 9, ~~тогда~~

Тогда 6 цифр не единичных. и 2 единичные.

3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1.

C_8^3 – кол-во способов выбрать 3 места для цифр 3. C_5^3 – выбрать места для 3-ёх пятёрок.

и C_2^2 для 2-ух единиц.

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 1 = C_8^3 \cdot C_5^3$

2) Есть цифра 9.

Тогда она единственная, т.к 3 в 3 степени $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$ $(9 = 3^2)$

9, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

$8 \cdot 7 \cdot C_6^3$: 8 мест для 9, 7 мест для 3, C_6^3 мест для 5 и 1 места для 1.

$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = 10 \cdot 7 \cdot 8$

$8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 20 = 8 \cdot 7 \cdot 20$

$C_8^3 \cdot C_5^3 + 7 \cdot 8 \cdot C_6^3 = 30 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 30 = 1680$

Ответ: 1680 или же, что тоже самое $C_8^3 \cdot C_5^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^3$.

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (2) \end{cases}, \quad a \geq 0.$$

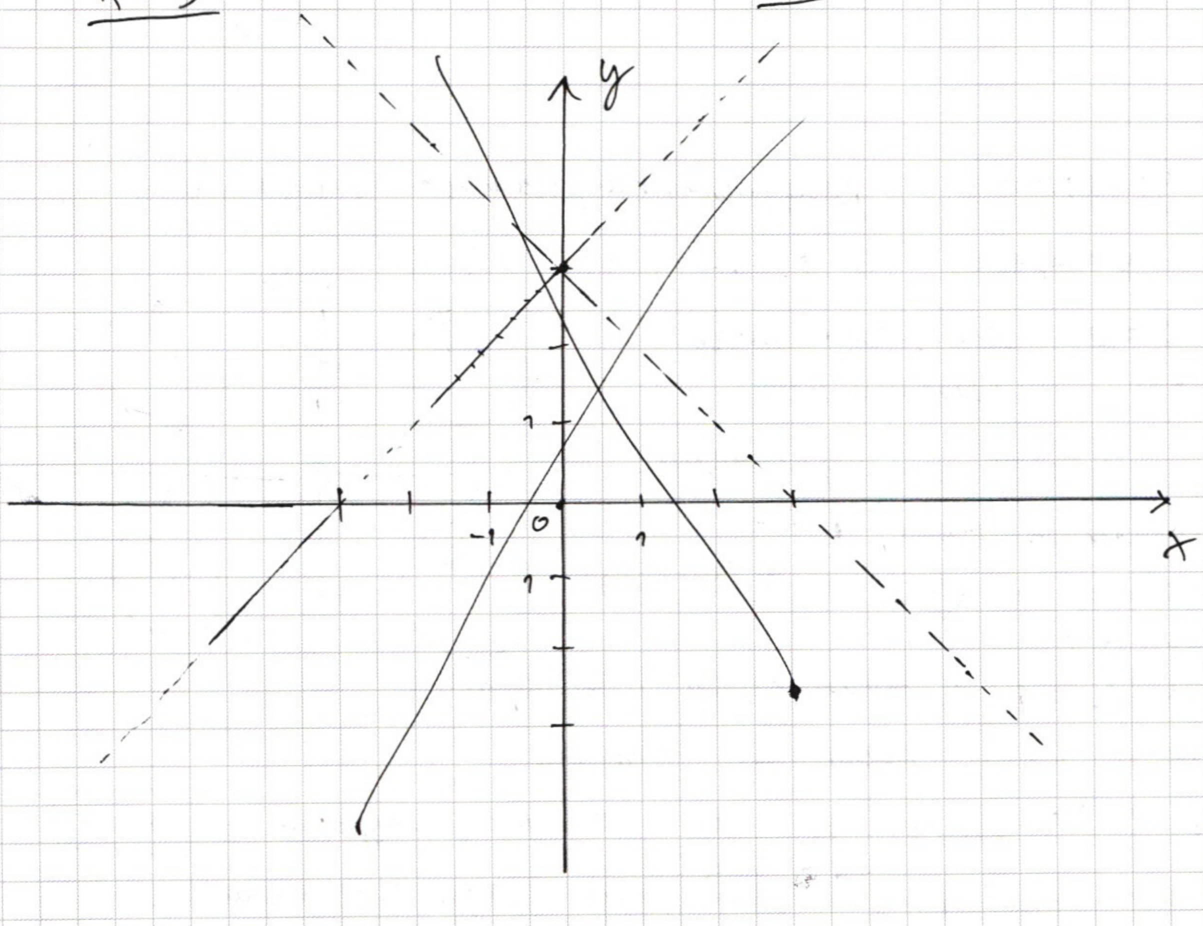
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

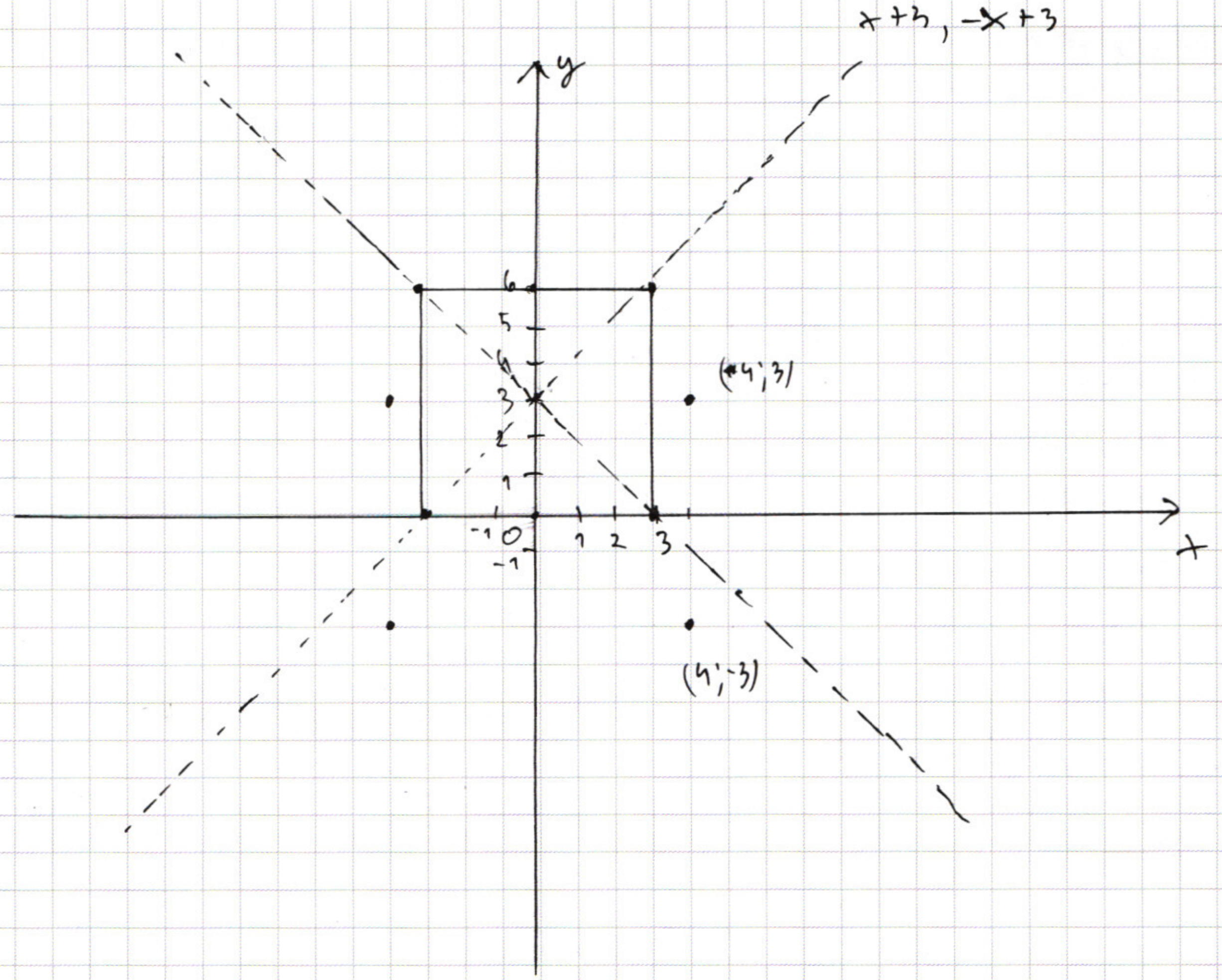
1) $y \geq x+3$
$y \geq -x+3$
$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$
$2y=12$
$\underline{y=6}$

2) $y \geq x+3$
$y \leq -x+3$
$\cancel{y}-3-x-\cancel{y}+3-x=6$
$\underline{x=-3}$

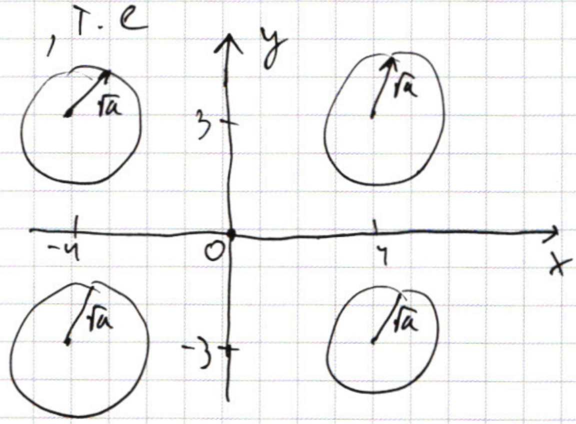
3) $y \leq x+3$
$y \geq -x+3$
$-\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$
$\underline{x=3}$

4) $y \leq x+3$
$y \leq -x+3$
$-y+\cancel{3}+\cancel{x}-y+\cancel{3}-\cancel{x}=6$
$\underline{y=0}$





(2) уравнение – расфрагментированная окружность с центрами в т. $(\pm 4; \pm 3)$, т.е.



При $a = 0$ – это просто точки $(\pm 4; \pm 3)$, и решений нет.

Если $a \in (0; 1)$, то пересечений с квадратом нет, т.к. $R = a < 0$, а ρ_{min} от т. $(\pm 4; \pm 3)$ до сторон $= 1$.

При $a = 1$, 2 окружности с центрами в $(4;3)$; $(-4;3)$ касаются квадрата.

окр. с $(-4;-3)$; $(4;-3)$ – не касаются квадрата $\Rightarrow \boxed{a = 1}$

Если $a = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, то окр с центрами $(-4;-3)$, $(-4;3)$ касаются вершин квадрата.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(4;3)$; $(-4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;-3)$ — $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ соответственно.

~~При $a \in [1; b]$ ж у $\omega_1 \geq 2$ реш.~~ , соотв у $\omega_2 \geq 2$ реш.

~~Т.к ω~~

При $a \in (1; b]$ у $\omega_1 \geq 2$ реш. и у $\omega_2 \geq 2$ реш. с квадратом. Т.к они симметричны относ. Oy.

$b = 4$. При $a \in (1; \sqrt{10}]$ ω_1 имеет ≥ 2 реш. и ω_2 соотв. тоже.

При $a = \sqrt{10}$ окр ω_i $i \in [1;4]$ касаются ~~сторо~~ верш. квадрата. При $a \in [\sqrt{10}; 4]$ ω_1 и ω_2 имеют $\geq$ по 2 реш. каждая. $b = \sqrt{9+16} = 5$ — расстояние от центров ω_1 и ω_2 до центра $(0;0)$.

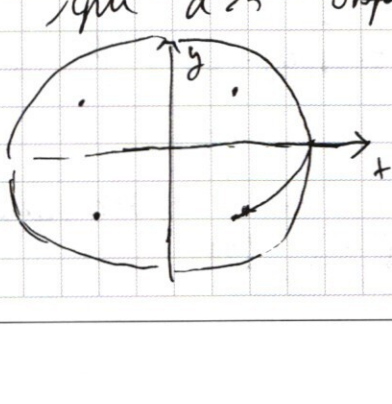
При $a \in [4;5]$ ω_1 и ω_2 имеют по ≥ 2 реш. реш ≥ 4.

При $a > 5$ ω_1 и ω_2 не пересекут квадрат.

Т.к до этого ω_1 и ω_2 давали в сумме ≥ 4 реш. мы не рассматривали ω_3 и ω_4.

При ~~$a>5$ рассмотрим~~ $a=5$ ω_1 и ω_2 перес. в т. $(0;0)$ и $(0;6)$, при этом ω_3 и ω_4 перес. квадрат в т. $(0;0)$ и $(0;6)$! $\Rightarrow$ при $a=5$ — 2 реш. !! $\boxed{a=5}$.

При $a>5$ ~~окруж~~ гиш. окр. „пропадают" (они доп. друг друга до полн. окр.)



ω_3 и ω_4 могут иметь по 1 реш. с квадратом. Т.к квадрат находится в верхн. полу плоск., а ω_3 и ω_4 в нижней.

При $a>5$ окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ не пересекают квадрат.

~~При $a=4$~~ ~~ω_1~~

Ответ: $a=1$; $a=5$.

№7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

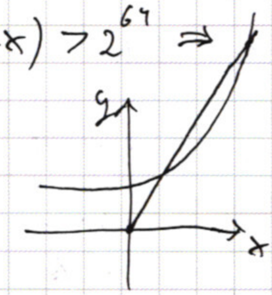
$$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + 2^{64}x - x \quad (1).$$

$$2^x + 6\cdot 2^{64} < 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + 2^{64}(6-x) < 70 - x$$

Если (1) - не выполняется, то система не имеет пересечений $\Rightarrow$ нет решений.

При ~~$x \geq -6$~~ ~~$x \le 6$~~ $x<6$ $\quad 2^x > 0,\ 2^{64}(6-x) > 2^{64} \Rightarrow$



$$2^x + 2^{64}(6-x) > 2^{64}$$

$$2^x + 6\cdot 2^{64} < 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + 6\cdot 2^{64} = 70 + (2^{64}-1)x$$

При $x \geq 64$ $\qquad 2^{64}\left(2^{x-64} + 6\right) = 70 + 2^{64}x - x$

$f(x) = 2^x + 6\cdot 2^{65}$

$g(x) = 70 + (2^{64}-1)\cdot x$

$$2^x + 6\cdot 2^{64} = 70 + (2^{64}-1)x$$

~~$2^x - (2^{64}-1)x$~~

$$(2^{64}-1)x - 2^x = 6\cdot 2^{64} - 70$$

$$2^{64}x - 2^x - x = 6\cdot 2^{64} - 70$$

$x \geq 64$

$$2^{64}\left(x - 2^{x-64}\right) - x = 6\cdot 2^{64} - 70$$

При $x \geq 71$ $\quad x - 2^{x-64} < 0 \Rightarrow \underline{x \le 70}$

При $x = 70$ — равенство достигается $\quad 2^{64}(70-64) - 70 = 6\cdot 2^{64} - 70$

$\varphi(x) = 2^{64}x - 2^x - x$ $\downarrow$ при $x \geq 64$

$\varphi'(x) = 2^{64} - \frac{2^x}{\ln 2}$ т.к. 2^x монотонна, то 1 т. экстремума.

$\Downarrow$ $\quad + \quad - \quad$ $\varphi'(x)$

$64 \quad x$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Downarrow$

при $x \geq 64$ $y(x)$ – имеет не более 1 реш.

$x = 70$ – реш.

$f(x) = 2^x + 6\cdot 2^{65}$ $\quad f(x) = g(x)$ при $x = 70$.

$g(x) = 70 + (2^{64}-1)\cdot x$

Проверим будет ли $x = 70$ – т. касания.

$\begin{cases} f'(70) = g'(70) \\ f(70) = g(70) \text{ – выполнено} \end{cases}$ – нет. очевидно, т.к „вылазит" $\ln 2$ в $f'(x)$.

$\Downarrow$

$\exists$ 2-ое решение. $\quad x \geq 0$ – очевидно

$2^x + 6\cdot 2^{64} = 70 + (2^{64}-1)x$

При $x \geq 10$ $\quad \cancel{2^x(1+6\cdot 2^{65-x})}$ $\quad f(x) \geq 2^{10} + 6\cdot 2^{64}$

$g(x) \geq 2^{64}\cdot 10 + 60$

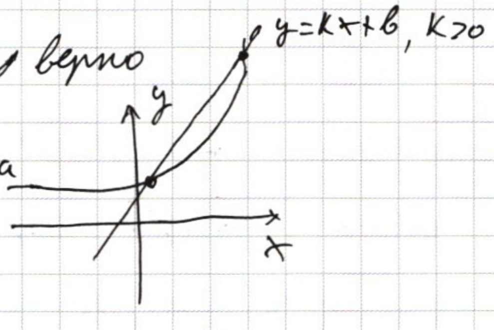
$\cancel{2^{30} + 6\cdot 2^{64} = 70 +}$

$x = 6$.

$2^6 + 6\cdot 2^{64} = 2^{64}\cdot 6 + 64$ – верно

$\Downarrow$

$\underline{x = 6}$. $\quad$ т.к



имеет не более 2 реш., то

$\underline{x = 6 \text{ и } x = 70 \text{ – решения.}}$

$g(x) > f(x)$ при $\underline{x \in [7; 69]}$

$\Downarrow$

$\cancel{2^x + 3\cdot 2^{65} - 70}$

$\cancel{2^x + 6\cdot 2^{64}}$ $\quad 2^{64}x - x + 70 - 2^x - 6\cdot 2^{64}$ – ? $\quad 69 - 7 + 1 = 63$ – шт. x.

$x = 7$: $\ 2^{64}\cdot 7 + 63 - 2^7 - 6\cdot 2^{64} = 2^{64} - 2^7 + 63$

$2^{64}(x - 6) - (2^x + x) + 70$

$\Downarrow$

кол-во пар решений $\displaystyle\sum_{i=7}^{69} 2^{64}(i-6) - (2^i + i) + 70 = S$

$$2^{64}\cdot(7+8+\ldots+69)-\left(2^7+2^8+\ldots 2^{69}+(7+8+\ldots+69)\right)+\cancel{63}\cdot 63\cdot 70=$$

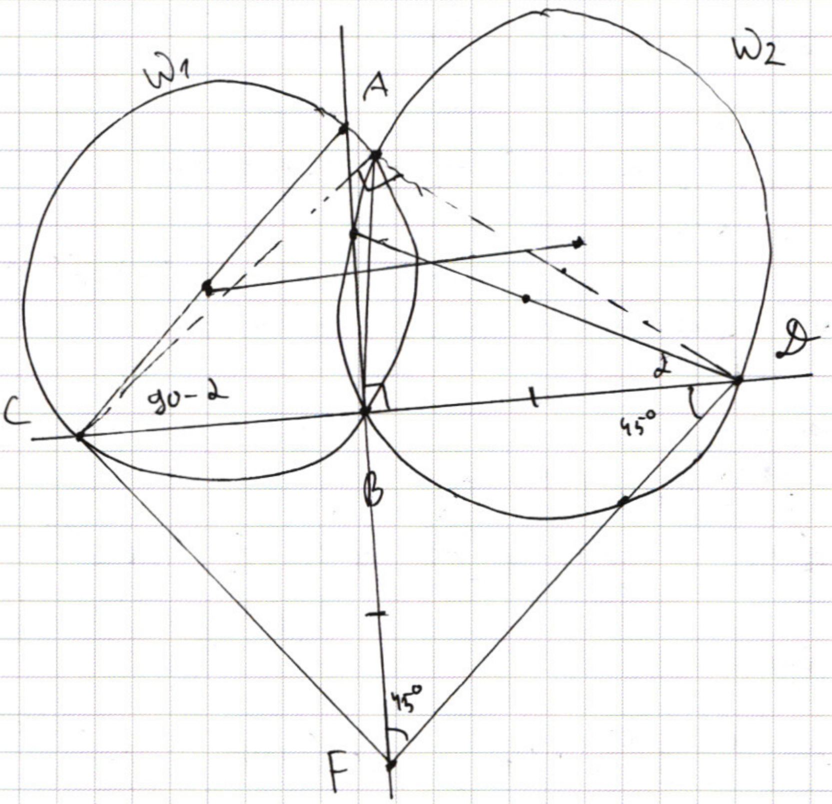
$$=2^{64}\cdot\left(\frac{7+69}{2}\right)\cdot 63-\frac{2^7(2^{63}-1)}{1}+\left(\frac{7+69}{2}\right)\cdot 63+63\cdot 70=$$

$$=2^{64}\cdot 38\cdot 63-2^{70}+2^7+38\cdot 63+70\cdot 63=S$$

Ответ: $S=6932+2^{64}\cdot 2330$

№6.

$R=5$.



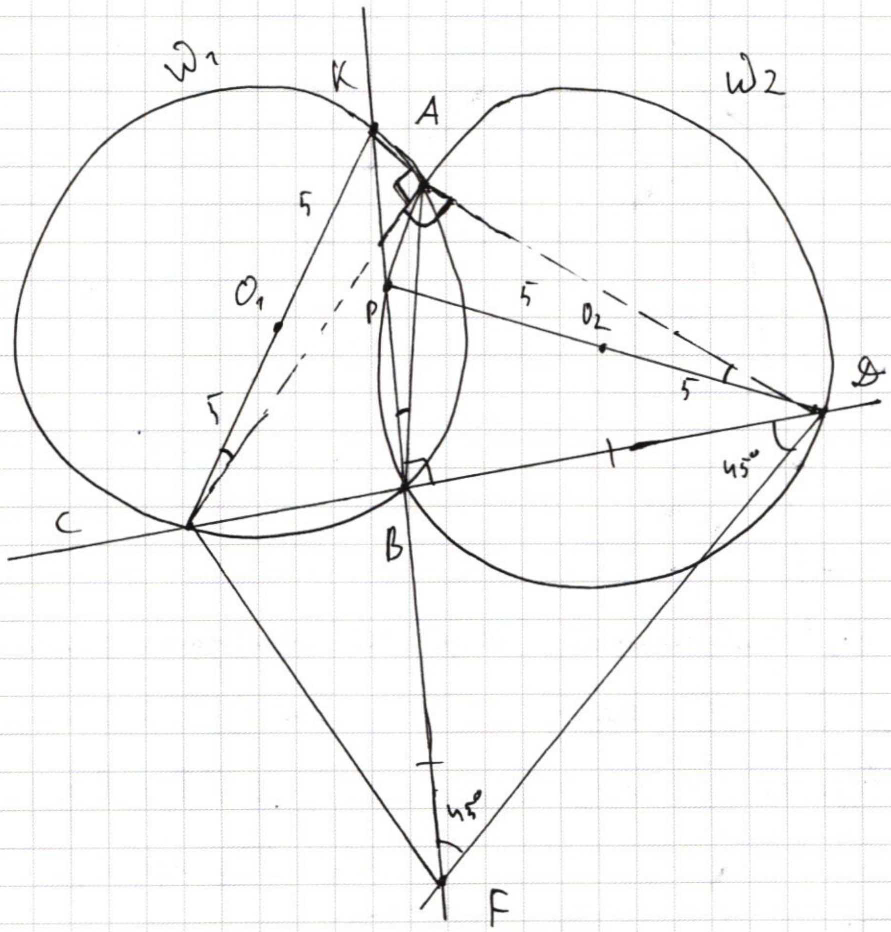
Заметим, что окружности равного радиуса симметричны относ. общей хорды $\Rightarrow$ их общ. дуги равны

Пусть перп. к CD через т. B перес. ω_1 в т. K, а ω_2 в т. P

Тогда CK и PD – диаметры окр. т.к на них опир. угол в 90°.

т. B $\in$ и ω_1 и ω_2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



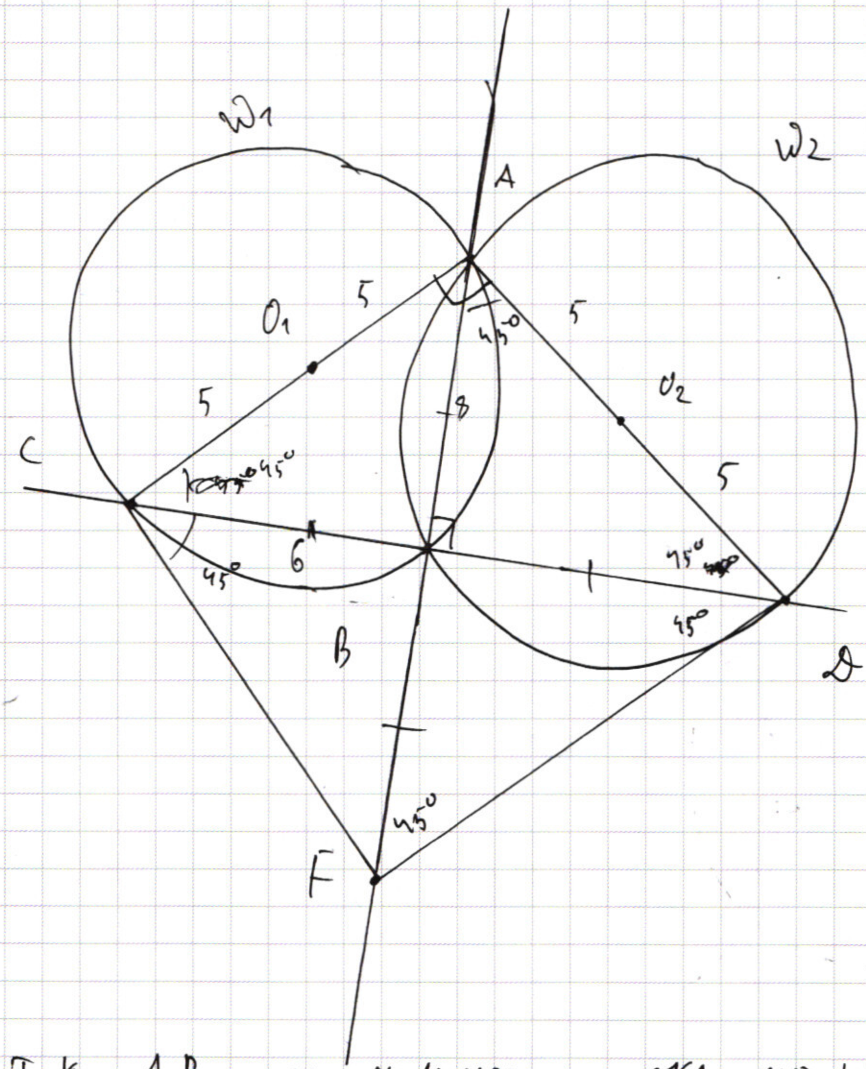
$BPAD$ — впис, т.к сумма против. полож. углов $= 180°$.

Т.к CK — диаметр, то K, A, D — лежат на 1 прямой ($\cancel{KA}$ $KA \perp CA$). Т.к PD — диаметр, то $\angle PAD = 90°$, то $\angle CAD$ тоже $= 90°$

$\Downarrow$

$P = A$ и высота проходит через хорду AB.

AC и AD — диаметры.



Т.к AB – ось симметрии окр, то нетрудно видеть, что ~~CF~~ $F \in$ сер. перп к CD. $\Rightarrow CF = FD$.

$CFAD$ – ~~квадрат~~ ромб. в силу симметрии. $\Rightarrow FD = CF = 10$

$\underline{CF = 10}$ ← по т. Пифагора из $\triangle CAD$.

б) $CD = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{100 - 36} = 8$.

$\Downarrow$

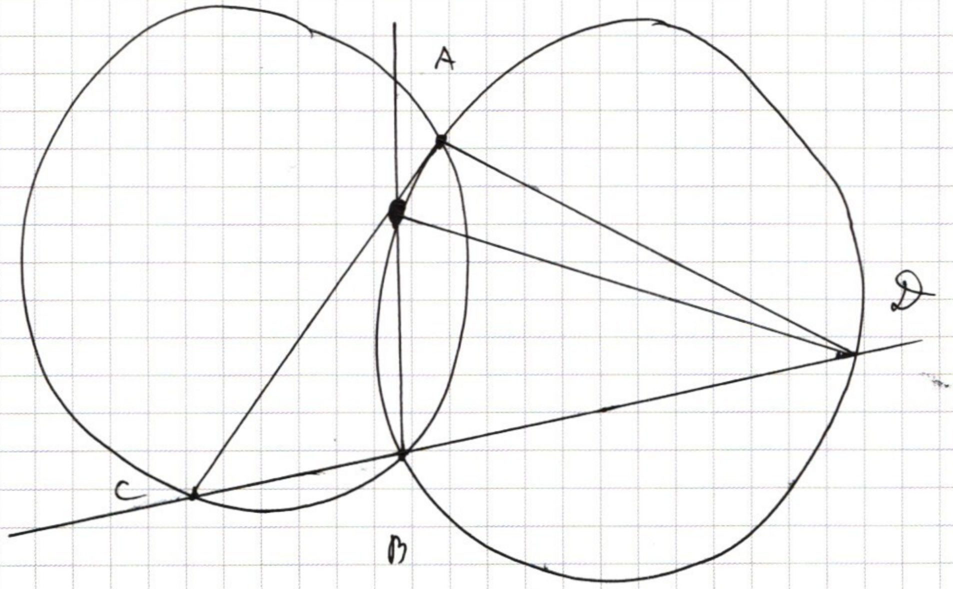
$AF = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow S_{ACF} = \frac{6 \cdot \overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}} = 48$

Ответ: а) 10; б) 48.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$63 \mid 2^{64} \cdot 38$~~

$38 \cdot 63 (2^{64}+1) + 70 \cdot 63 = 63$

$2^7(2^{63}-1)$

$2^{64}(2^6 \cdot 38 \cdot 63 - 2^6) + 128 + 63(108)$

$63 \cdot 38 = 504 + 189 = 2394$

$2394 - 64 = 2330$

$2330 \cdot 2^{64}$

$108 \cdot 63 = 324 + 648 = 6804$

$6804 + 128 = 6932$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha} \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\overset{A}{\cos(\alpha+\beta)} - \overset{B}{\cos(\alpha-\beta)} = -\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(A) - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\overset{A}{\sin(\alpha+\beta)} - \overset{B}{\sin(\alpha-\beta)} = 2\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(A) - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cdot \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\frac{A+B}{2}$

$x^2-4x+3=0$

$D = 4-3=1$

$x_{1,2} = 2\pm1$

$y^{-2} = -2y^{-3}$

$128 + 64 = 192$

$48 \times 4 = 192$

$3^{\lg x} = x^{\lg 3}$

$\lg x \ln 3 = \ln x \cdot \lg 3$

$\frac{\lg x}{\lg 3} = \frac{\ln x}{\ln}$

$y = t^{\lg(-t)}$

$\ln y = t^{\lg(t)}$

$135 : 5 = 27$

$3375 : 5 = 675$

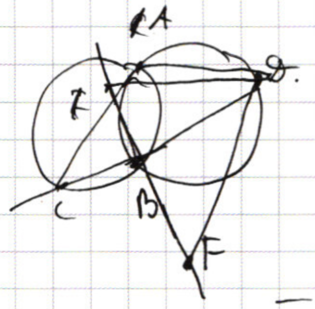
$675 : 5 = 135$

$3^3 \cdot 5^3$

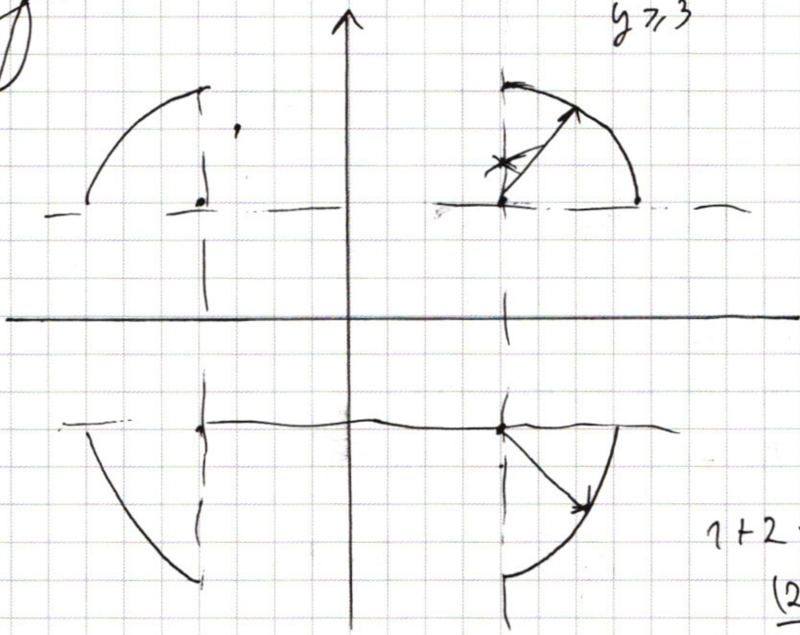
$56 \cdot 3 = 168$

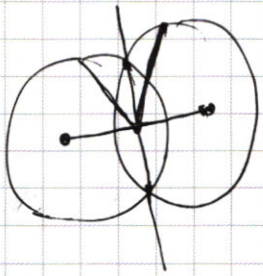
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$x \geq 4$
$y \geq 3$





$1+2+4=7$

$\frac{(2^3-1)}{7} =$

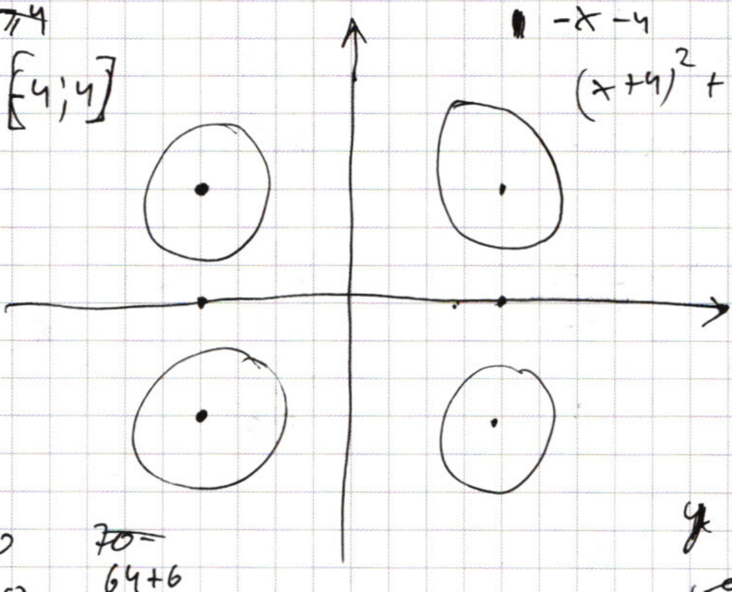
~~$x \geq 4$~~

$x \in [4;4]$

$-x-4$

$(x+4)^2 + \quad y \in [-3;3]$

$-y$



$x \geq 0$
$y \geq 0$

$(x-4)^2+(y-3)^2 \geq 0$

$x \leq 0$
$y \leq 0$

$70 = 64+6$

$x = 32 \quad 2^5$

$64y + 7 = \frac{76}{2} = 38$

$70 - 16 = 54$

$2^{32} + 6 \cdot 2^{65} = 70$

$2^6 = 64$

$64 + 7 = 71$

$70 - 64 = 6.$

$y(x) = 2^{64} - 2^x - 1 = 2^{64} - \frac{2^x}{\ln 2}$

$x = 63$

$2^{62} + 6 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} \cdot 62 -$

$2^{62}(1 + 6 \cdot 8) = 70 + 2^{64 \cdot 62} - 62$