

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ — следовательно, восьмизначное число может состоять либо из 3-х пятёрок, 3-х троек и 2-х единиц, либо из 3-х пятёрок, ~~2-х~~ тройки, девятки и трёх единиц. Рассмотрим 1-й случай:

— способов выбрать позиции для пятёрок = C_8^3

— способов выбрать позиции для троек = C_5^3

$$\text{Всего чисел} - C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

Рассмотрим второй случай:

— способов выбрать позиции для пятёрок — C_8^3

— способов выбрать позицию для тройки — 5 (C_5^1)

— способов выбрать позицию для девятки — 4 (C_4^1)

$$\text{Всего чисел} - C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8! \cdot 5 \cdot 4}{5! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 56 = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680 \quad \text{Ответ: } 1680.$$

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x + \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(-\sqrt{2} \sin 4x - \cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 & (1) \\ -\sqrt{2} \sin 4x - \cos 7x + \sin 7x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cos 7x + \sin 7x = 0$$

а) $\cos 7x = 0$: $0 + \sin 7x = 0 \rightarrow$ не подходит по основному тригонометрическому тождеству, т.к. $\sin^2 7x + \cos^2 7x \neq 1$

б) $\cos 7x \neq 0$ делим на $\cos 7x$:

$$1 + \operatorname{tg} 7x = 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) -\sqrt{2} \sin 4x - \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x \quad | : \sqrt{2}$$

$$-\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x$$

$$-\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi s, s \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi s, s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

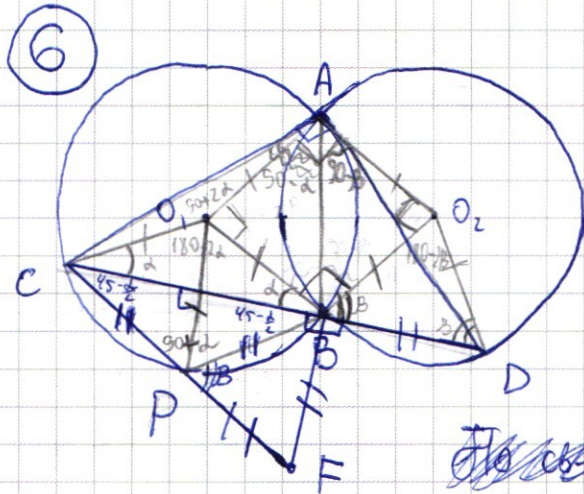
Ответ:

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi s, s \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: $r_1 = r_2 = 5$

$\angle CAD = 90^\circ$, $B \in CD$

$BF = BD$

а) Найти CF .

~~$\angle CAD = 90^\circ$, $BA \perp AC$, $BA \perp AD$
 $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow CA \perp AD$ к окр. 2~~

~~По св-ву кас. кас. $DA^2 = DB \cdot DC$
 $CA^2 = CB \cdot DC$~~

Пусть $\angle O_1CB = \angle O_1BC = \alpha$ ($\triangle O_1CB$ - равнобедренный), тогда $\angle CO_1B = 180 - 2\alpha$.
 $\angle CO_1B$ - центральный, $\angle CAB$ - вписанный, опир. на одну дугу $\Rightarrow$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CO_1B = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

Пусть $\angle O_2BD = \angle O_2DB = \beta$ ($\triangle O_2BD$ - равноб.), тогда $\angle BO_2D = 180 - 2\beta$.
 $\angle BO_2D$ - центральный, $\angle BAD$ - вписанный, опир. на одну дугу $\Rightarrow$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BO_2D = \frac{180 - 2\beta}{2} = 90 - \beta$$

$$\angle CAD = 90^\circ = \angle CAB + \angle BAD = 90 - \alpha + 90 - \beta$$

$$90^\circ = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle CBO_1 + \angle O_1BO_2 + \angle DBO_2 = 180^\circ: \alpha + \angle O_1BO_2 + \beta = 180^\circ \Rightarrow \angle O_1BO_2 = 90^\circ$$

AO_2BO_1 - ромб (все стороны - радиусы окр., равны 5), $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle AO_1B = \angle BO_2A = 90^\circ \Rightarrow AO_2BO_1$ - квадрат.

$$AB = O_1O_2 = 5\sqrt{2} \text{ (диагональ квадрата)}$$

$\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_1B$ - центральный, $\angle ACB$ - вписанный, опир. на одну дугу $\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle ACD$ - прямоугольный, равнобедренный, $AC = AD$. $CD = AD\sqrt{2} = AC\sqrt{2}$.

Пусть $CF \cap \text{окр. } \Gamma = P$. $\angle CAB, \angle CPB$ — вписанные, опир. на одну дугу с разных сторон $\rightarrow \angle CPB = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.

$$\angle BPF = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \beta.$$

Проверим радиус OP . $\angle POB = 2\angle PCB$ (центр. ^{центральный}, впис., опир. на одну дугу). По лемме о треугольнике $OC = OP = OB \Rightarrow CP = PB \Rightarrow \triangle CPB$ — равнобедренный. $\angle PCB = \angle PBC = \frac{180^\circ - 90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

В равнобедренном треугольнике перп. $\rightarrow$

$$\angle PBF = 90^\circ - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

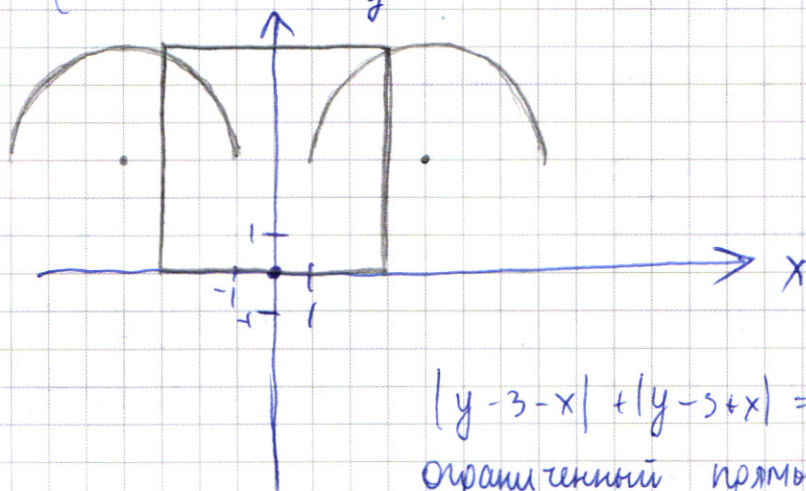
$$\angle BFP = 90^\circ - \angle BCF = 90^\circ - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BF = PF$$

$CP = PF = PB$ ~~и т.д.~~ $\Rightarrow$ в $\triangle$ прямоугольном $BF = \frac{1}{2} CF \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCF = 30^\circ \Rightarrow 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

$\angle O_2DB$: все углы равны $\beta \Rightarrow BD = 5$. $BF = BD$ (по у.с.) $\Rightarrow BF = 5$. $CF = 2 \cdot BF = 10$. Ответ: 10.

⑤
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$
 — полукруги с радиусом $\sqrt{a}$



$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ описывает квадрат, ограниченный прямыми $x=3$, $x=-3$, $y=6$, $y=0$

Два решения $\Rightarrow a \geq 1$ (т.к. расстояние от центра окр. до квадрата $= 1$, $a < 49$, т.к. при $a = 49$ каждая из двух полуокружностей пересекает квадрат два раза $\Rightarrow$ решений 4).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\left(\frac{y^5}{\lg x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad (2)$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (1)$

(1) Метод непр. коэффициентов:

$(x+y+a)(bx+cy) = x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y$

$bx^2 + bxy + bx + cxy + cy^2 + acy = x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y$

$$\begin{cases} b=1 \\ ab=-4 \\ a+b=-2 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

$(x+y-4)(x-3y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ x=y+4 \end{cases}$

(2) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

$y^{5\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$

$y^{2\lg x} \neq 0$, делим на $y^{2\lg x}$

$y^{3\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg y}$

$x^{-\lg x} = y^{\lg \frac{y^2}{x^3}}$

$x^{-\lg x} = y^{\lg \frac{y^2}{x^3}}$

a) $(3y)^{-\lg 3y} = y^{\lg \frac{y^2}{3^3}}$

$(3y)^{-\lg 3y} = y^{\lg \frac{y^2}{27}}$

$(3y)^{-\lg 3y} = y^{-\lg 27 - \lg y} = y^{-\lg 27 - \lg y}$

$(3y)^{-\lg 3y} = y^{-\lg 27 - \lg y}$

$$(3y)^{-\lg 3y} = y^{-3\lg 3 - \lg y}$$

$$3^{-\lg 3y} \cdot y^{-\lg 3y} = y^{-3\lg 3} \cdot y^{-\lg y}$$

$$3^{-\lg 3y} \cdot y^{-\lg 3} \cdot y^{-\lg y} = \cancel{y^{-\lg 3}} \cdot y^{-3\lg 3} \cdot y^{-\lg y}$$

$y^{-\lg y} \neq 0$, делим на $y^{-\lg y}$

$$3^{-\lg 3y} \cdot y^{-\lg 3} = y^{-3\lg 3}$$

$$3^{-\lg 3y} = y^{-3\lg 3 + \lg 3}$$

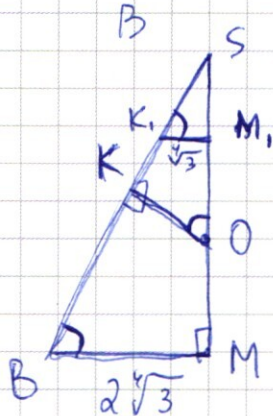
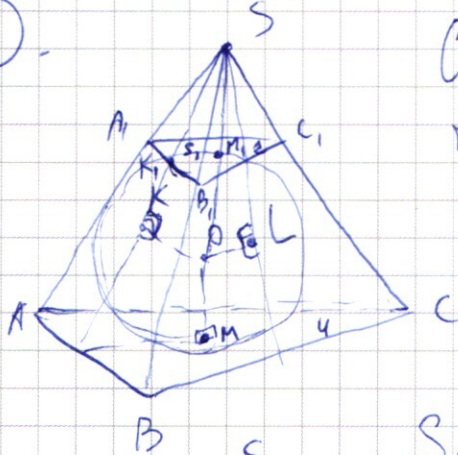
$$3^{-\lg 3y} = y^{-2\lg 3}$$

$$\delta) (y+4)^{-\lg 3y} = y^{\lg \frac{y^2}{(y+4)^3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ на задание 5: $a \in [1; 49]$.

4.



Сфера вписана в трехгранный угол $\Rightarrow$ трехгранный угол (точнее, его часть) образует правильную пирамиду. $SO \perp (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = 4$, $(A_1B_1C_1)$ касается сферы, $SO \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow (A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$,

$$S_{A_1B_1C_1} = 1$$

$$M_1 = SM \cap (A_1B_1C_1), K_1 = SK \cap (A_1B_1C_1)$$

Пирамида правильная $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4$

$$a^2 \sqrt{3} = 16$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$MB - \text{радиус окр. вокруг } ABC \Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Аналогично. } A_1B_1 = a_1, S_{A_1B_1C_1} = \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

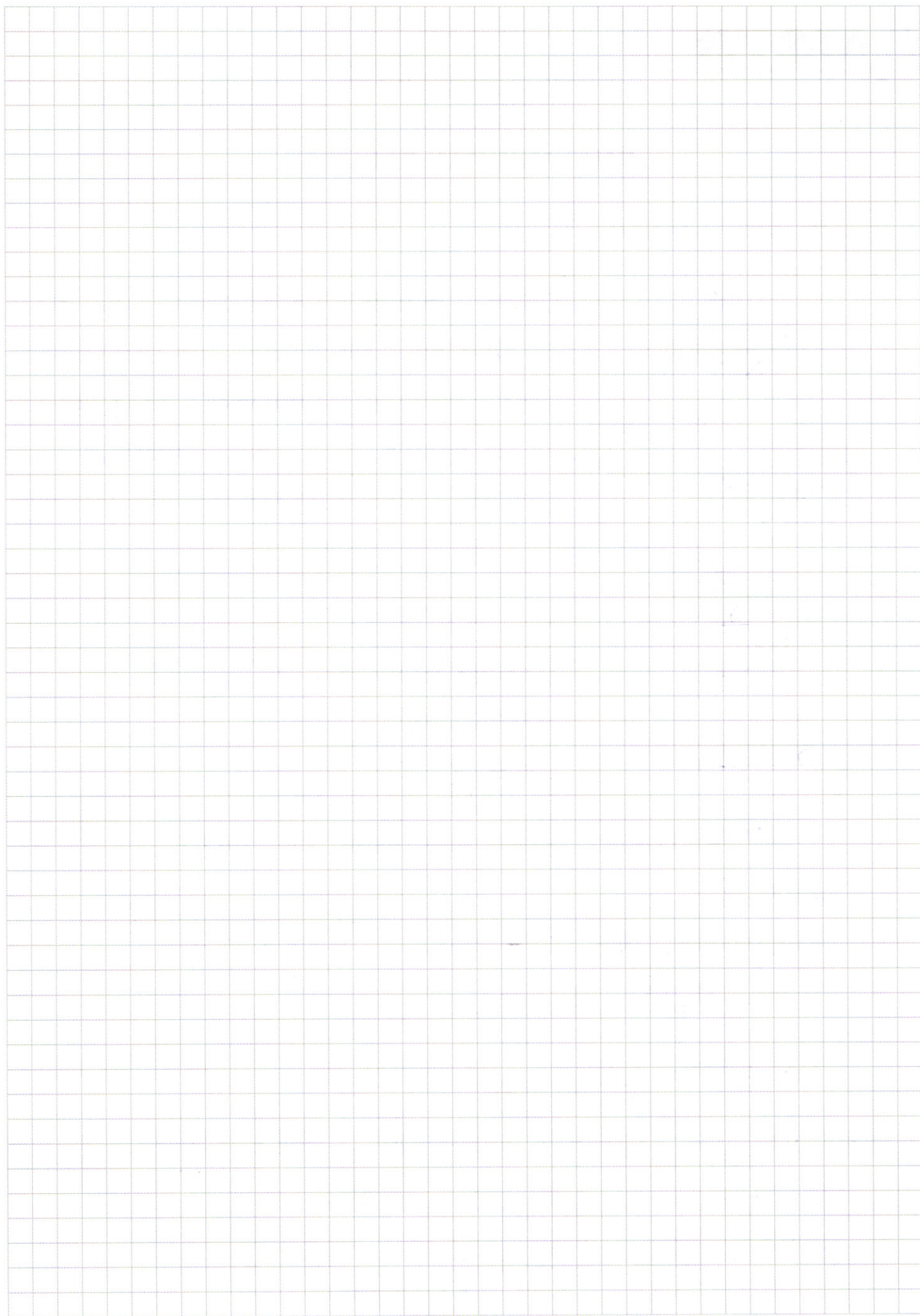
$$M_1K_1 = \frac{a_1 \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$SM_1 : SM = \frac{K_1M_1}{KM} (\Delta \text{ подобны}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1K_1 - \text{ср. линия} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R_{\text{сф}} = \frac{1}{2} SM \Rightarrow R_{\text{сф}} = \frac{1}{4} SM \quad OK = \frac{1}{4} SM$$

$$SO = SM_1 + M_1O = 2R_{\text{сф}} + R_{\text{сф}} = 3R_{\text{сф}}$$

$$\sin KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R_{\text{сф}}}{3R_{\text{сф}}} = \frac{1}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3}.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \overline{) 135} \\ -10 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \text{где единицы}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 + 3 \text{ единицы}$$

$$\textcircled{2} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \cos 7x \sin 4x - \sin 7x \cos 4x$$

$$- \sin 7x \cos 4x - \cos 7x \sin 4x + \sin 7x \cos 4x - \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$- 2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$- \sqrt{2} \sin 7x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x \sin 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x - \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$$

$$\varphi = 2\beta$$

$$\triangle AOB: AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \varphi$$

$$\triangle ACB: AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\angle BO_2D = 180 - 2\beta \quad \angle BAD = 90 - \beta$$

$$\angle COB = 180 - 2\alpha$$

$$\angle CAB = 90 - \alpha$$

$$\alpha + 90 - \beta + 90 - \beta + \beta = 180$$

$$\alpha = \beta$$

$$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 180 - \alpha - \beta$$

$$180 - \alpha - \beta = 90$$

$$\alpha + \beta = 90$$

⑥ $r_1 = r_2 = 5$

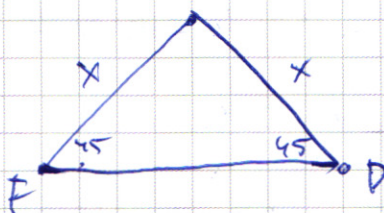
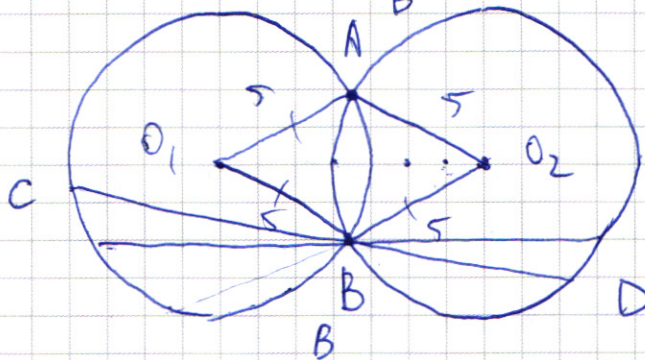
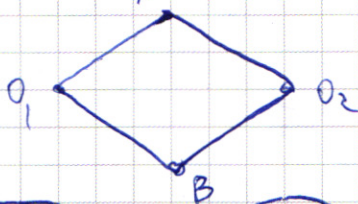
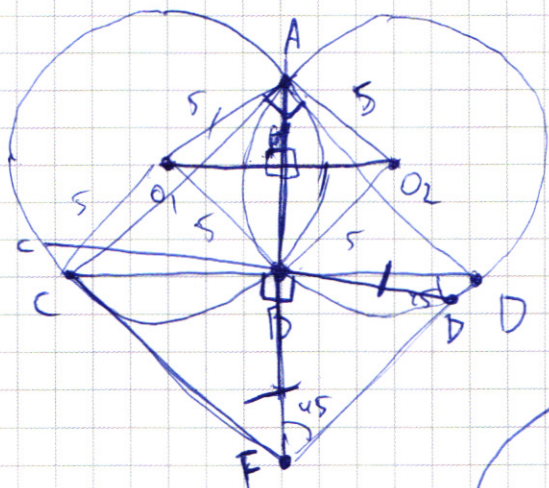
$BE \perp CD \quad \angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

Найти CF.

AO_2BO_1 - ромб.

$AB \perp O_1O_2$



$\angle O_1BA = \angle O_2BA =$
 $\angle O_1AB = \angle O_2AB$

⑤ (2) $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

~~$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$~~

$BF = BA = 5\sqrt{2}$

$AF = 10\sqrt{2} \rightarrow CF = 10$

$BC = 6: 6^2 + (5\sqrt{2})^2 = 100^2 \quad 36 + 2 \cdot 25 = 100$

$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow AD$ - кас. к. окр. 1, аналог. CA - кас. к окр. 2.

$DA^2 = DB \cdot CD = \cancel{DB \cdot BE}$

$x^2 + BC^2 = CF^2$

$CA^2 = CB \cdot CD$

$\left(\frac{DA}{CA}\right)^2 = \frac{DB}{CB}$

$\angle AO_1B = 180 - 2\alpha$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AO_1B = 90 - \alpha$

$\angle AO_2B = 180 - 2\alpha$

$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AO_2B = 90 - \alpha$

AO_2BO_1 - клепан

$\triangle CAD: \angle CAD + \angle ACB + \angle ADB = 180$

$270 - 2\alpha = 180$

$2\alpha = 90$

$\alpha = 45$

$AB = O_1O_2 = \sqrt{2} \cdot 5$

$\frac{DB}{CB} = 1 \quad 90 + 90 - \alpha + 90 - \alpha = 180$
 $ADFC$ - параллелограмм $AC = AD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$
 $y-3-x=0 \quad y-3+x=0$
 $y=x+3 \quad y=-x+3$
 $-x+3 < x+3$
 $-x < x, \quad x > 0$
 $-x > x, \quad x < 0$

1. $x > 0$

$y = x+3$
 $-x+3$
 $-x+3$
 $x+3$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha -$
 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
 $2\sin\beta\cos\alpha$

1а. $-y+3+x - y+3-x = 6$
 $-2y = 0 \quad y = 0$

1б. $-y+3+x + y-3+x = 6$
 $2x = 6 \quad x = 3$

1в. $y-3-x + y-3+x = 6$
 $2y = 12 \quad y = 6$

$\beta = \frac{t-k}{2}$
 $\alpha = \frac{t+k}{2}$

$180 - 2\alpha = 80 + \alpha$
 $90 - 3\alpha$
 $\alpha = 30$

③

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$x > 0$$

$$xy > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} (y^5 x^{-1})^{\lg x} &= y^{5 \lg x} x^{-\lg x} \\ y^{5 \lg x} x^{-\lg x} &= y^{2 \lg x + 2 \lg y} \\ y^{5 \lg x} \cdot y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} &= y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \\ y^{8 \lg x} \cdot x^{-\lg x} &= y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \\ y^{6 \lg x} \cdot x^{-\lg x} &= y^{2 \lg y} \\ x^{-\lg x} &= \frac{y^{2 \lg y}}{y^{6 \lg x}} \end{aligned}$$

$$x^{-\lg x} = \frac{y^{2 \lg y}}{y^{6 \lg x}}$$

$$x^{-\lg x} = y^{\frac{2 \lg y}{6 \lg x}}$$

$$x = \frac{11}{8} = \frac{5\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{8} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{8 \cdot 5\pi}{11} + \frac{2}{11} \pi k$$

$$-\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{4\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x+y+a)(bx+cy) = 0$$

$$bx^2 + cxy + bxy + abx + acy + cy^2 = 0$$

$$bx^2 + (b+c)xy + abx + acy + cy^2 = 0$$

$$c = -3$$

$$b = 1$$

$$180 - 90 + d = 90 + d$$

$$b+c = -2 \quad ab = -4 \Rightarrow a = -4$$

$$360 - 90 - 180 + 2d = 90 + 2d$$

$$\frac{180 - 90 - d = 90 - d}{AD} = \frac{FD}{CD}$$

$$\frac{180 - 90 - 2d}{2} = \frac{90 - 2d}{2} = 45 - d$$

$$\frac{90 + d}{2} = 90 - 45 + \frac{d}{2}$$

$$45 -$$

$$90 - d - (45 - d) = 45$$