МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

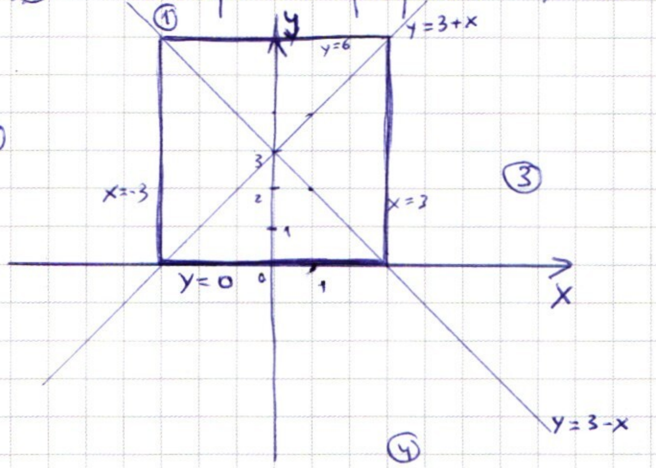
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$?a, 2 решения?

Решим I уравнение:

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$ Нули модулей: $y=3+x$, $y=3-x$

① Построим графики $y=3+x$ и $y=3-x$



Получили 4 области!

1) $\begin{cases} y\geq 3+x \\ y\geq 3-x \end{cases}$

$y-3-x+y-3+x=6$

$2y-6=6$

$y=6$ ← построим

2) $\begin{cases} y>3+x \\ y<3-x \end{cases}$

$y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$ ← построим

3) $\begin{cases} y<3+x \\ y>3-x \end{cases}$ $-y+3+x+y-3+x=6$

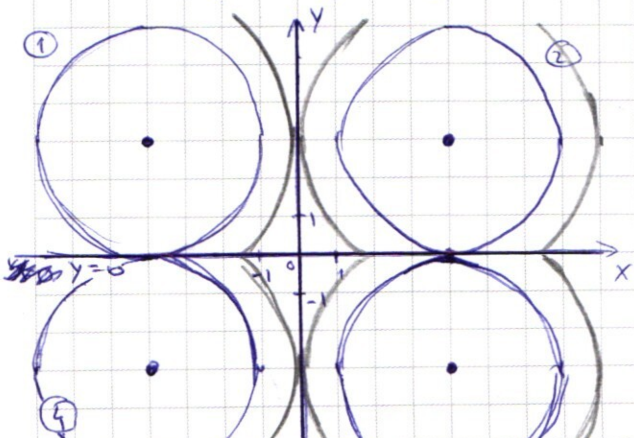
$2x=6$ $x=3$ ← построим

4) $\begin{cases} y\leq 3+x \\ y\leq 3-x \end{cases}$ $-y+3+x-y+3-x=6$

$-2y=0$ $y=0$ ← постр

Решим II уравнение:

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$ Нули модулей: $x=0$, $y=0$



Построим нули модулей

Получим 4 области:

1) $\begin{cases} x<0, \\ y>0 \end{cases}$ $(x+4)^2+(y-3)^2=a$ - это ур-ние окружности с радиусом $\sqrt{a}$ (Заметим, что $a\geq 0$, т.к. $(x+4)^2\geq 0$ и $(y-3)^2\geq 0$)

Центр окружности в точке $(-4,3)$

2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$

Центр окруж-ти в точке $(4,3)$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ $(x-4)^2 + (y+3)^2 = a$

Центр окр-ти в точке $(4;-3)$

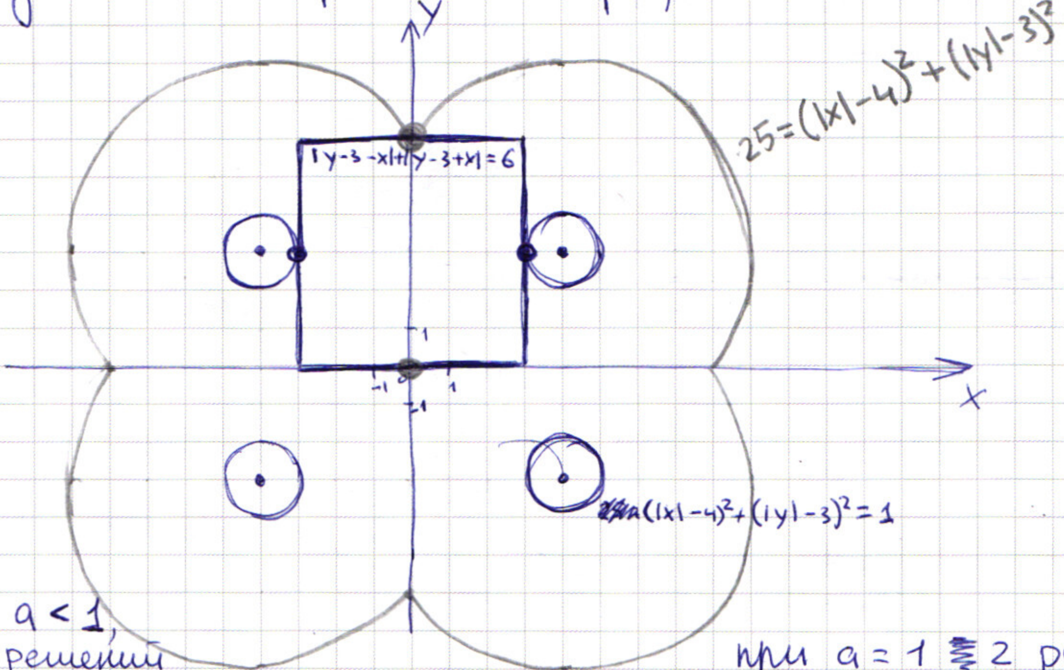
4) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ $(x+4)^2 + (y+3)^2 = a$

Центр окр-ти в точке $(-4;-3)$

При $a = 9$ Радиус окр-тей равен 3

При $a = 16$ радиус окр-тей равен 4

Объединим построенные графики. 2 точки пересеч.



при $a < 1$, нет решений

при $a = 1$ 2 решения

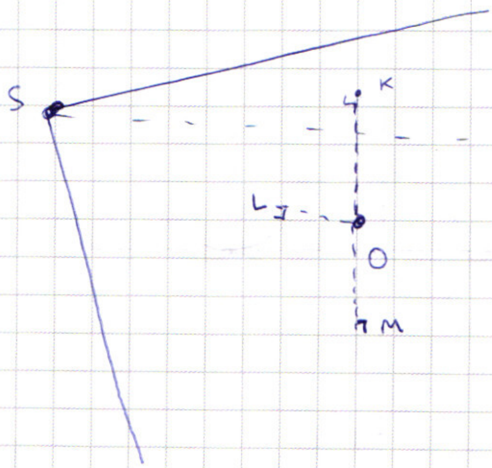
при $a \in (1; 25)$ - 4 решения

при $a = 25$ 2 решения

при $a > 25$ нет решений

Ответ: $a \in \{1; 25\}$

$\boxed{№4}$ Окружность $Sph(O, r)$



Центр окружности лежит на пересечении биссекторных пл-тей

$[SO) \cap Sph(O,r) = \{X, Y\}$

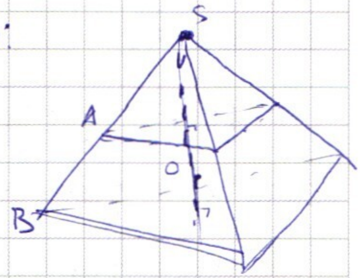
~~X, Y - точки касания~~

Б.О.О. $SX < SY$

Из условия есть два

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сечения A и B, ~~такие, что~~ перпендикулярные SO:



Запишем объёмы пирамид, с сечениями A, B и точкой S

$\underline{V_A} = \frac{1}{3} \cdot SX \cdot S_A \qquad V_B = \frac{1}{3} SY \cdot S_B$

$\frac{V_A}{V_B} = \frac{SX}{4SY}$

~~Окружность~~ Sph(O, r) зажата м/у сечениями A и B

$\Rightarrow \quad SY - SX = 2r$

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cancel{\cos(14x-3x) - \cos 3x - \sin(14x-3x) + \sin 3x = \sqrt{2}\cdot\cos 14x}$

$\cancel{\cos(14x-3x) = \cos 14x\cdot\cos 3x + \sin 14x\cdot\sin 3x}$

$\cancel{\sin(14x-3x) = \sin 14x\cdot\cos 3x - \sin 3x\cdot\cos 14x}$

$\cancel{\cos 14x\cdot\cos 3x + \sin 14x\cdot\sin 3x - \cos 3x - \sin 14x\cdot\cos 3x + \sin 3x\cdot\cos 14x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x}$
$= \sqrt{2}\cdot\cos 14x$

$\cancel{\cos 3x(\cos 14x - 1 - \sin 14x) + \sin 3x(\sin 14x + \cos 14x + 1) = \sqrt{2}\cdot\cos 14x}$

$\cancel{\cos 14x(\cos 3x + \sin 3x) + \sin 14x(\sin 3x - \cos 3x) - \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}\cdot\cos 14x}$

$\cancel{\cos 14x(\cos 3x + \sin 3x) + (\sin 14x + 1)(\sin 3x - \cos 3x) = \sqrt{2}\cdot\cos 14x}$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\cdot\sin\frac{11x-3x}{2}\cdot\sin\frac{11x+3x}{2}$

$\sin 11x - \sin 3x = +2\sin\frac{11x-3x}{2}\cdot\cos\frac{11x+3x}{2}$

$\sqrt{2}\cdot\cos 14x = -2\cdot\sin 4x\cdot\sin 7x - 2\cdot\sin 4x\cdot\cos 7x = -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)$

$\sqrt{2}\cdot(\cos(7x+7x)) = \sqrt{2}\cdot(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = -2\cdot\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)$

$\sqrt{2}\cdot(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = -2\cdot\sin 4x\cdot(\sin 7x + \cos 7x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot(\cos 7x - \sin 7x) = -2\cdot\sin 4x \\ \cos 7x + \sin 7x = 0 \end{array}\right.$

$\cos 7x = \cos(4x+3x) = \cos 4x\cdot\cos 3x - \sin 4x\cdot\sin 3x$

$\sin 7x = \sin(4x+3x) = \sin 4x\cdot\cos 3x + \sin 3x\cdot\cos 4x$

$\cos 7x - \sin 7x = \cos 4x\cdot\cos 3x - \sin 4x\cdot\sin 3x - \sin 4x\cdot\cos 3x - \sin 3x\cdot\cos 4x =$
$= \cos 4x(\cos 3x - \sin 3x) - \sin 4x(\sin 3x + \cos 3x) = -\sqrt{2}\cdot\sin 4x$

$(\cos^2 2x - \sin^2 2x)\cos 3x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\sin 3x - 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x - 2\sin 2x\cos 2x\cdot\cos 3x =$
$= \cos 3x(\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x) - \sin 3x(\cos^2 2x - \sin^2 2x + 2\sin 2x\cdot\cos 2x) =$
$= \cos 3x -$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos(7x) - \sin 7x) = \sin 4x$ $\qquad -2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 7x = \cos\frac{7x+\pi}{4} - \cos\frac{7x-\pi}{4}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos 7x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 7x = \sin 4x$

$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7x-\pi}{4} - \sin\frac{7x+\pi}{4} - \cos\frac{7x+\pi}{4} + \cos\frac{7x-\pi}{4}\right) = \sin 4x$

$\cos 7x = -\sin 7x \Rightarrow 7x = \pi k - \frac{\pi}{4}, \ k\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi k}{7} - \frac{\pi}{28}, \ k\in\mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x=1 \quad y=0$

$x=0 \quad y=1$

$x=2 \quad y=1$

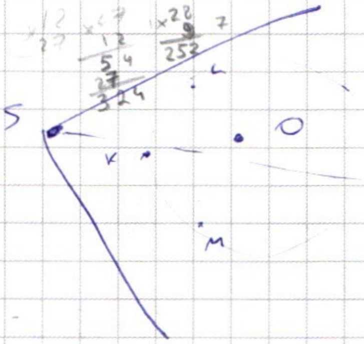
$\frac{64}{27}-\frac{32}{9}-\frac{28}{3}+12=$

$=64+324-96-252=388-348$

$\frac{1}{8}-\frac{2}{4}-\frac{7}{2}+12$

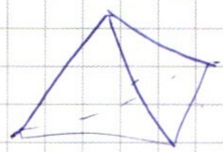
$\frac{27}{8}-\frac{18}{4}-\frac{21}{2}+12=$

$=96+27-36-84$

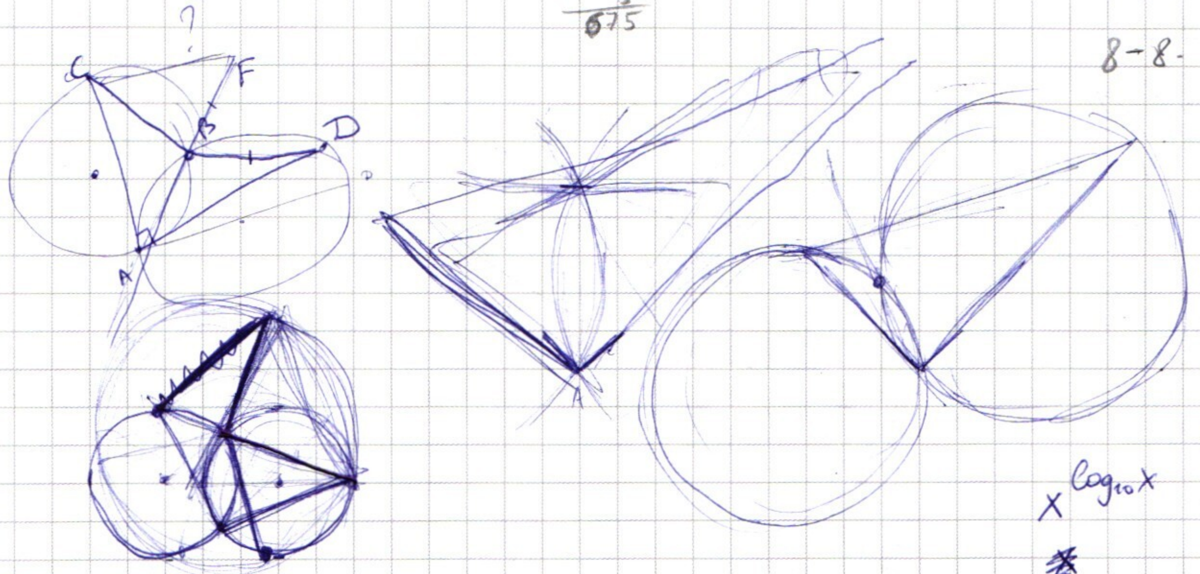


$675 \cdot 5 = 3375$

$135 \cdot 5 = 675$



8 − 8 −



$10^4 = x$

$x^{\log_{10} x}$

$27-18-21+12$

$7x = \frac{a+b}{2}$

$\frac{\pi}{4} = \frac{a-b}{2}$

$a = 7x+\frac{\pi}{4}$

$b = 7x-\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{4} = \frac{a-b}{2}$

$\frac{a+b}{2} = 7x$

$a = 7x-\frac{\pi}{4}$

$b = 7x+\frac{\pi}{4}$

№1

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Восьмизначные числа => ~~ед~~ ещё 2 „1"

Тогда любое восьмизначное число из условия состоит из 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1

~~Составим на пер~~

N – искомое кол-во восьм. чисел

$$N = \frac{A_8}{A_3 A_3 A_2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10\cdot56 = 560$$

Ответ: 560

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log_{10} x} = y^{2\log_{10} xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ xy>0 \\ x\neq0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

~~Решим I ое ур-ние~~

Из ОДЗ: $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$

$$\frac{y^{5\log_{10} x}}{x^{\log_{10} x}} = y^{2\lg x + 2\lg y}$$

$$y^{3\lg x} = x^{\lg x}\cdot y^{2\lg y}$$

$10^a = x \quad 10^b = y$

$\lg x = a \quad \lg y = b$

$$y^{3a} = x^a\cdot y^{2b} = 10^{a^2}\cdot10^{2b^2} = 10^{3ba}$$

$$\frac{10^{a^2}}{10^{ab}}\cdot\frac{10^{2b^2}}{10^{2ab}} = 1 = 10^{a^2-ab}\cdot10^{2(b^2-ab)} = 10^0$$

$a^2-ab+2b^2-2ab=0$

$a^2-3ab+2b^2=0$

$b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=1,\ y=1$ подставим в о II ое выраж:

$1^2-2\cdot1\cdot1-4\cdot1-3\cdot1^2+12\cdot1 = 4\neq0$

=> можем делить на b^2:

Замена: $t=\frac{a}{b}$

$t^2-3t+2=0 \qquad (t-1)(t-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} a=b \quad (1) \\ a=2b \quad (2) \end{array}\right.$

(1) => $x=10^a=10^b=y$

(2) => $x=10^a=10^{2b}=y^2$

Решим II ~~выраж~~ из урав-ние используя (1):

$x^2-2x^2-4x-3x^2+12x=0=-4x^2+8x$

$x(x-2)=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=y=0 \text{ не удовл ОДЗ} \\ x=y=2 \end{array}\right.$

Решим II ур-ние используя (2):

$y^4-2y^3-4y^2-3y^2+12y=0=y^4-2y^3-7y^2+12y$

$y(y^3-2y^2-7y+12)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0=x \quad \text{не удовл. ОДЗ} \\ y^3-2y^2-7y+12=0 \end{array}\right.$

$y=3: \quad 27-2\cdot 9-7\cdot 3+12 = 6+12-18=0 \quad \Rightarrow y=3$ - корень

$$\begin{array}{r|l} -\,y^3-2y^2-7y+12 & y-3 \\ \underline{y^3-3y^2} & \overline{y^2+y-4} \\ -\,y^2-7y & \\ \underline{y^2-3y} & \\ -\,-4y+12 & \\ \underline{-4y+12} & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3, \ x=9 \\ y^2+y-4=0 \end{array}\right.$

$y^2+y-4=0$

$D=1+16=17$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$y_1^2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}\right)^2 = \frac{18-2\sqrt{17}}{4}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

$y_2^2=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right)^2=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(x,y)=\{(2,2);(9,3);\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\}$

$\boxed{№7}$ $\begin{cases} y>2^x+3\cdot 2^{65} \\ y\le 70+(2^{64}-1)x \end{cases}$

$2^x+3\cdot 2^{65}<70+x\cdot 2^{64}-x$

$2^x+2^{64}(6-x)<70-x$

$2^x+3\cdot 2^{65}-2^{64}x+x-70<0$

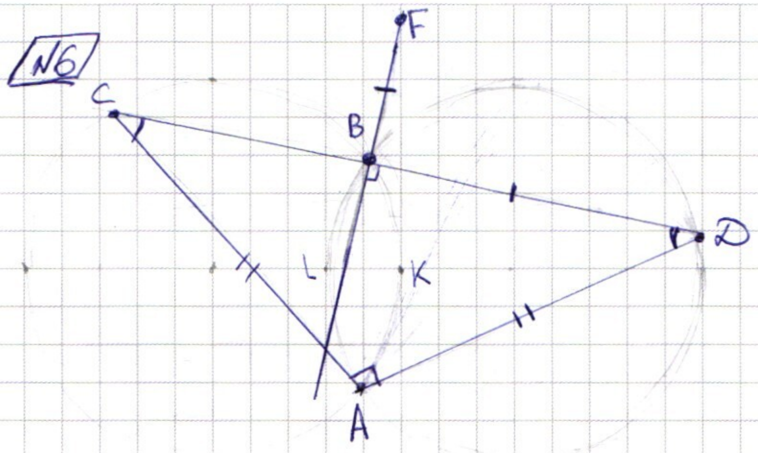
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$CF - ?$

$\hat{A} = \dfrac{\smile CB + \smile BD}{2}$

т.к. $\angle C$ и $\angle D$ опираются на дуги $\smile AKB$ и $\smile ALB$ соответственно,

где $\smile AKB = \smile ALB$ и радиусы совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = \angle D$

$\Rightarrow AC = AD$

~~1 случай: $\smile BA < \smile AB$~~

~~Рассмотрим $\triangle ABC$ ⊙ $\angle CAB \Rightarrow$~~

~~$\frac{FD}{CD} = \frac{BF}{AC}$~~

~~$BF\sqrt{2}$~~

$AB = \sqrt{2} \cdot R$, т.к. $\smile ALB = 90°$

$\triangle BFD \sim \triangle ACD$, по двум углам

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА