

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✗ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . 10
- ✓ б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF . 48
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1/1 Заметим, что $3375 = 5^3 \cdot 3^3$. Следовательно, возможные следующие варианты наборов цифр в числе:

1) В числе есть три цифры "5", три цифры "3" и две цифры "1". Тогда кол-во таких чисел равно: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} (C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2)$.

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560 \text{ вар.б}$$

2) В числе 3 цифры "5", одна цифра "3", одна цифра "9" и 3 цифры "1". Кол-во вариантов равно $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 1120 \text{ вар.б}$

В сумме получаем $560 + 1120 = 1680 \text{ вар.б}$

Ответ: 1680 вар.б

1/2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x \quad | : \sqrt{2} \neq 0$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x - \cos 14x = 0 \quad | \cdot (-2) \neq 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x + \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin 4x + \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

или

$$\sin 4x + \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cos \left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0 \quad | \cdot (-1) \neq 0$$

или

$$\cos \left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{11} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{11} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$0.23: \begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1): \frac{y^{\frac{5 \lg x}{x \lg x}}}{x^{\lg x}} &= y^{2(\lg x + \lg y)} \\ \frac{y^{\frac{5 \lg x}{10}}}{10} &= y^{2 \lg x} \cdot (y^{\lg y})^2 \quad | \cdot \frac{10}{y^{2 \lg x}} \neq 0 \\ y^{\frac{5 \lg x - 2 \lg x}{10}} &= 10 \cdot 10^2 \\ y^{\frac{3 \lg x}{10}} &= 10^3 \\ y^{\lg x} &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y &= 0 \\ \text{Решим кв. ур-е отн. } x: \\ \frac{D}{4} = (y+2)^2 - (-3y^2 + 12y) &= y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = \\ = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2 & \quad \begin{cases} y+2+2y-2=3y \\ y+2+2y-2=4-y \end{cases} \\ x_{1,2} = y+2 \pm 2(y-1) &= \end{aligned}$$

$$\Delta \quad x = 3y:$$

$$\begin{aligned} \lg 3y &= 10 \\ y^{\lg 3y} &= 10^1 \\ 10^{\lg 3y \lg 3y} &= 10^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg y \lg 3y &= 1 \\ \lg y (\lg 3 + \lg y) &= 1 \\ \lg^2 y + \lg 3 \lg y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \quad \lg y &= t \\ t^2 + \lg 3 t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \lg^2 3 + 4 \\ t_{1,2} &= \frac{-\lg 3 \pm \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2} \end{aligned}$$

$$\lg y = \frac{-\lg 3 - \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}$$

$$y = 10^{\frac{-\lg 3 - \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}}$$

$$x = 3 \cdot 10^{\frac{-\lg 3 - \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}}$$

$$\lg y = \frac{-\lg 3 + \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}$$

$$y = 10^{\frac{-\lg 3 + \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}}$$

$$x = 3 \cdot 10^{\frac{-\lg 3 + \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}}$$

$$\Delta \quad x = 4-y:$$

$$\begin{aligned} \lg(4-y) &= 10 \\ y^{\lg(4-y)} &= 10^1 \\ 10^{\lg y \lg(4-y)} &= 10^1 \end{aligned}$$

$$\lg y (\lg(4-y)) = 1$$

$$\Delta \quad y = 1: \quad 0 \cdot \lg 3 = 1 - \text{неверно}$$

$$\Delta \quad y \neq 1:$$

$$\frac{1}{\lg_y 10} \cdot \frac{\lg_y(4-y)}{\lg_y 10} = 1 \quad | \cdot \lg_y 10 \neq 0$$

$$\lg_y(4-y) = \lg_y^2 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy + 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(2): x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

Решим кв. урав. отн. x :

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 - 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$x_{1,2} = y+2 \pm 2(y-1) = \begin{cases} 3y \\ y+4 \end{cases}$$

$$x = 3y:$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$\lg \frac{y^4}{3} \cdot \lg 3y = 2\lg y \lg 3y^2$$

$$\lg \frac{y^4}{3} \cdot \lg 3y = 2\lg y \lg 3y^2$$

$$\lg \frac{y^4}{3} \cdot \lg 3y = 2\lg y \lg 3y^2$$

$$(4\lg y - \lg 3)(\lg 3 + \lg y) = 2\lg y (\lg 3 + 2\lg y) \Rightarrow 4\lg^2 y + 4\lg 3 \lg y - \lg^2 3 = 4\lg^2 y + 2\lg y \lg 3$$

$$4\lg^2 y + 4\lg 3 \lg y - \lg^2 3 - \lg 3 \lg y = 2\lg^2 y + 2\lg 3 \lg y$$

$$2\lg^2 y + 2\lg 3 \lg y - \lg^2 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \lg^2 3 + 2\lg 3 \lg y - \lg^2 3 = 3\lg^2 3$$

$$\lg y = \frac{-\lg 3 \pm \sqrt{3}\lg 3}{2}$$

$$x = 4-y:$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(-y^2+4)}$$

$$\lg \frac{y^5}{4-y} \lg(4-y) = 2\lg y \lg(-y^2+4)$$

$$(\lg y^5 - \lg(4-y)) \lg(4-y) = 2(\lg y + \lg(4-y))$$

$$5\lg y \cdot \lg(4-y) -$$

$$5\lg y + \lg(4-y) - \lg^2(4-y) = 2\lg y + 2\lg(4-y)$$

$$\lg^2(4-y) + (2-5\lg y)\lg(4-y) + 2\lg y = 0$$

$$D = (2-5\lg y)^2 - 8\lg y = 25\lg^2 y - 20\lg y + 4 - 8\lg y =$$

$$= 25\lg^2 y - 28\lg y + 4$$

$$\lg 3 \lg y = \lg^2 3$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3, x = 9$$

$$\begin{aligned} (5 \lg y - \lg(4-y)) \lg(4-y) &= 2 \lg y \lg(y \cdot (4-y)) \\ 5 \lg y \lg(4-y) - \lg^2(4-y) &= 2 \lg^2 y + 2 \lg y \lg(4-y) \\ 2 \lg^2 y - 3 \lg y \lg(4-y) + \lg^2(4-y) &= 0 \\ D &= 9 \lg^2(4-y) - 8 \lg^2(4-y) = \lg^2(4-y) \\ \lg y &= \frac{3 \lg(4-y) \pm \lg(4-y)}{4} = \begin{cases} \lg(4-y) \\ \frac{\lg(4-y)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lg y = \lg(4-y)$$

$$y = 4-y$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$2 \lg y = \lg(4-y)$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 2), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$$

1.6

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

а-?, 2 решения

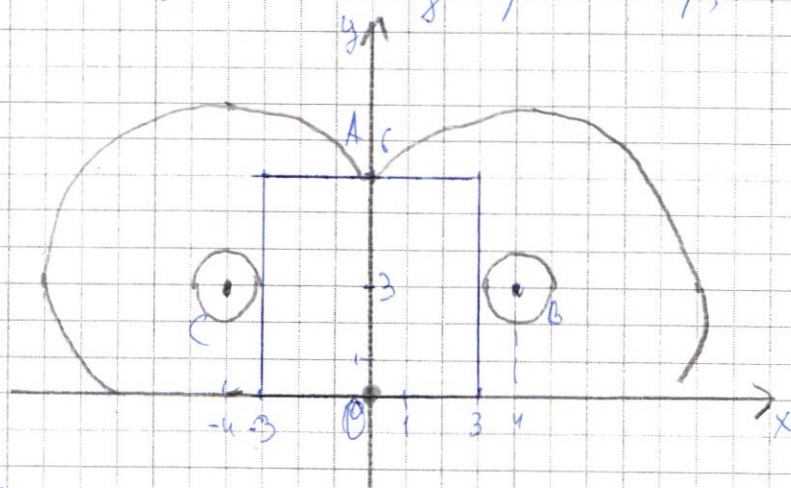
$$\begin{aligned} (1): \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6=6 \end{cases} & \text{ или } \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2x=6 \end{cases} & \text{ или } \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2x=6 \end{cases} & \text{ или } \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ 6-2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y=6 \end{cases} & \begin{cases} y \geq x+3 \\ y < x+3 \\ x=-3 \end{cases} & \begin{cases} x < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x=3 \end{cases} & \begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Графиком является квадрат с вершинами в точках $(3; 6), (-3; 0), (3; 0), (-3; 6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2). Графиком будет являться и окр-ти (или тж, если $a=0$), касающиеся в разных четвертях и с центрами в тж. $(\pm 4; \pm 3)$. Также окр-ть из одной четверти состоит только в своей четверти.

Заметим, что окр-ти с центром в тж. $(\pm 4; -3)$ лежат ниже оси абсцисс, а тж. их пересечения с этой осью совпадают с началом тж. у вершин окр, поэтому их можно опустить.



Для рис-ка будет в двух случаях:

1) Обе окр-ти касаются сторон квадрата. Значит, что радиус равен 1. (очевидно из рис-ка)

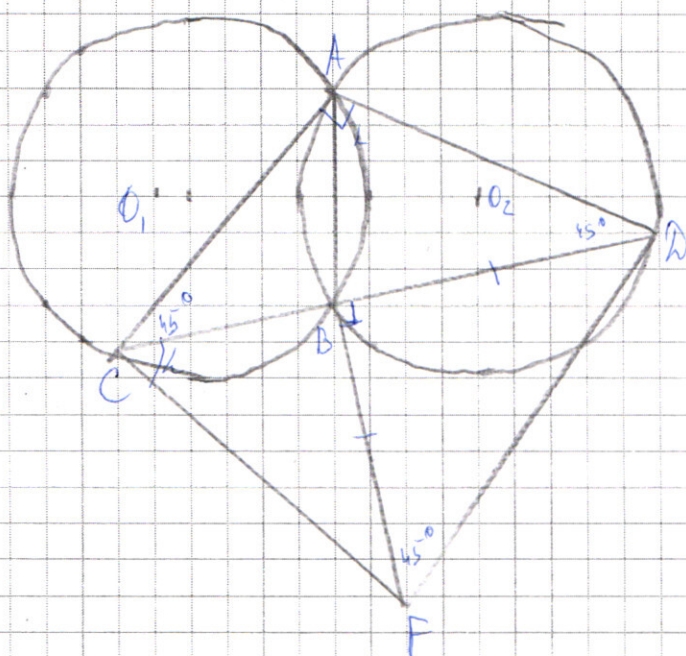
Если радиус больше 1, то окр-ти начиской пересекают стороны квадрата и тж. до случая 2.

2) Заметим, что $AC = CO = AB = OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Значит, что если радиус равен 5, то тж. пересечения совпадут, и решениями будут тж. A и D.

Значит, $\begin{cases} a=1 \\ a=5^2 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ a=25 \end{cases}$

Ответ: $a=1, a=25$.

√6



Дано: $O_1A = O_2A = 5$.

$\angle CAD = 90^\circ$, $\angle DBF = 90^\circ$

$BF = BD$

д. $CF = ?$

д. $AC = 6$; $S_{\triangle CBF} = ?$

Решение:

1) $O_1A = O_2A = O_1B = O_2B \Rightarrow O_1AO_2 = O_1BO_2$; $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = \angle BO_1O_2 = \angle BO_2O_1$
 O_1O_2 - общ.

$\angle AO_1B = \angle AO_2B \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$

т.к. они вл. впис. на дуге, на к-ой центр окруж.

$\angle ACB = \angle ADB = \angle ADC$ - радиусы,
 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

2) $\angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \angle AO_2B = 90^\circ$;

по т. Пифагора:

$$AB^2 = AO_2^2 + O_2B^2; AB = 5\sqrt{2}$$

3) в $\triangle ABC$ и в $\triangle ABD$ $\angle BAD = \angle ABD$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - \angle ABD$.

по т. синусов:

$$\frac{BC}{\sin(90^\circ - \angle ABD)} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin \angle ABD}; \quad \frac{BC}{BD} = \frac{\cos \angle ABD}{\sin \angle ABD}; \quad \frac{BD}{BC} = \frac{1}{\tan \angle ABD}; \quad BD = BC \cdot \tan \angle ABD$$

в $\triangle CBF$:

по т. Пифагора:

$$CF^2 = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{BC^2 + BC^2 \tan^2 \angle ABD} = BC \sqrt{\frac{\sin^2 \angle ABD + \cos^2 \angle ABD}{\cos^2 \angle ABD}} = \frac{BC}{\cos \angle ABD}$$

$$CF = \frac{BC}{\cos \angle BCF} = \frac{BC}{\cos \angle ABD} \Rightarrow \angle BCF = \angle ABD \text{ (т.к. оба угла } < 90^\circ \text{)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10.$

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin h} = \frac{BF}{\sin \angle BCF} = CF \Rightarrow CF = 10.$
по т. синусов

5) в $\triangle CBF$:

по т. Пифагора:

$BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8; BD = BF = 8; CD = 14$

в $\triangle ACD$:

по т. Пифагора:

$CD^2 = AC^2 + AD^2$

$14^2 = 2AC^2$

$AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

6) в $\triangle ABD$:

по т. синусов:

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin h}; 10 = \frac{8}{\sin h}; \sin h = \frac{8}{10}; \cos h = \sqrt{\frac{100-64}{100}} = \frac{6}{10}$

$\sin(h+45^\circ) = \sin h \cos 45^\circ + \cos h \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{10} + \frac{6}{10} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot 14}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

7) $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(h+45^\circ)$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$

Ответ: а) $CF = 10$

б) $S_{ACF} = 49.$

7)

$x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 + 6 + 2^{64}x - x$$

$$6 \cdot 2^{64} - x \cdot 2^{64} + x - 6 = 2^6 - 2^x$$

$$2^{64}(6 - x) - (6 - x) = 2^6 - 2^x$$

$$(2^{64} - 1)(6 - x) = 2^6(1 - 2^{x-6})$$

т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$ и $2^{64} - 1$ — нечетн., $(6 - x) \cdot 2^6$

Заметим, что $x = 6$ и $x = 70$ — решения.

т.к. при $x < 0$

Чтобы система имела реш-ия, $70 + (2^{64} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{65}) > 0$.

Если $x < 0$, то это невозможно, т.к. $x = 6$ — наиб. реш-ие, а левая часть растёт быстрее чем левая при $x < 6$.

$$x \in (6; 70)$$

$x > 70$ также невозможно из аналог. причин.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(22.5^\circ) = \sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right) =$
 $\sin 45^\circ = 2 \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$
 $\cos 45^\circ = 2 \cos^2 22.5^\circ - 1$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cos^2 22.5^\circ$
 $\frac{\sqrt{2} + 2}{2} = \cos^2 22.5^\circ$
 $\frac{\sqrt{2} + 2}{2} = \cos 22.5^\circ$
 $\frac{AD}{\sin(135^\circ - 1)} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
 $\frac{6}{\sin(135^\circ - 1)} = 10$
 $\sin(135^\circ - 1) = \frac{6}{10} = -\cos(135^\circ - 1)$
 $\cos(135^\circ - 1) = -\frac{6}{10}$
 $\sin(135^\circ - 1) = \sqrt{\frac{100 - 36}{100}} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10}$
 $S = 6 \cdot 10 \cdot \frac{8}{10} = 48$

$AB^2 = 25 + 25 - 50 \cos 290^\circ$
 $AB^2 = 50$
 $AB = 5\sqrt{2}$
 $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin 1}$
 $5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$
 $\frac{BF}{\cos 1} = \frac{BD}{\cos 1}$
 $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin 1} = \frac{BF}{\sin 1}$
 $\frac{BD}{\sin 1} = \frac{BC}{\sin(90^\circ - 1)}$
 $\frac{BD}{BC} = \tan 1$
 $BD = BC \cdot \tan 1$
 $FC = BD^2 + BC^2 = BC^2(1 + \tan^2 1) = \frac{BC^2}{\cos^2 1}$
 $\frac{BC}{\cos 1} = FC = \frac{BC}{\cos 1}$
 $\angle BCF = 2$
 $CF = \frac{BF}{\sin 1} = \frac{BD}{\sin 1} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 10$

$\sin(135^\circ - 1)$

$\frac{64}{100} = \frac{8}{10}$
 $(8-n)B_1$
 $(8-n)B_1$
 $(8-n)B_1$

$$\log_2 32 = \log_2 4 + \log_2 8 = 5$$

$$\log_2 a = 9$$

$$\log_2 a = 9$$

$$\frac{\log_{a-y} y}{\log_{a-y} 10} \cdot \frac{1}{\log_{a-y} 10}$$

$x > 70$:

$$(x-6) \left(2^{64-x} - 1 \right) = 64 \left(2^{x-6} - 1 \right)$$

$$-y^2 + 4y$$

$x < 70$

$$\log y \frac{1}{\log_{a-y} 10}$$

6...70.

$$56-20 = 120$$

$$\log^4 -$$

$$\frac{1}{4} = \log^2 3 + 2 \log^2 3$$

$$x = 70$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sqrt{10^{-\log 3}} = \sqrt{10^{-\log^2 4}} = \sqrt{10^{-\log^2 4}}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 2 \cdot 7 \cdot 5 + 2^{64} x - 1 \end{cases}$$

$x=1$

$$\begin{cases} y > 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 2 + 6 \cdot 2^{64} \\ y \leq 69 + 2^{64} \end{cases}$$

$$y > 2^x (1 + 3 \cdot 2^{65-x})$$

$$y \leq$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 + 2^{64}x - x - 2^x - 6 \cdot 2^{64} =$$

$$= 2^{64}(x-6) - (x-6) + 64 - 2^x =$$

$$= (x-6)(2^{64}-1) + 64 - 2^x \geq 0$$

$$x < 6: (x-6) < 0, 64 - 2^x > 0$$

$$(x-6)(2^{64}-1) = 2^x - 64$$

$$(x-6) \left(2^{64} - 1 \right) = 2^x \left(1 - 2^{6-x} \right)$$

$x=6$

$x > 6$:

$$\frac{2^{64}-1}{2^{64}-2^{6-x}} = \frac{2^x}{2^{x-6}}$$

$$1 - \frac{1}{2^{x-6}} = \frac{2^{x-6}-1}{2^{x-6}} \cdot 2^x =$$

$$= \frac{2^{x-6}-1}{2^{x-6} \cdot 2^{-x}} = \frac{2^{x-6}-1}{2^{-6}} =$$

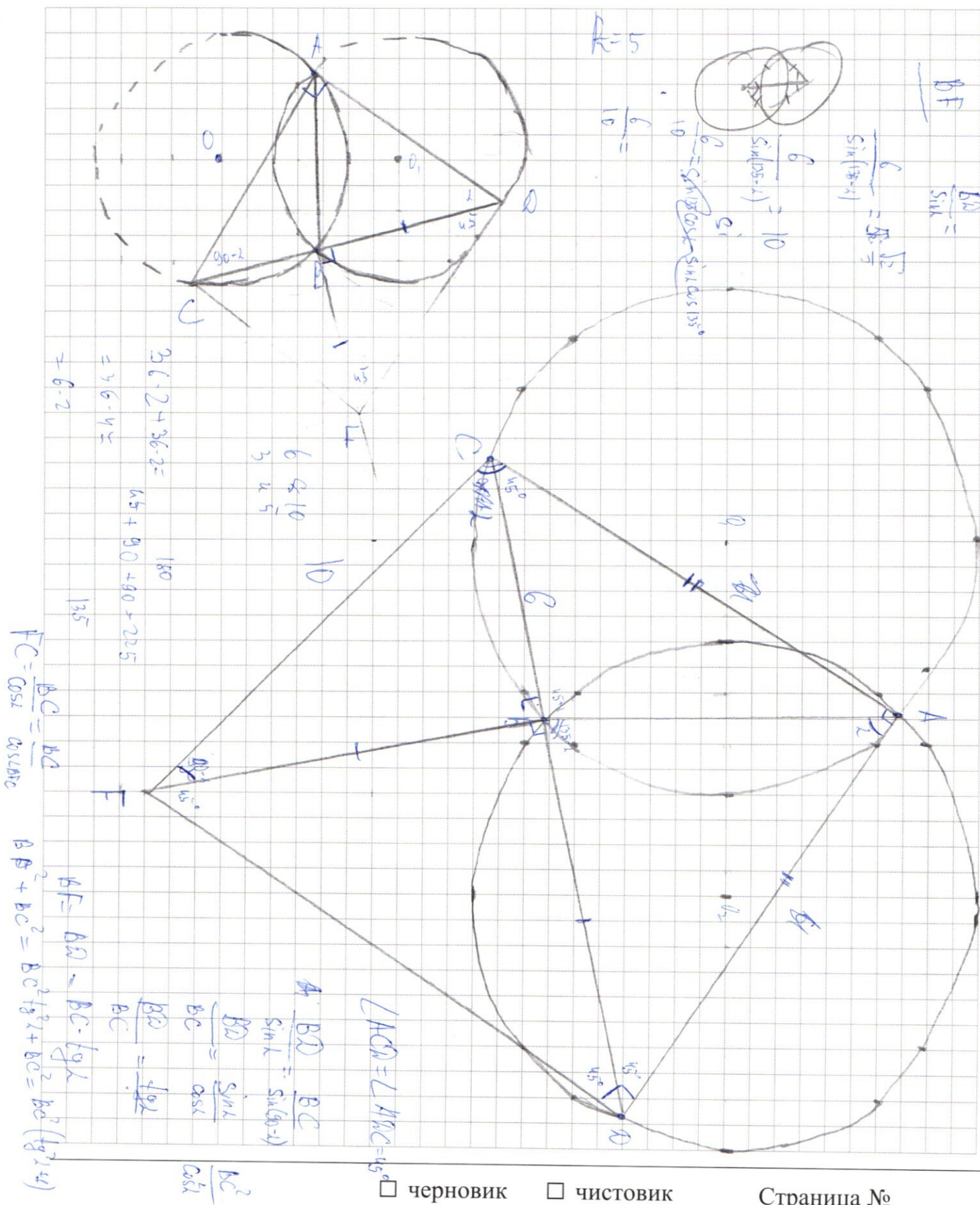
$$= 64(2^{x-6}-1)$$

$$(x-6): 64$$

$$70$$

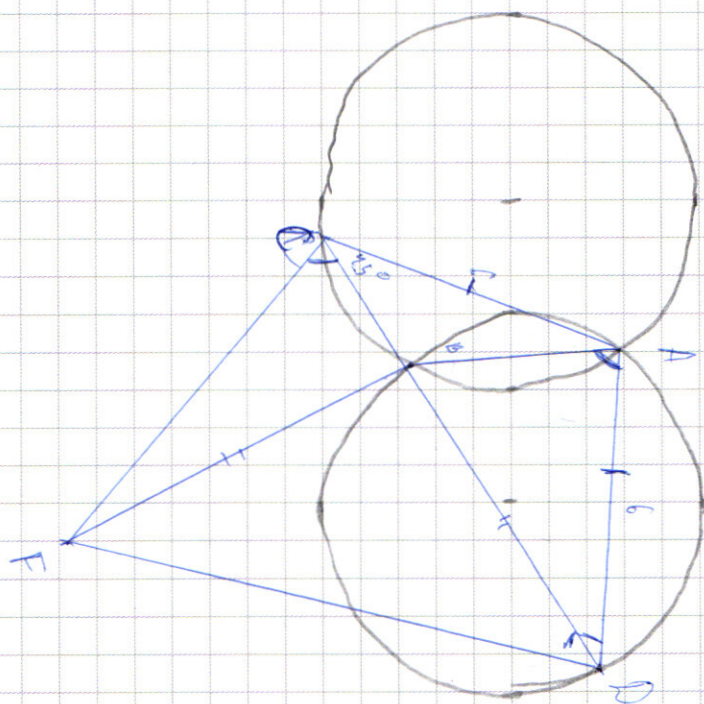
$$(70-6)(2^{64}-1) = 2^{70} \left(1 - 2^{-6} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №____
(Нумеровать только чистовики)



AC, CF

27

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 : 5 = 675 \\ 675 : 5 = 135 \\ 135 : 5 = 27 \\ 27 : 3 = 9 \\ 9 : 3 = 3 \\ 3 : 3 = 1 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3$$

Вариант:

1) 3 5-кл, 3 3-кл, 2 eq.

2) 3 5-кл, 1 3-кл, 1 9-кл 3 eq.

$$1) \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 560$$

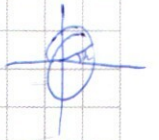
$$2) \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 5 \cdot 4 = 560 \cdot 2$$

$$\text{Всего: } 560 \cdot 3 = 1680$$

$$\cos 14x = \sin\left(14x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{8}{8} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{2}{2} = 1$$



$$\sin h + \cos h = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin h + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos h \right) = \sqrt{2} \cos$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

-2 cos

$$-2 \sin 7x \sin 4x - (2 \cos 7x \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$+2 \sin 7x \sin 4x + 2 \cos 7x \sin 4x + \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$2 \sin 4x \left(\sqrt{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \right) + \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x$$

$$-2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

или

$$\sin 4x + \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (2 \cos^2 7x - 1) = 0$$

$$\sin 4x + \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 14x = 0$$

$$2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin 4x \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \cos 4x$$

$$\cos 4x + 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) = 0$$

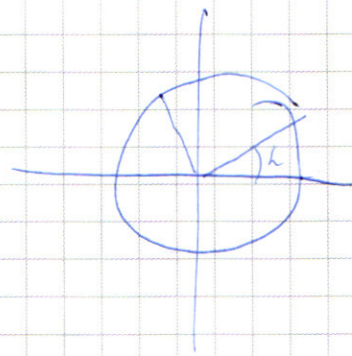
$$\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x \right) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\left(\frac{5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$\lg 3y \cdot y = \lg 3y + \lg y$$

$$\left(\frac{y}{3} \right)^{\lg 3y} = \left(\frac{y}{3} \right)^{\lg 3y} \left(\frac{y}{3} \right)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{3y}{y} \right)^{\lg \frac{y}{3}} = y^{\lg y^2}$$

$$\left(\frac{3y}{y} \right)^{\lg \frac{y}{3}} = y^{\lg y^2}$$

$$\left(\frac{3y}{y} \right)^{\lg \frac{y}{3}} = y^{\lg y^2}$$

$$3^{\lg \frac{y}{3}} = y^{\lg y^2 - \lg \frac{y}{3}} = y^{\lg 3}$$

$$3^{\lg \frac{y}{3}} = 3^{\lg 3 \cdot \lg y}$$

$$\lg \frac{y^2}{3} = \lg 3 \cdot \lg_3 y$$

$$\lg y^2 - \lg 3 - \lg 3 \cdot \lg_3 y = 0$$

$$\lg y^2 - \lg 3 (1 + \lg_3 y) = 0$$

$$\lg y^2 - \lg 3 \lg_3 3y = 0$$

$$\lg y^2 - \frac{\lg_3 3y}{\lg_3 10} = 0$$

$$\lg y^2 - \lg 3y = 0 \quad | \quad y^2 = 3y, \quad y=0 \text{ или } y=3$$

УДЗ: $x, y > 0$

$$(2): (x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(x+y^2-3y) = 0$$

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{x}{2} = (y+2) + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 =$$

$$= 4(y^2 - 2y + 1) = 4(y-1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{y+2 \pm 2(y-1)}{2} = y+2 \pm (y-2) = \begin{cases} 3y \\ -y+4 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$0 < (x, y) < 4$$

$$\left(\frac{y^5}{-y+y}\right)^{\lg(-y+y)} = y^{2\lg y (4-y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = (y^{\lg y})^{2(4-y)} \cdot y^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{y^{5\lg(4-y)}}{10} = \cancel{y^{10\lg(4-y)}} 100 y^{\lg(4-y)}$$

$$y^{5\lg(4-y)} = 1000 y^{\lg(4-y)}$$

$$y^{4\lg(4-y)} = 1000$$

$$y^{\lg(4-y)} = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{10} \lg y \lg(4-y) = 10^{-1}$$

$$\lg y \lg(4-y) = -1$$

~~$$\lg \frac{y^5}{-y+y} = 1$$~~

$$\frac{y^{5\lg x}}{10} = y^{2\lg x + 2\lg y}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{10} = y^{2\lg x} \cdot 100$$

$$y^{3\lg x} = 1000$$

$$y^{\lg x} = 10$$

$$y^{\lg 3} = 10$$

$$y^{\lg 4-y} = 10$$

~~$$y^{\lg 3} = 10$$~~

~~$$\lg y \lg 3 = 10^{-1}$$~~

$$\lg y \lg 3 = 1$$

$$\lg y (\lg 3 + \lg y) = 1$$

$$\lg^2 y + \lg 3 \lg y - 1 = 0$$

$$2 = \lg^2 3 + 1$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$a > 0$$

$$(1): \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6=6 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \\ -2x=6 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2x=6 \end{cases}$$

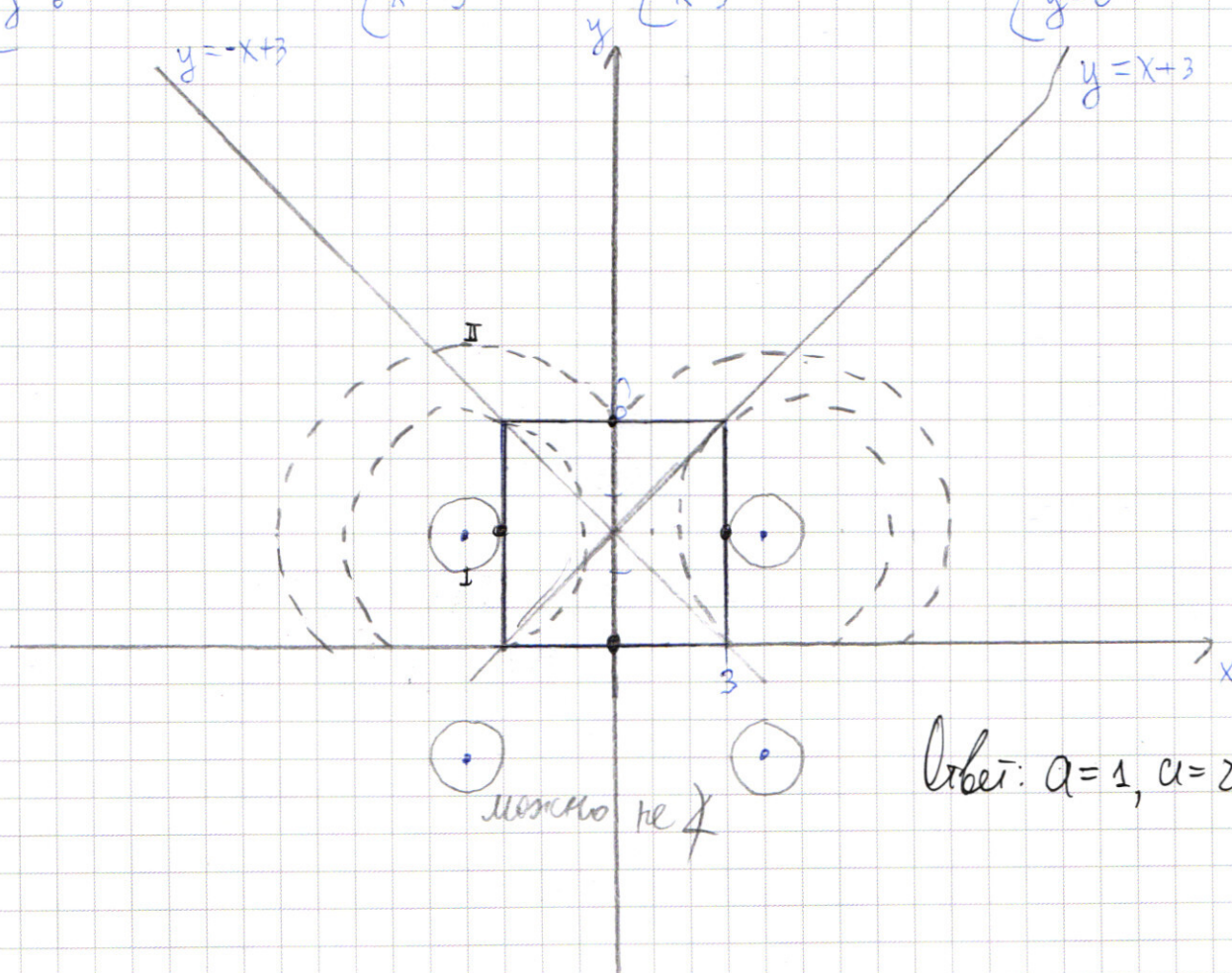
$$\text{или} \begin{cases} y-3+x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ 6-2y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ y=0 \end{cases}$$



Ответ: $a=1, a=25$