

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

П.к. число 3375 раскладывается на 6 простых множителей, а
заданное число множителей — 8 $\Rightarrow$ остальные множители — 1

Набор цифр для составления восьмизначного числа могут быть
следующими:

I. 5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1

II. 5; 5; 5; 9; 3; 1; 1; 1

I. 5-ки в заданном числе могут располагаться $C_3^5 = 56$ способами,
среди оставшихся мест 3-ки могут располагаться $C_3^3 = 10$ способами,
а оставшиеся места произвольным способом занимают 1.

$$\text{Итого чисел первого типа: } C_3^5 \cdot C_3^3 = 560$$

II. 5-ки могут располагаться $C_3^5 = 56$ способами, но оставшиеся места
1 располагаются $C_3^3 = 10$ способами и 2 способа для размещения 3 и 9

$$\text{чисел второго типа: } C_3^5 \cdot C_3^3 \cdot 2 = 1120$$

$$\text{Всего чисел: } C_3^5 \cdot C_3^3 + 2 \cdot C_3^5 \cdot C_3^3 = 3 \cdot C_3^5 \cdot C_3^3 = 1680$$

Ответ: 1680.

№ 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-6=6, & x \in \mathbb{R} \\ -2y+6=6, & x \in \mathbb{R} \\ |y|+|y-6|=6, & x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=6, & x \in \mathbb{R} \\ y=0, & x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq y \leq 6, & x = \pm 3 \\ \cancel{y=4}, & x = \pm 3 \end{cases}$$

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ - график - 4 окружности с ^{центрами в} ~~в~~ ^{точках} $(4;3), (4;-3), (-4;3), (-4;-3)$ и радиусом $\sqrt{a}$

~~также~~

Данная система будет иметь 2 решения лишь тогда, когда окружности с центрами в точках $(-4;3)$ и $(4;3)$ будут

касаться отрезков $x=3, x=-3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 1$$

$$a = 1.$$

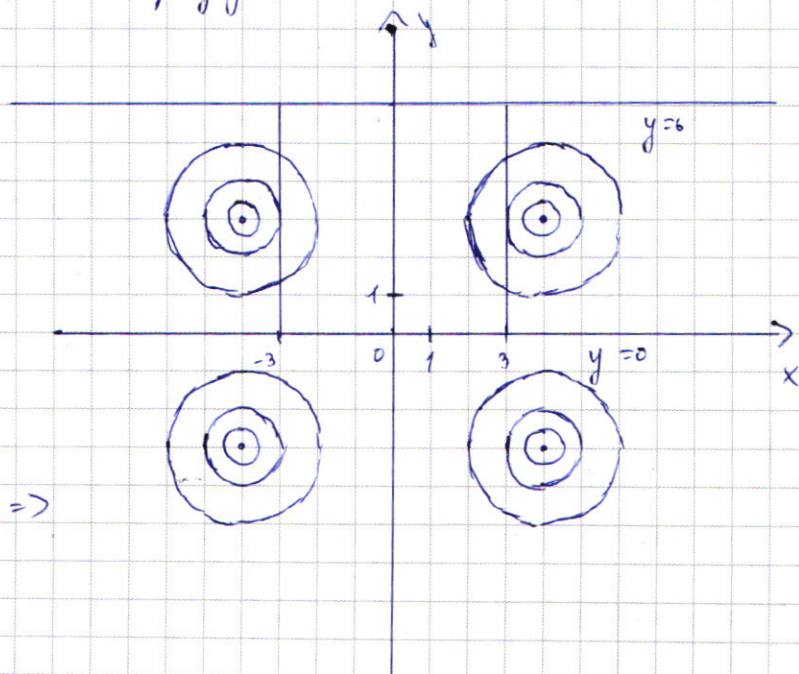
Ответ: при $a=1$ система имеет 2 решения.

№ 6

а) Дано:

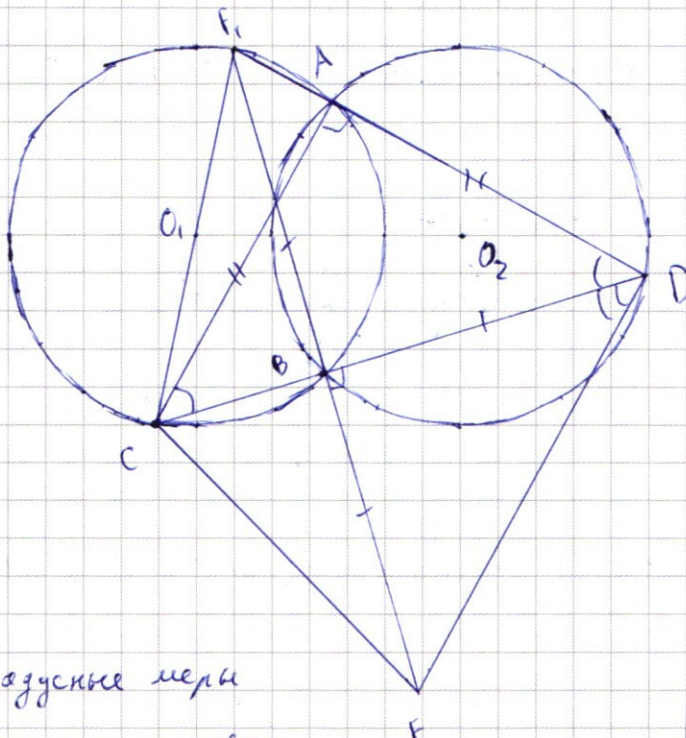
Решение:

$$O_{кр}(O_1, r=5) \cap O_{кр}(O_2, r=5) = A, B$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$C \in \text{Окр.}(O_1, r=5)$
 $D \in \text{Окр.}(O_2, r=5)$
 $B \in CD$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD$
 $BF = BD$
 Найти:
 $\angle C$ - ?



Т.к. $r_1 = r_2 = 5 \Rightarrow$ радиусные мерки
 дуг AB в обеих окружностях равны

$\angle ACB$ - вписанный в $\text{Окр.}(O_1, r=5)$, опирается на $\cup AB$

$\angle ADC$ - вписанный в $\text{Окр.}(O_2, r=5)$, опирается на $\cup AB$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADC \Rightarrow \triangle ACB$ - прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$

Отметим точку F_1 , симметричную F относительно CD ; $BF = BF_1$,
 в $\triangle FDF_1$: $BD = BF = BF_1 \Rightarrow B$ - центр описанной окружности, $BF \perp FF_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle FDF_1$ - прямоугольный, $\angle DFF_1 = 90^\circ$.

F_1 симметрична F относительно $CD \Rightarrow F_1D = FD$

Равнобедренный, прямоугольный $\Rightarrow \angle F_1DB = 45^\circ = \angle DFF_1$

$\angle F_1DB = 45^\circ$, опирается на $\cup AB \Rightarrow \angle A'DB = 45^\circ$

$F_1D \cap \text{Окр.}(O_2, r=5) = A'$

$\Rightarrow \triangle F_1DF$ - равнобедренный

$\angle A'BB = 45^\circ$ опирается на $\cup A'B \Rightarrow \cup A'B = 90^\circ$
 $\angle ADB = 45^\circ$ опирается на $\cup AB \Rightarrow \cup AB = 90^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. A' и A лежат по одну сторону от $B \Rightarrow A' = A \Rightarrow A \in F, D$

$\angle DCA$ - вписанный в Окр. $(O, r=5)$
 $\angle DCA$ и $\angle DF_1F$ опираются на $\cup AB$

$\Rightarrow F_1 \in \text{Окр. } (O, r=5)$

$\angle DCA = \angle DF_1F = 45^\circ$

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle CAF_1 = 90^\circ$$

в $\triangle CAF_1$: $\angle CAF_1$ - вписанный опирается на $\cup CF_1$

$\Rightarrow CF_1$ - диаметр.
 Окр. $(O, r=5)$

$\angle CAF_1 = 90^\circ$

$$CF_1 = 2r = 10$$

Т.к. F_1 симметрична F относительно $CD \Rightarrow CF = CF_1 = 10$

Ответ: а) 10.

№3

$$\int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = (4(y-1))^2$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$x_1 = 3y$$

$$x_2 = 4 - y$$

$$\int y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = 3y : y^{\lg \frac{27y^3}{y^2}} = (3y)^{\lg(3y)}$$

$$y^{\lg 27y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$y = 3 : x = 9$$

$$x = 4 - y : y^{\lg \frac{(4-y)^3}{y^2}} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

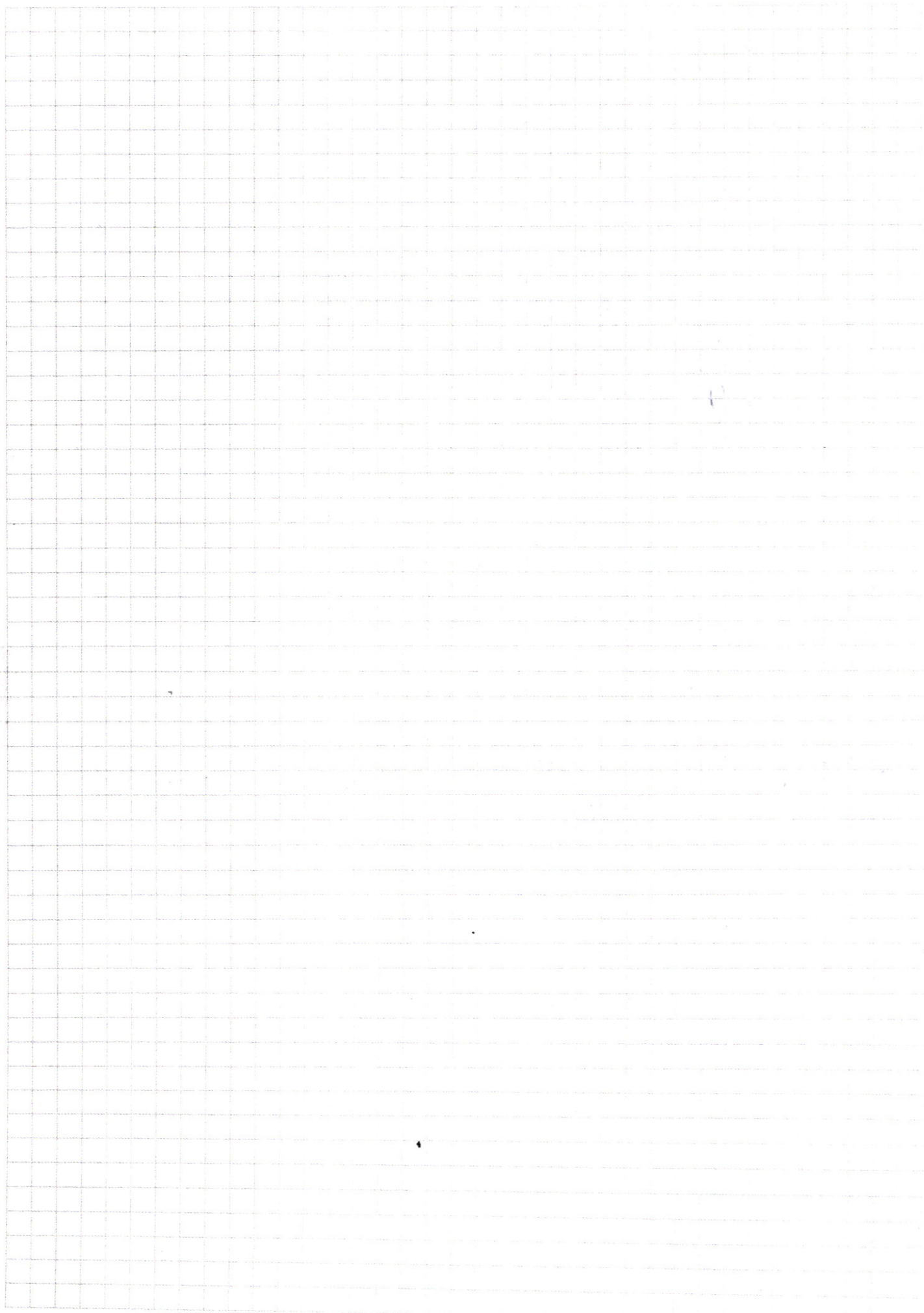
$$y = 2 : x = 2$$

Ответ: $(9; 3), (2; 2)$.

№7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Прямая $y = 70 + (2^{64} - 1)x$ пересекается с кривой $y = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ в точке $(6; 3 \cdot 2^{65} + 64)$ и $(70; 35 \cdot 2^{65})$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 1. \quad 3375 \overline{) 15} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 15} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 15} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$11$$

$$\begin{array}{l} 55533311 \\ 55593111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 560 \\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$9$$

$$1.3$$

$$C_9^3 = \frac{9!}{5! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 56$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$560$$

$$C_8^3 = 56$$

$$C_5^3 = 10$$

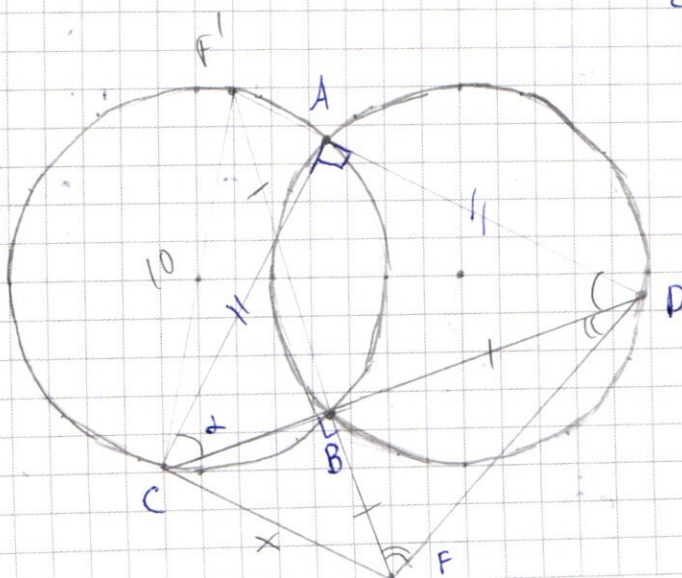
$$C_2^1 = 2$$

$$560 \cdot 2$$

$$560 \cdot 3 = 1680$$

$$R=5$$

$$CF=10$$

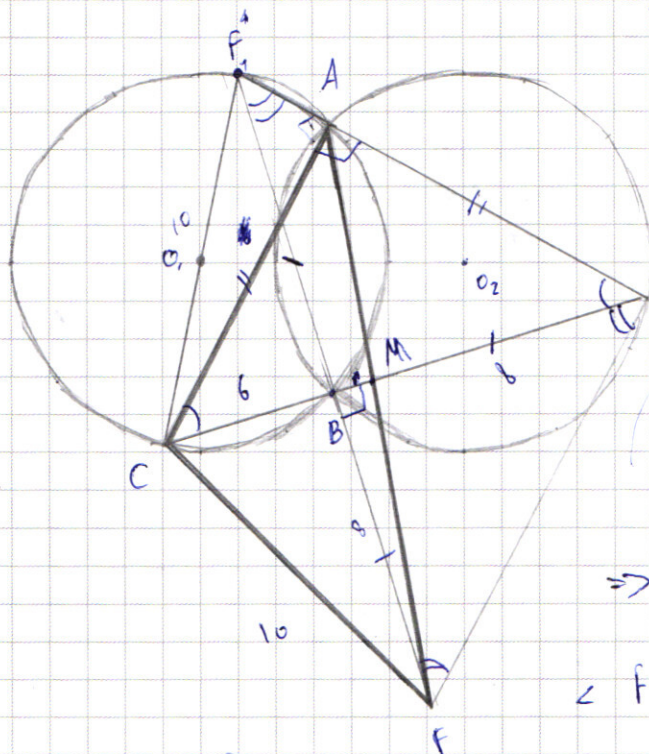


$$\angle ACB \text{ опр. на } \angle AB$$

$$\angle ADB \text{ опр. на } \angle BA$$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

d) $\angle ACB = \angle ADC$ (comp. to $\angle AOB$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle ADC - \text{right, right} \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$
 b. F, DF



B - ц. окис. окр., $B \in FE^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta F, DF - n | y, p | \delta \Delta \Rightarrow$$

V:

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle CDF$$
$$\angle DCA \text{ и } \angle DF, F \text{ συμπ τα } \angle AB \Rightarrow$$
$$\angle PCA = \angle DF_1F$$
$$\Rightarrow f_1 \in O_{K_p}(O, r=5)$$
$$\angle F, AC = 90^\circ \rightarrow F, C = \text{диаметр} \rightarrow$$

$\Rightarrow CF_1 \Rightarrow R$ or p.h. F_1 commens. only. (D m.f. $\rightarrow$)

$$\Rightarrow CF_1 = CF = 10$$

V:

$\angle F_1 DB$ ~~comp the $\angle$ $\hat{A}B$~~ $= 45^\circ$; comp the $\angle$ $\hat{A}^1 B$

$$f_1 D \cap \partial \varphi_1 (o_2, r=s) = A'$$

$\angle A'PB$ опир. на $A'B$

$\angle ADB$ only $\text{Ker } \angle AOB$

$$\angle ADB = 45^\circ$$
$$\Rightarrow A = A$$

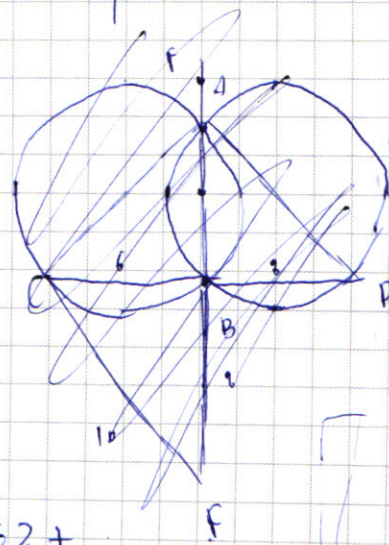
81

76

$$\int (2x^3 + 65) dx = f(x) =$$

$$(F(70) - F(6)) \cdot 64$$

~~32.2⁶⁵ - 64.64~~

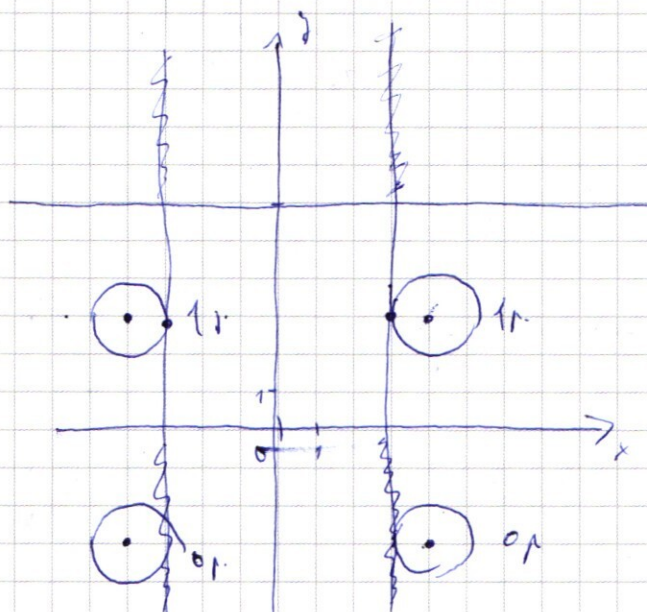


62 +

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № _____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|y-6| + |y| = 6$$

$$a=1$$

$$\cos 11x - \cos 5x = 2 \cos 7x \cos 4x$$

$$\int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4(x+y^2+3y) = 0$$

$$y^5 \lg x = y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg x y} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg x^5 - \lg 3y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^5}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$x(x^2 - y - 4) - y(3y - 4 + x) = 0$$

$$x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16$$

$$16(y-2y+1)$$

$$16(y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 + 4y-4}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$x_2 = \frac{2y+4 - 4y+4}{2} = 4-y$$

$$\left(x - \frac{3y}{2}\right)(x + y - 4) = 0$$

$$y^{\lg x^5} = y^{\lg(xy)^7} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$x = 3y : y^{\lg 27y} = (3y)^{\lg 3y}$$

$$\lg 27y = 3\lg 3 + \lg y$$

$$\lg 3y = \lg 3 + \lg y$$

$$x = 4-y$$

$$y^{\lg \frac{(4-y)^3}{y^2}} = x(4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y = 4-y$$

$$y = 2$$

$$y=2 : x=2$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{27y^3}{4y^2}} = \left(\frac{3y}{2}\right)^{\lg \frac{3y}{2}}$$

$$y^{\lg 27y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$\lg 27y = \lg 3y + \lg y$$

$$y^3 \lg 3y$$

$$y^{3\lg 3} \cdot y^{\lg y} = 3^{3\lg 3} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3}$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$\Rightarrow y=3 : x=9$$

$$(9; 3)$$

$$\frac{(4-2)^3}{4} = \frac{4-2}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

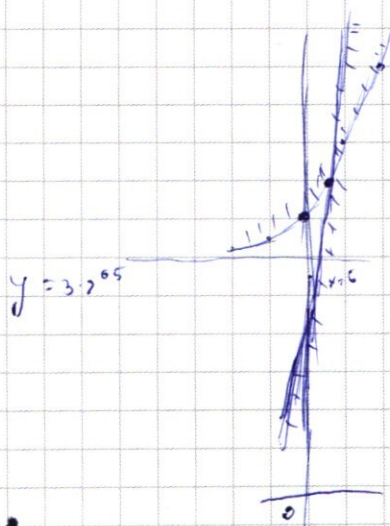
N7. $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$



$x=4$: $4 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{68} \rightarrow$ $x=6$: $32 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{65} \cdot 2 - 6$
 $38 = 70$
 $6 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{65} \cdot 2 - 6$



$70 + (2^{64} - 1)x = 3 \cdot 2^{65}$

$70 + 2^{64} \cdot x - x$

$(6 - x) \cdot 2^{64} = 70 - x$

$x=0$: $70 + 2^{64} \cdot 0 - 0$

$64 + 3 \cdot 2^{65}$

$x=6$: $64 + 3 \cdot 2^{65}$

$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 2^x$

$3 = 2^{\log_2 3}$

$x=70$: $2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 70 \cdot 2^{65} + 2^{64}$

$70 = 2^{\log_2 70}$

$35 \cdot 2^{65} = 35 \cdot 2^{65}$

$2^x + 2^{65 + \log_2 3} = 2^{\log_2 70} + 2^{64 + x} \cdot 2^{\log_2 1}$

$2^{2x} + 2^{64 + x} \cdot 2^{\log_2 3 + 65} = 2^{64 + x} + 2^{64 + x}$

$x \in (6; 70)$

$y = 35 \cdot 2^{65}$

$y = 64 + 3 \cdot 2^{65}$

$$x=0: |y-3| + |y-3| = 6$$

$$|y-3| = 3$$

$$y=0 \quad y=6$$

$$x=1: |y-4| + |y-2| = 6$$

$$y < 2: 4-y + 2-y = 6$$

$$\frac{2 \quad 4}{\quad}$$

$$x=3$$

$$x=-3: |y| + |y-6| = 6$$

$$|y-2| + |y+1| = 6$$

$$7-y-1-y=6$$

$$2y-6=6$$

$$y=6$$

$$6-2y=6$$

$$y-3-x + y-3-x = 6$$

$$y=6$$

$$y-3-x + y+3-x = 6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

$$x=100: |y-103| + |y+87| = 6$$

$$y-103+y+87=6$$

$$y=6$$

$$103-y+y+87=6$$

$$6-2y=6$$

$$y=0$$

$$|y| + |y-6| = 6$$

$$|y-3-x| \leq 6$$

$$y-3-x \leq 6$$

$$y < 9x+9$$

