МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть наше число и имеет цифры $a_1 \dots a_8$ => $a_1 \cdot \dots \cdot a_8 = 3375 = 5^3 \cdot 3^3$ $\quad a_1 \cdot \dots \cdot a_8 \vdots a_i$ $1 \le i \le 8$ => $5^3 \cdot 3^3 \vdots a_i$ $0 \le a_i \le 9$ => $a_i = 1, 3, 5, 9$

1) Пусть $a_i < 9$ $\forall 1 \le i \le 8$ => $a_i = 1, 3, 5$ $\forall$ $1 \le i \le 8$ => 3 цифры и это - 3, 3 цифры и это - 5 и 2 цифры - 1 => кол.во чисел состав цифр которого 3 цифры - 3, 3 цифры - 5 и 2 цифры - 1. Это тоже самое что кол.во перестановок 3 - цифры 3, 3 - цифры 5 и 2 цифры 1. ~~кол~~. кол.во способов выбрать i и j: $a_i = a_j = 1$, $i \ne j$ $i<j$ C_8^2 остается шесть a_i кол.во способов выбрать a_x, a_y и a_z: $a_x = a_y = a_z = 3$ C_6^3 после чего остается всего 3 k, l, m: $a_k = a_l = a_m = 5$ только 1 способом => $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{2!3!3!} = 560$

2) Пусть $\exists 1 \le i \le 8$ $a_i = 9$ WLOG $i = 1$ $a_1 = 9$ => $a_2 a_3 \dots a_8 = 5^3 \cdot 3$ => $5^3 \cdot 3 \vdots a_i$ => $a_i = 1, 3, 5$ => 1 - цифра и это - 3 и 3 цифры 5 и 3 цифры 1 => кол.во способов выбрать => кол.во перестановок $\{1,1,1,3,9,5,5,5\}$ C_8^2 способами количество способов выбрать ~~комнату~~ позиции для 3 и 9. Ост 6 цифр C_6^3 способов выбрать ~~для~~ ~~для~~ 3 единицы и 1 способом 3 пятерки => $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 560$

≥ 2 числа среди $a_i \vdots 9$ быть не может т.к. $\Rightarrow a_1 \ldots a_8 \vdots 3^4 \Rightarrow$

$5^3 \cdot 3^4 \vdots 3^4$ $\varnothing$ $\Rightarrow$

Ответ = 1120 восьмизначных чисел

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \ / : \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x = \cos 14x$

$\cos(\frac{\pi}{4} + y) = \cos\frac{\pi}{4} \cos y - \sin\frac{\pi}{4} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos y - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin y \Rightarrow$

$\cancel{\cos(\frac{\pi}{4}}$.

$\cos(\frac{\pi}{4} + 11x) - \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) = \cos 14x \Rightarrow$

$\cos 14x = \cos(\frac{\pi}{4} + 11x) - \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) = 2 \sin \frac{\pi}{4} + 7x \sin -4x = \cancel{z} \Rightarrow$

$\cos 14x = -2 \sin 4x \sin \frac{\pi}{4} + 7x \Rightarrow$

$-2 \sin 4x \sin \frac{\pi}{4} + 7x = \cos 14x = \cancel{\sin} \frac{\pi}{2} + 4x = \sin \frac{\pi}{2} + 14x \Rightarrow$

$-2 \sin 4x \sin \frac{\pi}{4} + 7x = \sin \frac{\pi}{2} + 14x = 2 \sin \frac{\pi}{4} + 7x \cos \frac{\pi}{4} + 7x)$

$2 \sin \frac{\pi}{4} + 7x(\cos \frac{\pi}{4} + 7x + \sin 4x) = 0$

1) $\sin \frac{\pi}{4} + 7x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 7x = \pi k \quad k \in Z \Rightarrow$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}} \quad k \in Z$

2) $\sin 4x + \cos \frac{\pi}{4} + 7x = 0$

$\sin 4x + \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + 7x)) = 0$

$\sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} - 7x = 0$.

$2 \sin \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \cos \frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = 0$

2.1) $\sin \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow$

$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi l$

$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi l$

$\boxed{x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}}$

2.2) $\cos \frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = 0$

$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z$

$\frac{11x}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \pi n$

$\boxed{x = \frac{-3\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11} \quad n \in Z}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим пересечения корней уравнений $\sin \frac{\pi}{4}+7x=0$ и $\sin\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}=0$

$-\frac{\pi}{28}+\frac{\pi k}{7}=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi l}{3}$

$\frac{\pi k}{7}=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{28}-\frac{2\pi l}{3}$

$\frac{\pi k}{7}=\frac{10\pi}{28}-\frac{2\pi l}{3}$

$\frac{k}{7}=\frac{5}{14}-\frac{2l}{3}$

$k=\frac{5}{2}-\frac{14l}{3}\in Z$

$\frac{5}{2}-\frac{14l}{3}=2-5l+\frac{1}{2}+\frac{l}{3}\in Z \Rightarrow$

$\frac{1}{2}+\frac{l}{3}\in Z$

1) $l=3l_1$ $l_1\in Z$ $\Rightarrow l_1+\frac{1}{2}\in Z$ $\varnothing$

2) $l=3l_1+1$ $l_1\in Z$ $\in l_1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\in Z$ $\varnothing$

2) $l=3l_1+2$ $l_1\in Z$ $l_1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\in Z$ $\varnothing$ $\Rightarrow$ У них нет перес.

Рассмотрим перес. корней уравнений $\sin\frac{\pi}{4}+7x=0$ и $\cos\frac{\pi}{8}-\frac{11x}{8}=0$

$-\frac{\pi}{28}+\frac{\pi k}{7}=-\frac{3\pi}{44}-\frac{2\pi n}{11}$

$\frac{\pi k}{7}=\frac{\pi}{28}-\frac{3\pi}{44}-\frac{2\pi n}{11}$

$\frac{k}{7}=\frac{1}{28}-\frac{3}{44}-\frac{2n}{11}$

$\frac{k}{7}=\frac{-10}{308}-\frac{2n}{11}$

$k=\frac{-5}{22}+\frac{2n}{11}\in Z$

$n=11n_1+n_2$ $\begin{matrix} n_1,n_2\in Z \\ 0\le n_2<11\end{matrix}$ $\Rightarrow n_1+\frac{4n_2-5}{22}\in Z \Rightarrow \frac{4n_2-5}{22}\in Z$

$\Rightarrow$ $4n_2-5 \vdots 22$ $\Rightarrow$ $4n_2-5 \vdots 2$ $\varnothing$ $\Rightarrow$ у них нет пересеч.

Рассмотрим перес. корней уравнений $\sin\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}=0$ и

и $\cos\frac{\pi}{8}-\frac{11x}{2}=0$

$$\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi l}{3}=-\frac{3\pi}{44}-\frac{2\pi n}{11}$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{44}+\frac{2\pi n}{11}=\frac{2\pi l}{3}$$

$$\frac{1}{12}+\frac{3}{44}+\frac{2n}{11}=\frac{2l}{3}$$

$$\frac{20}{132}+\frac{2n}{11}=\frac{2l}{3}$$

$$\frac{5}{33}+\frac{2n}{11}=\frac{2l}{3}$$

$$2l=\frac{6n}{11}+\frac{5}{11}=\frac{6n+5}{11}$$

$l=\frac{6n+5}{22}\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $6n+5 \vdots 22$ $\Rightarrow$ $6n+5 \vdots 2$ $\varnothing$ - у них нет перес.

Ответ: $x=\frac{-\pi}{28}+\frac{\pi k}{7}$, $x=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi l}{3}$, $x=\frac{-3\pi}{44}-\frac{2\pi n}{11}$ где $k,l,n\in\mathbb{Z}$.

№3.

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}$. ОДЗ: $x>0$ т.к. $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}$

$xy>0$ т.к. $y^{2\log xy}$ $\Rightarrow$

$y>0$ $\Rightarrow$ $y^{2\lg xy}>0$.

Прологорифмируем обе части по основанию 10.

$$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right)=\lg\left(y^{2\log xy}\right)$$

$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right)=\log x\cdot\lg\frac{y^5}{x}$ $\quad$ $\lg\left(y^{2\log xy}\right)=2\log xy\cdot\lg y$

$\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = \lg y \cdot \lg xy \cdot 2$

$\lg \frac{y^5}{x} = \lg y^5 - \lg x = 5\lg y - \lg x \quad \lg xy = \lg x + \lg y$

$a = \lg x \quad b = \lg y$

$a \cdot (5b - a) = 2b(a+b)$

$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$D = 9b^2 - 4 \cdot 2b^2 = b^2$

$a_{1,2} = \frac{3b \pm |b|}{2}$

$\boxed{\text{Если } b \geq 0 \quad a_1 = 2b \quad a_2 = b \\ \text{Если } b < 0 \quad a_1 = b \quad a_2 = 2b}$

1) $a = 2b \Rightarrow \lg x = 2\lg y = \lg y^2 \Rightarrow \boxed{x = y^2}$ 1

$3y^2 - 12y + 4x + 2xy - x^2 = 0$

$3y^2 + y(2x - 12) + 4x - x^2 = 0$

$D = 4x^2 - 48x + 144 - 48x + 12x^2 = 16x^2 - 96x + 144 = (4x-12)^2$

$y_{1,2} = \frac{\cancel{2x-12}\ 12 - 2x \pm |4x-12|}{6}$

$\boxed{\text{Если } x \geq 3 \quad y_1 = \frac{x}{3} \quad y_2 = -x+4 \\ \text{Если } x < 3 \quad y_1 = -x+4 \quad y_2 = \frac{x}{3}}$

~~1.1) $x \geq 3$~~

Используем 1

1.1) $y = \frac{x}{3} = \frac{y^2}{3} \qquad \frac{y^2}{3} = y \qquad \frac{y(y-3)}{3} = 0 \qquad \cancel{y=0 \quad y=3}$

$y_1 = 0$ – н.к. $y > 0$.

$y_2 = 3 \quad x = 9$

Используем 1

1.2) $y = -x + 4 = -y^2 + 4 \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$

$y_3 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$y_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ н.к. $y>0$

2) $a = b$

$\lg x = \lg y \Rightarrow \boxed{x = y}$ 2 Подстовляем г во II урав.

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$-4x(x-2) = 0$

$x = 0$ н.к. $x>0$.

$x = 2 \Rightarrow$

$x_1 = 9 \qquad y_1 = 3$

$x_2 = \cancel{\frac{8-\sqrt{17}}{8}}\ \frac{9-\sqrt{17}}{2}. \qquad y_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$x_3 = 2 \qquad y_3 = 2$

Проверка:

$(9;3)$

$\left(\frac{3^5}{9}\right)^{\lg 9} = 3^{2\lg 27}$

$(3^3)^{2\lg 3} = 3^{2\cdot 3\lg 3}$

$3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$ и

$81 - 54 - 36 - 27 + 36 = 0$ и

$\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

$\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^5}{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}\right)^{\lg \frac{\sqrt{17}-1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{2\lg \frac{9-\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) - 4\cdot\frac{9-\sqrt{17}}{2} - 3\cdot\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 +$

$+ 12\cdot\frac{\sqrt{17}-1}{2} = 0$ ✓

$(2;2)$

$\left(\frac{2^5}{2}\right)^{\lg 2} = 2^{2\lg 4}$

$2^{4\lg 2} = 2^{4\lg 2}$ ✓

$4 - 8 - 8 - 12 + 24 = 0$ ✓

№5

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

1) $y-3-x \geq 0$

$y-3+x \geq 0 \Rightarrow 2y = 12 \quad y = 6$

~~$|x| + 1$~~

~~$|x+3|$~~ $-$

$|3-x| + |x+3| = 6$

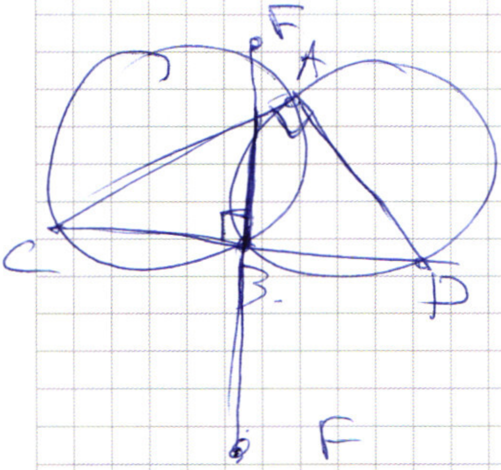
~~$V\ x < -3$~~

$|x-3+x+3| \leq |x-3| + |x+3| = 6$

$|2x| \leq 6$

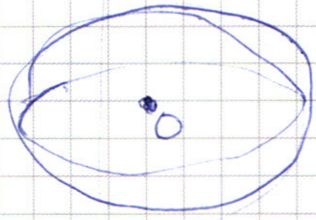
$|x| \leq 3 \qquad -3 \leq x \leq 3$

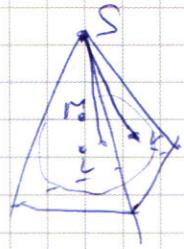
2) $y-3-x \geq 0 \quad y-3+x \leq 0$



$(y-3)^2 = a-16$

$y = 3 + \sqrt{a-16}$





$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$

$(|y|-3)^2 = a-16$

$\left(|x|-4\right)^2 + (|y|-3)^2 = a$

$(y-3)^2 = a-16$

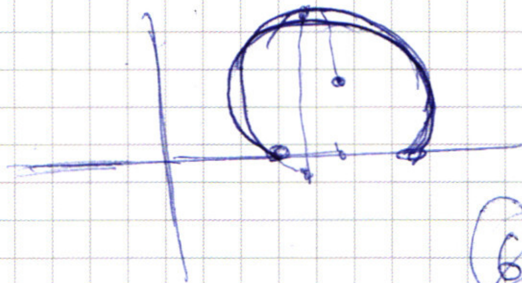
$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \leq 70 + (2^{64}-1)x^{|y-6|}$

$[-3;3]; 6$

$-3; [0;6]$

$x<0 \quad y>0$



$3; 6$

$-3; 6$

$6; 3$

$6; -3$

$x+4$

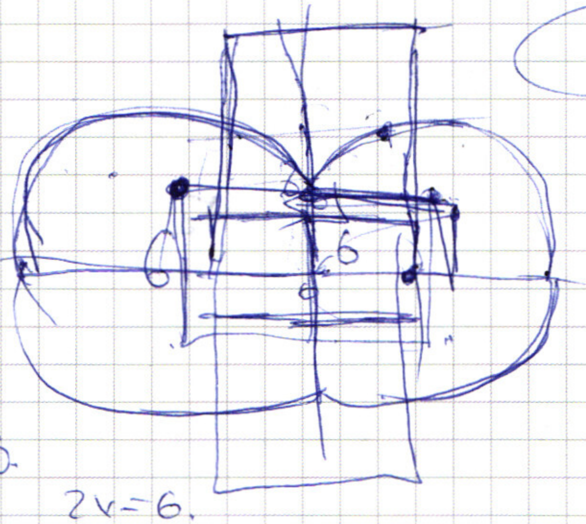
1) $y-3-x \geq 0$

$y-3+x \geq 0$

$y \geq 3$

$2y-6=6$

$y=6$



$-3; [0;6]$

$y-3-x \geq 0$

$y-3+x<0$

$|3-x|($

$y-3-x-y+3-x=6$

$|x-3|+|x+3|=6.$

$x=-3$

$3-x-3-x=6. \quad 2x=6.$

$x-3+3-x=6$

$y<6$

$y \geq 0$

$x+3+3-x$

$x+3-y+y-3+x=6$

$y-3-x<0$

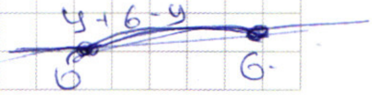
$x=3$

$|y-6|+|y|=6$

$y-3+x \geq 0$

$y<0 \quad 6y$

$y+6-y$



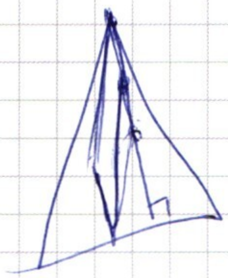
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

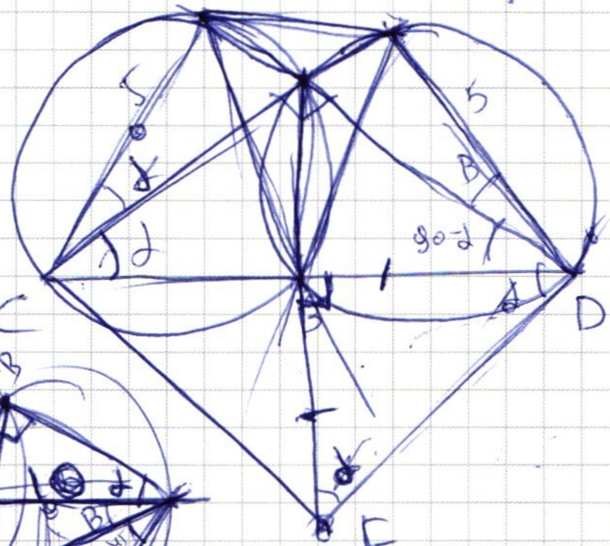
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

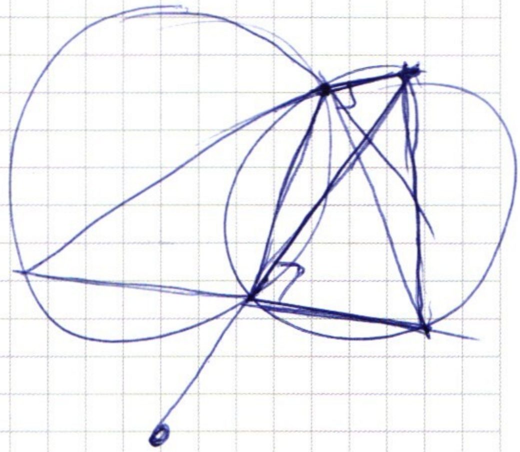
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

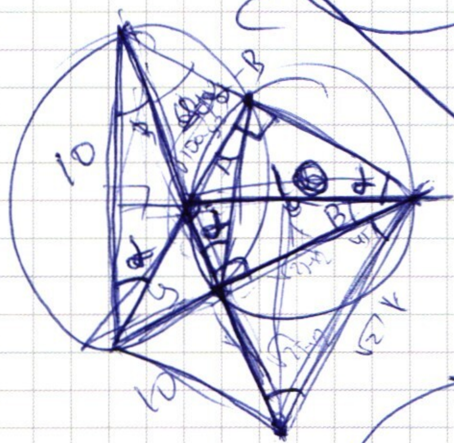
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



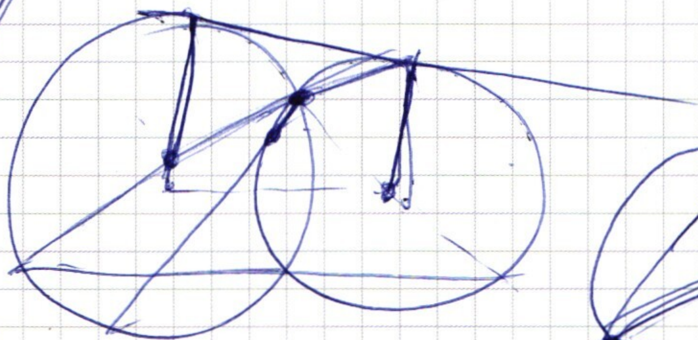


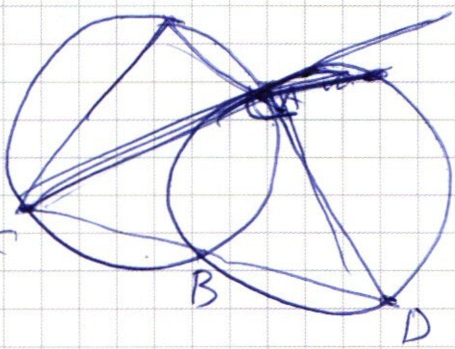


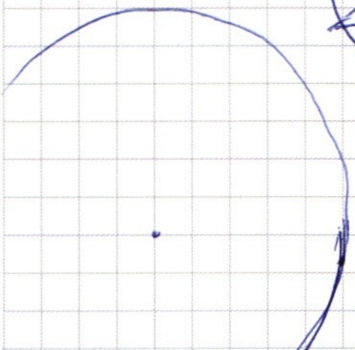


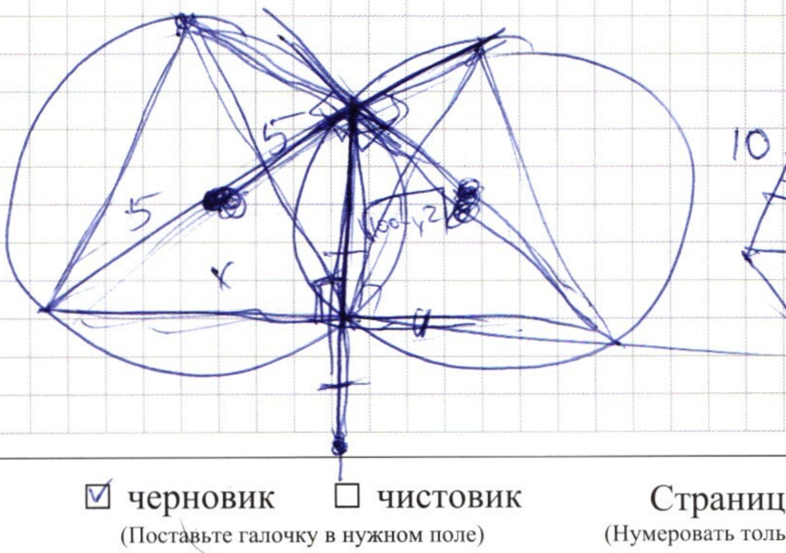
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

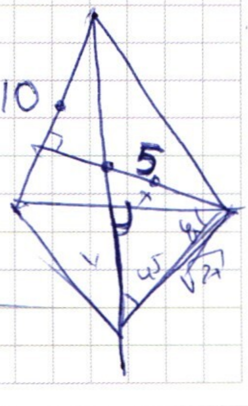
$$\sin\alpha+\beta = \cos\alpha+\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$











$y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6 \quad x=-3$

$|y-6|+|y|=6$

$\vee\!|$

$|2y-6|$

$|y-3|\leq 3$

$0\leq y\leq 6$ ~~т.к. $y-3+x<0 \Rightarrow 0\leq y\leq 6$~~

3) $y-3-x\leq 0 \quad y-3+x\geq 0$

$-y+3+x+y-3+x=6$

$x=3$

$|2y-6|\leq|y-6|+|y|=6$

$|y-3|\leq 3$

$0\leq y\leq 6$ ~~$y-3+x<0 \Rightarrow 0\leq y\leq 6$~~

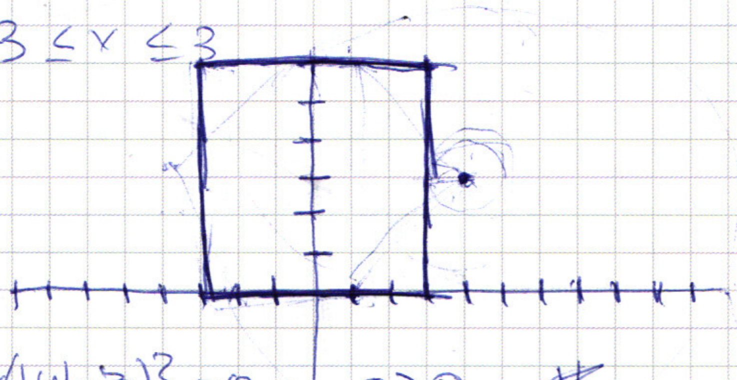
4) $y-3-x\leq 0 \quad y-3+x\leq 0$

$x+3-y+x+3-y=6 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$

$|2x|\leq|x+3|+|x-3|=6$

$|x|\leq 3$

$-3\leq x\leq 3$



$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \quad a\geq 0 \quad \#$

~~1) $x,y\geq 0$.~~ Пусть $(x_0;y_0)$ - решение системы

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y_0 = 6.$ $-3 \le x_0 \le 3$ $\Rightarrow$ ~~$y_0; -x_0)$~~ $($~~$-x_0; y_0)$~~ ~~реш~~

$(-x_0, y_0)$ - решение. $3 \ge -x_0 \ge -3$ WLOG $x_0 \ge 0$.

$(x_0-4)^2 + (6-3)^2 = a$

$(x_0-4)^2 + 9 = a.$

$(|x_0|-4)^2 + (|0|-3)^2 = (x_0-4)^2 + 9 = a \Rightarrow$

$(x_0; 0)$ тоже решение $\Rightarrow$ $(-x_0; 0)$ решение.

$\exists x_0 \ne 0 \Rightarrow$ $(x_0; 6)$, $(-x_0; 6)$, $(x_0, 0)$ и $(-x_0, 0)$ -

- 4 розных решения $\varnothing$ $\Rightarrow x_0 = 0.$

$(|0|-4)^2 + (|6|-3)^2 = a$ $a = 25$

2) $y_0 = 0$ $-3 \le x_0 \le 3$

$(|x_0|-4)^2 + (|0|-3)^2 = a$

$(|x_0|-4)^2 + 9 = a$

$(|-x_0|-4)^2 + 9 = a$ $\Rightarrow$ $(-x_0; 6)$ - тоже решение.

$(|x_0|-4)^2 + (|6|-3)^2 = (|x_0|-4)^2 + 9 = a \Rightarrow$

$(x_0, 6)$ - решение $\Rightarrow$ $(-x_0; 6)$ решение если $x_0 \ne 0$ то получим 4 розных решения $\Rightarrow x_0 = 0$ и $a = 25$

3) $x_0 = 3$ $0 \le y_0 \le 6.$

$(|3|-4)^2 + (|y_0|-3)^2 = a$

$(|y_0|-3)^2 + 1 = a$

$0 \le y_0 \le 6$

$0 \le 6 - y_0 \le 6$

$(|3|-4)^2 + (|6-y_0|-3)^2 = 1 + (6-y_0-3)^2 = 1 + (3-y_0)^2 =$

$= a$ => Если $(x_0; y_0)$ - решение то $(x_0, 6-y_0)$ -

- тоже решение.

$(|-3|-4)^2 + (|y_0|-3)^2 = 1 + (y_0-3)^2 = a$ =>

$(-3; y_0)$ - решение => $(-3; 6-y_0)$ - решение.

Если и $y_0 \neq 3$ => получим 4 разных решения $\varnothing$

=> $y_0 = 3$

$(|3|-4)^2 + (|3|-3)^2 = a \quad a = 1.$

4) $x_0 = -3 \quad 0 \le y_0 \le 6$

$6 \ge 6 - y_0 \ge 0$

$(|-3|-4)^2 + (|y_0|-3)^2 = a$

$a = 1 + (y_0-3)^2$

$(|-3|-4)^2 + (|6-y_0|-3)^2 = 1 + (6-y_0-3)^2 = 1 + (y_0-3)^2 = a$

=> $(-3; 6-y_0)$ - тоже решение.

$(|3|-4)^2 + (|y_0|-3)^2 = 1 + (y_0-3)^2 = a$ =>

$(3; y_0)$ - тоже решение => $(3; 6-y_0)$ - решение

Если $y_0 \neq 3$ то получим 4 разных решения $\varnothing$

=> $y_0 = 3 \quad x_0 = -3 \quad (|-3|-4)^2 + (|3|-3)^2 = a \quad a = 1$

Ответ: $a = 1$ и $a = \cancel{25}$ 25.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

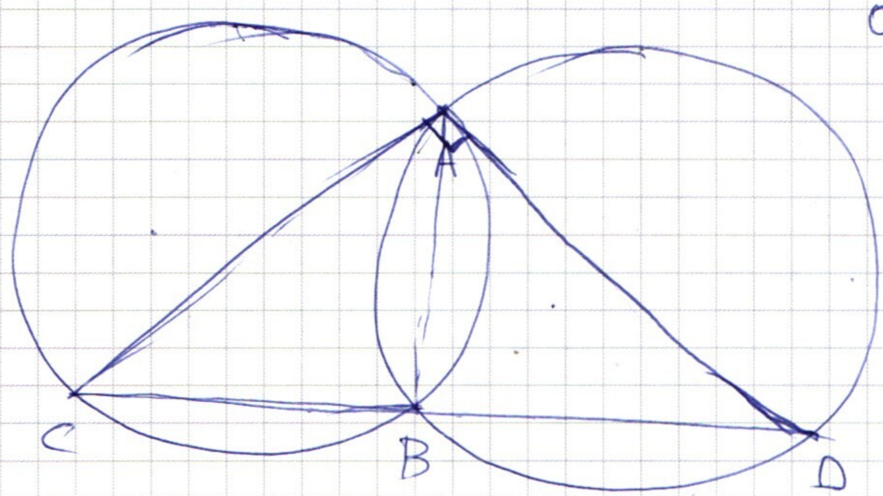
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

O_1 - центр I окр.

O_2 - центр II окр.

а)

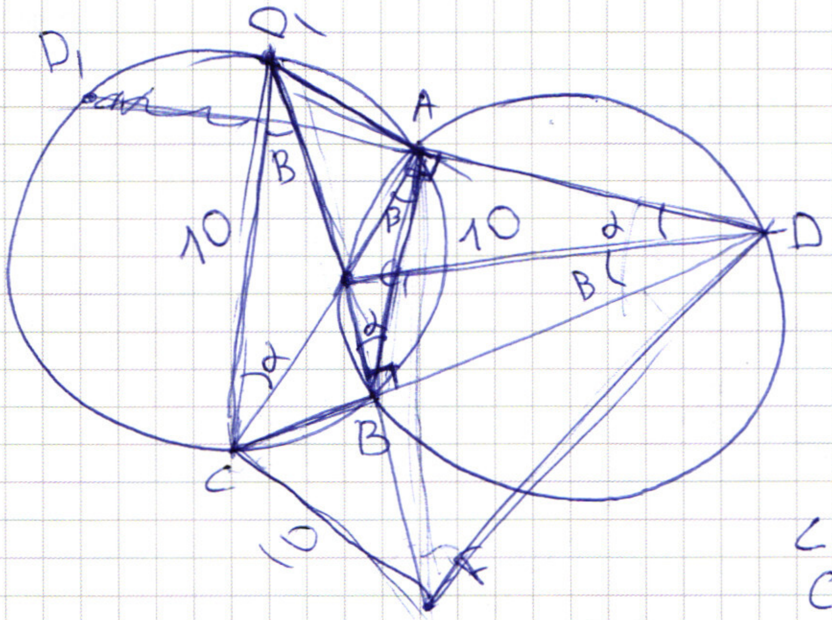


1) Пусть CA - кассательная к II окружности и DA к I => $O_2 \in DA$ и $O_1 \in CA$ => CA и DA - диаметры => $CA = DA = 10$ и $CD = 10\sqrt{2}$ => $AB \perp CD$ и $CB = BD = 5\sqrt{2}$ $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{50+50} = 10$.

2) Пусть CA кассательная ко II окр. => $O_2 \in AD$ => AD - диаметр => $\angle DBA = 90$ => $\angle CBA = 90$ => CA - диаметр I окр. => DA - кассательная к I окр. => $CF = 10$

3) Пусть DA - кассательная к I окр. - решается аналогично 2 случаю

4) CA и DA - не кассательные.



Пусть CA пересекает II окр в точке C_1, а DA I окр. в точке D_1

$\angle CAD_1 = 90 \Rightarrow$

CD_1 - диаметр I окр.

$\angle C_1AD = 90 \Rightarrow$

C_1D - диаметр II окр.

Т.к. CD_1 - диаметр $\Rightarrow \angle D_1BC = 90$

Т.к. C_1D - диаметр $\Rightarrow \angle C_1BD = 90 \Rightarrow D_1, C_1, B$ - collinear

CD_1 - диаметр $\Rightarrow CD_1 = 10$ $\quad \angle ADC_1 = \alpha$

C_1D - диаметр $\Rightarrow C_1D = 10$ $\quad \angle BDC_1 = \beta$

$\angle ADC_1 = \angle ABC_1$ т.к. A, D, B, C_1 - cyclic

$\angle ABC_1 = \angle ABD_1$ т.к. B, D_1, C_1 - collinear

$\angle ABD_1 = \angle ACD_1$ т.к. A, B, C, D_1 - cyclic

$\angle BDC_1 = \angle BAC_1$ т.к. A, D, B, C_1 - cyclic

$\angle BAC_1 = \angle BAC$ т.к. C, C_1, A - collinear

$\angle BAC = \angle BDC$ т.к. ~~A, B,~~ A, B, C, D_1 - cyclic

$\angle BD_1D = 90 - \alpha - \beta$ т.к. $BD_1 \perp BD$ и ~~$\angle BDA$~~

$\angle BDD_1 = \angle BDA = \alpha + \beta$. $\angle CC_1D_1 = 180 - \alpha - \beta$

Применим теорему синусов в $\triangle CC_1D$ и в $\triangle DD_1C$

$$\frac{DC_1}{\sin C_1CD_1} = \frac{D_1C}{\sin CC_1D_1}$$

$$\frac{D_1C_1}{\sin C_1DD_1} = \frac{DC_1}{\sin DD_1C_1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle C_1CD_1 = \angle C_1DD_1 = \alpha \Rightarrow$

$\frac{D_1C}{\sin CC_1D_1} = \frac{D_1C_1}{\sin C_1CD_1} = \frac{D_1C_1}{\sin C_1DD_1} = \frac{C_1D}{\sin DD_1C_1} = \frac{C_1D}{\sin DD_1B}$

$\frac{10}{\sin\alpha+B} = \frac{10}{\cos\alpha+B} \Rightarrow \sin\alpha+B = \cos\alpha+B$ $\alpha+B<180$ ~~$\alpha+B<180$~~

$\Rightarrow \alpha+B=45$. $BF=BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45$ т.к.

$\angle FBD = 90^\circ \Rightarrow \angle FDB = 45 = \angle D_1DB$ т.к. $\alpha+B=45$

$\Rightarrow BD_1 = BD$ т.к. $\angle D_1BD = 90$ и $\angle BDD_1 = 45 \Rightarrow$

$BD_1 = BD = BF$ $CF = \sqrt{CB^2+BF^2} = \sqrt{CB^2+BD_1^2} = 10$

б) в 1), 2) и 3) $BC \neq 6$ значит CA и DA

не касательные. ~~$D_1C=10$ $BC=6 \Rightarrow BD_1=8$ (по теореме Пифагора) $BD_1=BD \Rightarrow BD=8 \Rightarrow CD=14$~~

~~$\alpha+B=45$ $AC=AD$ т.к. $\angle CAD=90$ $\angle CDA=45 \Rightarrow$~~

~~$CA=DA$ $CD=\sqrt{CA^2+DA^2}=\sqrt{2}DA \Rightarrow DA=7\sqrt{2}$~~

~~$BD_1=BD=8 \Rightarrow DD_1=8\sqrt{2} \Rightarrow AD_1=\sqrt{2} \Rightarrow$~~

~~$S_{CAD_1} = \frac{CA \cdot AD_1}{2} = \frac{8\cdot\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$~~

~~$S_{CAD_1} = S_{CA_1D} + S_{AC_1D}$~~

$CF = CD_1 = 10 \Rightarrow \angle CFD_1 = \angle CD_1F = B \Rightarrow$

~~$\angle CFB = \angle CFD_1 = B =$~~

$\angle CFC_1 = \angle CFD_1 = B = \angle CDC_1 \Rightarrow C, F, D, C_1$ – cyclic

$\angle DFC_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle BCC_1 = 45$ $\angle CBC_1 = 90 \Rightarrow C_1B = CB = 6$

~~$\Rightarrow CF$~~

$CD_1 = 10$ $CB = 6 \Rightarrow BD_1 = 8$ (по теореме Пифагора)

$BD_1 = BD \Rightarrow BF = BD = BD_1 = 8 \Rightarrow FC_1 = BF + BC_1 = 8+6 =$
$= 14.$ $AC = AD$ т.к. $\angle CDA = 45$ и $\angle CAD = 90 \Rightarrow$
$AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}.$ $PD_1 = \sqrt{2}$ $BD_1 = 8\sqrt{2} \Rightarrow AD_1 = \sqrt{2} \Rightarrow$

$AC = \sqrt{CD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{98}$ $\angle CC_1F = 180 - \angle FC_1A =$
$= 180 - \angle BC_1A = \angle BDA = 45° \Rightarrow S_{ACF} = \frac{C_1F \cdot AC}{2} \sin CC_1F =$
$= \frac{14 \cdot 7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 49$

№7

При $x \geq 70.$ $x = 64 + k$ $k \geq 6$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \overset{(!)}{>} 70 + (2^{64} - 1)x \quad \text{т.к.}$$

$$2^{64} \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{65} \overset{(!)}{>} 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^{64} \cdot 2^k > 2^{64}(x-6) + 70 - x$$

$$2^{64} \cdot 2^k > 2^{64}(x-6) \geq 2^{64}(x-6) + 70 - x$$

$$2^{x-64} \overset{(!)}{>} \cancel{2^{64}}(x-6)$$

для $x = 70$ ок.

Пусть для $x = k$ верно докажем для $k+1$

$$2^{k+1-64} = 2 \cdot 2^{k-64} \geq 2^{k-64} + 1 > k - 6 + 1$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64}-1)x$

$y > 2 + 3\cdot 2^{65}$

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$

$2^x + x < 70 + 2^{64}(x-6)$

$x = 2^2 t$

$2^2 t$

$2^x + 3\cdot 2^{65} \ge 70 + 2^{64}x$

$2^2 t \ge 64 + t$

$x < 2^{\lceil \log_2 x \rceil}$

$2^x + x \quad 2^{64}(x-6)$

$x > 64 + \log_2 x - 6$

$\cancel{67}$

$5 \quad 2^5 \quad 32 \cdot 69$

70

$6 > l$

$x = 70 + k$

$6 + k > \log_2 x - 6$

$6 + k > \log 64 + k$

$6 + k = \log 64 \cdot 2^k$

$x = 69$

$2^{69} + 3\cdot 2^{65}$

2^{69}

$2^{69} + 3\cdot 2^{65} \quad 70 \cdot (2^{64}-1)69$

$2^{\cancel{68}\,69}$ $\quad \cancel{70} + 63\cdot 2^{64} + 1$

$2^{64} > 1$

$2^{68} + 3\cdot 2^{68} \quad \cancel{70} + 2^{64}\cdot 68 - \cancel{6} + 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 665   3375 | 25 → 135 $5^3 = 3$ $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$ $\frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{3!\cdot 0!}$

36   27 $3 \cdot 10^3 + 375 = 5^3(3\cdot 2^3 + 3) = 5^3 \cdot 3^3$

75, 125 C_8^2

$\sin 7x - 45 - \sin 4x = 2\cos\frac{11x}{2}\frac{\pi}{2}$

$a_1 \dots a_8$ 3, 3, 3   5, 5, 5   1, 1 $\sin\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}$

$\frac{7\cdot 720}{66}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ $\frac{8!}{2!\,3!\,3!}$

$720\cdot 8$, 5760 | 1/2 → 2880 $\frac{2\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 6\cdot 6}$ $2\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2$

25

$\cos 3x - \cos 11x = 2\sin 7x \sin 4x$ $\frac{4\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 6\cdot 6}$ $7\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3$

$-2\sin 7x \sin 4x + \sin 11x - \sin 3x = \cos 7x \sin 4x$

840 | 6 → 140, 6, 24, 24

C_8^2

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\frac{6\cdot 7}{2}$ $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$ 56 $= 7x$ $B = 4x$

20   $= 4x$ $B = -7x$

$\sin(45 - 11x) + \sin(3x - 45) = \cos 14x$

$-2\sin 8x \cos 90 - 14x$ $\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x \sin 4x$

$(|x| - 4)^2 + 9 = a$ $-2\sin 8x \sin 14x = \cos 14x$

$\sin 11x - \sin 3x = 2\cos 7x \sin 4x$

$-2\sin 4x \cos 45 - 7x = \cos 14x$

$\sin(45 + x) \cdot \sin 45 \cos x - \cos 45 \sin x$

$\sin(45 - 11x) + \sin(3x - 45) = \cos 14x$ $5! = 120$

$6! = 720$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 6\cdot 6}$ $2\sin -4x \cos 45 - 7x = \cos 14x$ $\sin 4x($ $7! = 5040$

$8! = 40000 + 320$

$\cos(45 + 11x) - \cos(45 + 3x) = \cos 14x$ 40320

$16 \cdot 35$

$140 \cdot 4$

560   $2\cos 45 + 7x \cos 4x = \cos 14x$ 20160 | 6 → 3360, 12, 21, 18, 36

$-2\sin 4x \cos 45 - 7x = \cos 14x$

$-\sin 4x = \sin 45 - 7x$

$\sin 4x = \sin 7x - 45$ $\sin 2(45 - 7x)$ 3710   3360 | 6 → 560, 30, 36

☑ черновик   ☐ чистовик   (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

$(4+y)$

$(2y+4)^2+12y^2-48y$

$4y^2+16y+16+12y^2-48y$

$16y^2-32y+16$

$(4(y-1))^2$

$x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0$

$(x-y)^2-4x-4y^2+12y-9+9=0$

$(x-y)^2-4x-(2y-3)^2+9=0$

$(x-y-2)^2$

$2y+4-2(y-1)$

$x^2+y^2+4-4x+4y-2xy-4y^2-16y-4$

$\lg x \cdot \lg\frac{y^5}{x} = 2\log xy \log y$

$(x-y-2)^2-B(y^2$

$\log x\,(5\lg y-\lg x)$

$289 \cdot 5 = 1445$, $1445+171 = 1616$

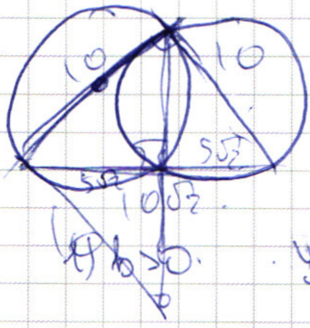
$a(5a-b)=2(a+b)a$

$\frac{464\sqrt{17}-1646}{\frac{9-\sqrt{17}}{2}\cdot 36}$

$5a^2-ab=2a^2+2ab$

$3a^2=3ab$

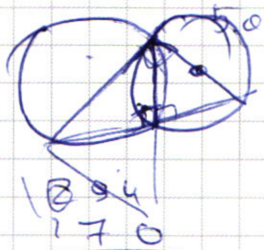
$a(a-b)=0$



1) $a=0$

$a(5b-a)=2(a+b)b$

$5ab-a^2=2ab+2b^2$



$a^2-3ab+2b^2=0$

1) $b>0$. $y>1$

$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$

$D=9b^2-8b^2=b^2$

$1394 + 170 = 464$

$\frac{3b\pm|b|}{2}=\frac{3b\pm b}{2}$

$2b,\ b$

$\cancel{\log}\ x - \lg x = 2\lg y$

$x=y^2$

1) $y>1$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$x=\frac{2y+4-2|y-1|}{2}=y+2-|y-1|=3$

$y^2=3$

$289\sqrt{17}-5\cdot289+10\cdot17\sqrt{17}-10\cdot17+5\cdot\sqrt{17}-1$

$289+170+5 \quad -5\cdot289-170-1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)