МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 14x = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 11x\cos 3x - \sqrt{2}\sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2}\cos 11x \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x - \sqrt{2}\sin 11x \sin 3x$

1) $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

$3375 \mid 5 = 675$; $675 \mid 5 = 135$; $135 \mid 5 = 27$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 5^3 \cdot 3^3$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$

Два $\vdots$ 3

$5^3 \cdot 3^3$

$27 \cdot 5^3$

$3^3 \cdot 5^3$

5 цифр + 3 и 5^4

3 6 9

$\varnothing$

7) ~~y~~ $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64} - 1)x$

2) ~~$\cos 11x(1 - \sqrt{2}\cos 3x) - \cos 3x$~~

$\cos 11x - \cos 3x = \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \sin \cdot \sin x - \cancel{\cos\cos} - \sin\sin =$

$\cos(7x+4x) \quad \cos(7x-4x)$

$= -2\sin 7x \sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \sin 4x \cos 7x - \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \sin 4x \cos 7x =$

$\sin(7x-4x) \quad \sin(7x+4x)$

$-2\sin 4x \cos 7x$

$-2\sin 4x \sin 7x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 4x(\sin 7x - \cancel{\cos 7x}\ {+\cos 7x}) = \cancel{\sqrt{2}(2\cos^2 7x - 1)}$ $\sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-2\sin 4x(\cos 7x+\sin 7x)=\sqrt{2}(\cos 7x-\sin 7x)(\cos 7x+\sin 7x)$

$\left[\begin{array}{l}\cos 7x+\sin 7x=0\\ -2\sin 4x=\sqrt{2}(\cos 7x-\sin 7x)\end{array}\right.$

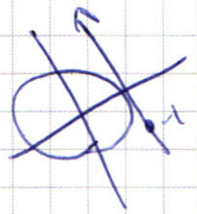
$-\sqrt{2}\sin 4x=\cos 7x-\sin 7x=\cos 4x\cos 3x-\underline{\sin 4x\sin 3x}-\underline{\sin 4x\cos 3x}-\sin 3x\cos 4x$

$\cancel{\cos}$

$-\sqrt{2}\sin 4x+\sin 4x\sin 3x+\sin 4x\cos 3x=\cos 4x\cos 3x-\sin 3x\cos 4x$

$\cancel{\sin 4x(\sin 3x+\cos 3x-\sqrt{2})=\cos 4x(\cos 3x-\sin 3x)}$

$\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$



$x^2-4x-2xy-3y^2+12y=0$

$x^2-x(4+2y)+3y(-y+4)=0$

$\left[\begin{array}{ll}x=3y & (1)\\ x=-y+4 & (2)\end{array}\right.$ $-y+4>0$ $0<y<4$

$x=9$

$(9;3)$

(1) $\cancel{\frac{y^5}{3x^5}}$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y}=y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y}=y^{2\lg 3y^2}$

$0<y<4$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\log(4-y)}=y^{2\lg y(4-y)}$

$\lg(4-y)$

$\lg 3y\cdot\lg\frac{y^4}{3}=2\lg y\cdot\lg 3y^2$

$(\lg 3+\lg y)\cdot(4\lg y-\lg 3)=2\lg y\cdot(\lg 3+2\lg y)$

$(\lg 3+t)(4t-\lg 3)=2t(\lg 3+2t)$

$4\lg 3\cdot t-(\lg 3)^2+\cancel{4t^2}-t\cdot\lg 3=2t\lg 3+\cancel{4t^2}$

$4t\cdot\lg 3-\lg^2 3-t\lg 3=2t\lg 3$

$4t-\lg 3-t=2t$ $t=\lg 3$ $\lg y=\lg 3$ $\underline{y=3}$

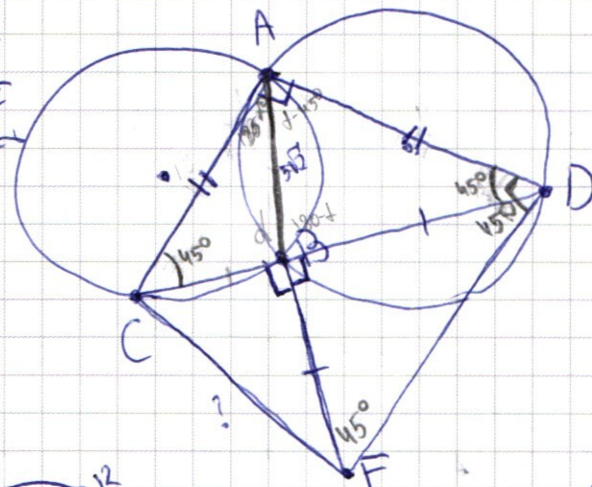
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



AC∥DF

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$

$AB\sqrt{2} = 2\cdot 5$

$AB = 5\sqrt{2}$

$69 - 7 + 1 = 63$

$x = 64$: $2^{64} + 3\cdot 2^{65} \vee 2^{64} + 2^{70}$

$x = 62$: $2^{62} + 3\cdot 2^{65} \vee 2^{8} + 62\cdot 2^{64}$

$2^{62} + 3\cdot 2^{65} \vee 2^{8} + 31\cdot 2^{65}$

$x = 60$:

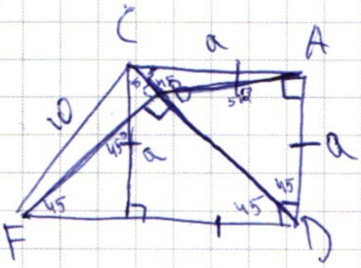
$x = 45$

180 − 180 + α − 45

$\left(a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}\right)^2 =$

$= \cancel{2a^2} + \cancel{200} - \cancel{2a^2} \pm 4a\sqrt{100 - a^2} =$

$= 50 \pm a\sqrt{100 - a^2}$



$100 - a^2$

$2a^2 + 2\left(50 \pm a\sqrt{100 - a^2}\right) - \sqrt{2}\cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}$

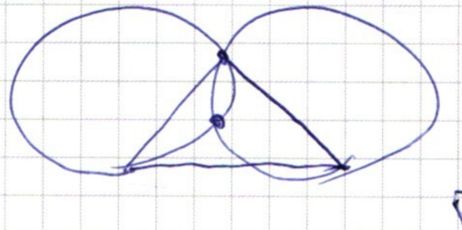
$2a^2 + 2\left(50 \pm a\sqrt{100 - a^2}\right) - 2a^2 \mp 2a\sqrt{100 - a^2}$

$2a^2 + 100 \pm$

BC через a (cos)

$BD = a\sqrt{2} - BC$

$BF = BD$



$BD = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}$

0, 3, 6, 9

$50 = a^2 + BC^2 - 2aBC\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$BC^2 = 50 - a^2 + aBC\sqrt{2}$

$BC^2 - a\sqrt{2}\cdot BC + a^2 - 50 = 0$

$BC = \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{2a^2 - 4a^2 + 200}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}$

$CF^2 = \left(\frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}\right)^2$

$CF^2 = 2a^2 + 2t^2 - 2\sqrt{2}at$

$CF^2 = t^2 + (a\sqrt{2} - t)^2$

$CF^2 = t^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}at + t^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x=8$:

$x=5$: $32+3\cdot2^{65}$ V $65+5\cdot2^{64}$

$3\cdot2^{65}$ V $33+5\cdot2^{66}$

$x=70$: $70\cdot2^{64} < 2^{70}+3\cdot2^{65}$

$70\cdot2^{64}$ V $2^{70}+6\cdot2^{64}$

$64\cdot2^{64}$ V 2^{70}

$2^{70}=2^{70}$

$x=6$: $64+3\cdot2^{65}$ V $64+6\cdot2^{64}$

$128+3\cdot2^{65}$

$65+3\cdot2^{65}$

$x=7$:

$x=1$: $f<g$

$x=2$: $f<g$

$x=3$: $f<g$

$x=4$: $f>g$

$x=64$: $f<g$

$x=70$: $f<g$

$x=71$: $f<g$

$x=8$: $256+3\cdot2^{65}$

$70+2^{67}$

$62+2^{67}$

$x=65$: $4\cdot2^{65}$ V $5+65\cdot2^{64}$

2^{67} V $5\cdot$

$y, x \in \mathbb{Z}$

$71\cdot2^{64} < 2^{71}$

$x=72$: $72\cdot2^{64}-2\cdot2^{72}+3\cdot2^{65}$

$$\begin{cases} y > 2^x+3\cdot2^{65} \\ y \le 70+(2^{64}-1)x \end{cases}$$

$x=60$: $2^{60}+3\cdot2^{65}$ V $10+60\cdot2^{64}$

$x>0$

$2^{60}+\frac{3}{2}\cdot2^{66}$ $y < 3\cdot2^{65}$

$10+15\cdot2^{66}$

$13{,}5\cdot2^{66}$

$x=71$: $71\cdot2^{64}-1 \ge 2^{71}+3\cdot2^{65}$

$2^{71} <$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$$x=1 \begin{cases} y > 2+3\cdot2^{65} \\ y \le 69+2^{64} \end{cases}$$

$$x=2 \begin{cases} y > 4+3\cdot2^{65} \\ y \le 70+2^{65}-2 = 68+2^{65} \end{cases}$$

2^{66}

$2^x+3\cdot2^{65}$

$70+(2^{64}-1)x \ge 2^x+3\cdot2^{65}$

$100\cdot2^{64}$

$\frac{1}{2}x - 50$

$x=2$: $70+2$

$2^{70}+3\cdot2^{65}$

$x=4$: $70+2^{66}-4 \ge 16+3\cdot2^{65}$

$66+2^{66} \ge 16+3\cdot2^{65}$

$50+2^{66} \ge 3\cdot2^{65}$

100: $50+2^{66}$

$\frac{3}{2}x - 50$

$x+50$

$\frac{3}{2}\cdot50$

$2^{64}+3\cdot2^{65}$

$x=64$: $6+2^{70} \ge 2^{70}+3\cdot2^{65}$

$70\cdot2^{64}$

$70\cdot2^{64} < 128\cdot2^{64} < 2^{71}$

$2^{65}+3\cdot2^{65}$ V $5+65\cdot2^{64}$

2^{67} V

$62+2^{67} \ge 2^8+3\cdot2^{65}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overbrace{\lg(4-y)}^{u}\lg\left(\frac{y^5}{4-y}\right) = 2\overbrace{\lg y}^{v}\lg(y(4-y))$

$u\cdot(5v-u) = 2v(u+v)$

$5uv-u^2 = 2uv+2v^2$

$2v^2-3uv+u^2=0$

$v^2-\frac{3}{2}uv+\frac{u^2}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l} v=u \\ v=\frac{u}{2}\end{array}\right.$

$\frac{2^{64}-1}{2^{63}-1} = 2$

$S = \frac{2^7(2^{63}-1)}{1} = 2^{70}-128$

$\frac{7+63}{2}\cdot 63 = 35\cdot 63$

$\lg(4-y)=\lg y \Rightarrow 4-y=y \quad 2y=4\ y=2,\ x=2$

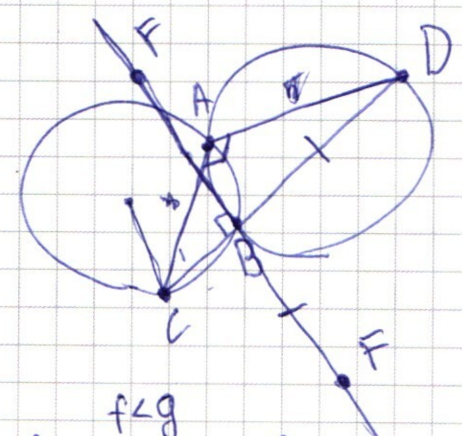
$\lg y = \frac{\lg(4-y)}{2} = \quad y^2=4-y = y^2+y-4=0$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$y-x-3 \qquad y-3+x$

$y=x+3 \qquad y=-x+3$



CF - ?

$70:\ 2^{70}+3\cdot2^{65}\ \vee\ 70\cdot2^{64}$

$64\cdot2^{64}+6\cdot2^{64}$

f<g

f g

$60:\ 2^{60}+3\cdot2^{65} < 10+80\cdot2^{64}$

$2^{60}+\frac{3}{2}\cdot2^{66} < 10+15\cdot2^{66}$

$64:\ 2^{64}+3\cdot2^{65} < 6+2^{70}$

$7\cdot2^{64} < 6+8\cdot2^{67}$

$55:\ 2^{55}+3\cdot2^{65}\ \vee\ 15+2^{64}\cdot55$

$2^{55}+3\cdot2^{65} < 7{,}5\cdot2^{65}$

$50:\ 2^{50}+3\cdot2^{65}\ \vee\ 70+50\cdot2^{64}-20$

$2^{50}+3\cdot2^{65} < 20+50\cdot2^{64}$

$32:\ 2^{32}+3\cdot2^{65} < 38+2^{69}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 7x + \sin 7x = 0$

$-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)$

~~cos x + sin x~~

$-\sqrt{2}\sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$

$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x\right) =$

$= \sqrt{2}$

$-\sin 4x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 7x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 7x$

$\sin 4x = \sin 7x \cos\frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin\frac{\pi}{4}$

$\sin 4x = \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\left[\begin{array}{l} 4x = 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = \pi - 7x - \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} > 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

$+ \cancel{70 + (2^{64}-1)x > y}$

$\cancel{y > 2^x + 3\cdot 2^{65}}$

$70 + (2^{64}-1)x > 2^x + \cancel{3\cdot 2^{65}}$

$5^3 \cdot 3^3$

5 цифр

~~5 5 5~~ 5^{10} ~~выбрать~~ 5 цифр

$70 + (2^{64}-1)x > 3\cdot 2^{65}$

$x > \frac{3\cdot 2^{65} - 70}{2^{64}-1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$$

ОДЗ:

~~xy~~

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Рассм. второе ур-е:

$$x^2-x(2y+4)+3y(4-y)=0$$

По теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=4-y \end{array}\right.$$

I $x=3y$:

Подставим $x=3y$ в первое ур-е:

$$\left(\frac{y^{\cancel{5}\,4}}{\cancel{3y}}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

~~Прав~~ обе части положительны, тогда

$$\lg\left(\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y}\right) = \lg\left(y^{2\lg 3y^2}\right)$$

$$\lg 3y \cdot \lg\frac{y^4}{3} = 2\lg 3y^2\cdot\lg y$$

$$(\lg 3+\lg y)(4\lg y-\lg 3) = 2\lg y(\lg 3+2\lg y)$$

Пусть $\lg y = t$:

Раскрои скобки: $4\lg 3\cdot t - \lg^2 3 + \cancel{4t^2} - t\cdot\lg 3 = 2t\lg 3 + \cancel{4t^2}$

$$4t-\lg 3-t=2t$$

$$t=\lg 3$$

$\lg y = \lg 3$, то $y = 3$, $x = 9$

II $x = -y + 4$

Подставив в первое ур-е получим:

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y(4-y)}$$

$$\lg\left(\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)}\right) = \lg\left(y^{2\lg y(4-y)}\right)$$

$$\lg(4-y)\lg\left(\frac{y^5}{4-y}\right) = 2\lg y \lg(y(4-y))$$

$$\lg(4-y)(5\lg y - \lg(4-y)) = 2\lg y \cdot (\lg y + \lg(4-y))$$

Пусть $\lg(4-y) = u$, $\lg y = v$, тогда

$$u(5v - u) = 2v(v+u)$$

$$5uv - u^2 = 2v^2 + 2uv$$

$$2v^2 - 3uv + u^2 = 0$$

По теор. Виета:

$\left[\begin{array}{l} v = u \\ v = \frac{u}{2} \end{array}\right.$

$v = u$, то $\lg(4-y) = \lg y \Rightarrow 4 - y = y$, $y = 2$, то $x = 2$

$v = \frac{u}{2}$, то $\lg y = \frac{\lg(4-y)}{2} \Rightarrow y^2 = 4 - y$; $y^2 + y - 4 = 0$,

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, $y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ не удовл. $y > 0$, то

$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, то $x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

Получаем: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Решения удовлетворяют ОДЗ ~~у~~ и уравнениям системы.

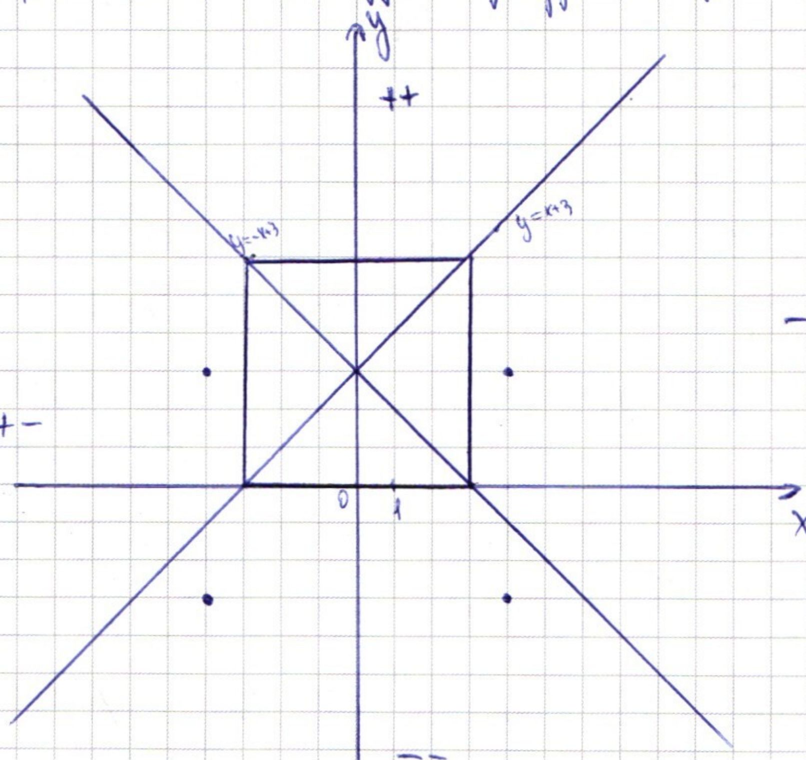
Ответ: $(2; 2)$; $(9; 3)$; $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

Отобразим множество решений первого и второго уравнений системы.

Построим прямые, на которых обнуляются подмодульные выр-я первого ур-я; поставим знаки ~~модуля~~ подмодульных выр-й в разных частях:



Рассмотрим первое ур-е в зависимости от знаков подмод. выр-й:

$++:\ y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6;\ 2y-6=6;\ y=6$

$+-:\ \cancel{y}-3-x-\cancel{y}+3-x=6;\ -2x=6;\ x=-3$

$-+:\ -\cancel{y}+3+x+\cancel{y}-3+x=6;\ 2x=6;\ x=3$

$--:\ y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=-6;\ y=0$

Второе уравнение задаёт 4 окр-ти с центрами в т-ках $(\pm4;\pm3)$ радиуса $\sqrt{a}$, ограниченные четвертью, в которой расположен их центр. Т.к. изображение симметрично отн-о $y=0$, то, чтобы было ровно 2 р-я должно быть по одному решению при $x>0$ и $x<0$. (кроме случаев, когда решения лежат на осях).

При $a<0$ второе уравнение не имеет решений.

При $0\le a<1$ решений не будет.

При $a=1$ окр-и с центр-и в $(4;3)$ и $(-4;3)$ косн-тся $x=3$ и $x=-3$ соответственно.

Заметим, что изображение при $y>0$ симметрично отн-о $y=3$, то если есть 1 решение при ~~$y>0$~~ $0<y<3$, то есть и решение при $y>3$, а значит р-й будет >2. То есть, если решения не лежат на $y=3$ (а это возможно только при $a=1$), то окр-и из I и II четвертей не должны иметь т-и пересечения с квадратом. Тогда радиус должен быть больше, чем расстояние до самой удалённой точки квадрата в соотв. четверти. Для окр-и в I четверти это т-и $(0;0)$ и $(0;6)$, то $R>5$, где $R=\sqrt{a}$.

Тогда ~~в~~ в I и II четвертях нет р-й, но в III и IV также нет решений, т.к. $R>$, чем расстояние до самой дальней точки в соотв. четверти.

Теперь рассмотрим случаи, когда решения лежат на осях: при $1\le R<5$ будет решение не на осях, то р-й будет больше чем 2; Расстояние до самой дальней точки ~~на~~ квадрата на оси равно 5, то ~~при~~ $R>5$ не подходит. ~~$R=5$~~ При $R=5$ ровно 2 р-я: $(0;0)$ и $(0;6)$, то $a=25$.

Ответ: $a=1$; $a=25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 7x + \sin 7x = 0 \\ -2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \end{array}\right.$$

I $\cos 7x + \sin 7x = 0$

При $\cos 7x = 0$ $\sin 7x + 0 = 0$, т.е $\sin 7x = 0$, а это невозможно, то $\cos 7x \neq 0$.

Поделим на $\cos 7x \neq 0$:

$$1 + \operatorname{tg} 7x = 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \ k \in \mathbb{Z}}$$

II $-2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)$

$$2\sin 4x = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x\right)$$

$$\sin 4x = \sin 7x \cos\frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ то}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

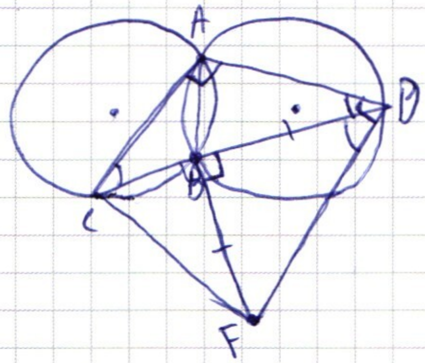
$$\left[\begin{array}{l} -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

R=5



а) 1) По т. синусов в $\triangle ABC$ и ABD:

$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{AB}{\sin ADB} = 2R = 10$, то

$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (т.к. $\triangle CAD$ - прямоуг.),

то $\frac{AB}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 10$, $AB = 5\sqrt{2}$

2) Т.к. $BF \perp CD$, $BD = BF$, то $\triangle BFD$ - р/б, прямоуг., то $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$, то $\angle ADF = 90^\circ$

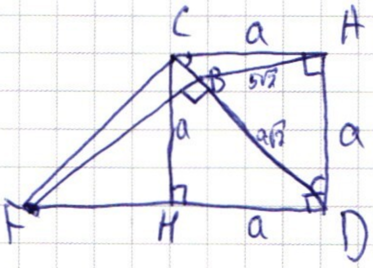
3) $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle ADF = 90^\circ$, то $AC \parallel DF$, $ADFC$ - прямоуг. трап.

4) Рассмотрим трап. $ADFC$:

$AC = AD$ ($\triangle CAD$ - р/б, прямоуг.)

Пусть $AC = a$, CH - высота из т. C:

Тогда $ACHD$ - квадрат со стороной a,



то $CD = a\sqrt{2}$

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$50 = a^2 + BC^2 - 2aBC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$BC^2 = 50 - a^2 + aBC\sqrt{2}$

$BC = \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}$, то $BD = CD - BC = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200 - 2a^2}}{2}$

5) $BF \perp CD$, то $\triangle CBF$ - прямоуг, то

$CF^2 = BC^2 + BF^2$, $BF = BD$ (т.к. $\triangle BFD$ - р/б)

$CF^2 = BC^2 + (a\sqrt{2} - BC)^2 = BC^2 + 2a^2 + BC^2 - 2a\sqrt{2}BC = 2BC^2 + 2a^2 - 2a\sqrt{2}BC =$

$= 2\left(\frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200-2a^2}}{2}\right)^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}\cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200-2a^2}}{2} = 2 \cdot \frac{\cancel{4}(50 \pm a\sqrt{100-a^2})}{\cancel{4}} +$

$+ 2a^2 - 2\sqrt{2}a \cdot \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{200-2a^2}}{2} = 100 \pm \cancel{2a\sqrt{100-a^2}} + \cancel{2a^2} - \cancel{2a^2} \mp \cancel{2a\sqrt{100-a^2}} =$

$= 100$

$CF = 10.$

б) 6) $BC = 6$, то $50 = a^2 + 36 - 2a \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. п. 2)

$14 = a^2 - 6\sqrt{2}a$

$a^2 - 6\sqrt{2}a - 14 = 0$

$a = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{72+56}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2} = \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < 0 \text{ (не подходит)} \\ 7\sqrt{2} \end{array}\right.$

7) Из $\triangle CFH$:

~~$\cos FCH = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\angle FCH = \arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}$~~

$FH^2 = CF^2 - CH^2$

$FH^2 = 100 - 98 = 2$

$FH = \sqrt{2}$, то $\sin FCH = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos FCH = \frac{2}{\sqrt{5}}$

8) Рассм. $\triangle ACF$:

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin ACF$

$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin(90^\circ + \angle FCH) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \cos\angle FCH =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}} = \frac{70\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 14 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 14\sqrt{10}$

Ответ: а) 10
б) $14\sqrt{10}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

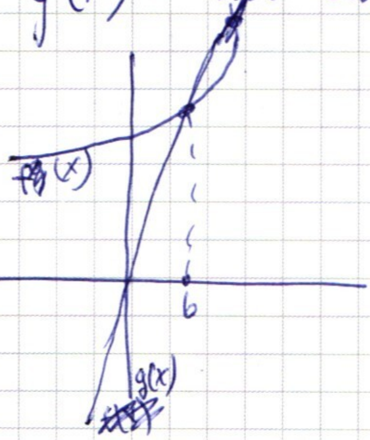
№ 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

Рассмотрим $f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{65}$ и $g(x) = 70 + (2^{64}-1)x$

$f(x)$ — показательная ф-ция, возр-ет

$g(x)$ — прямая, возр-ет



Они имеют не более 2 точек пересечения.

При ~~x = 0, 1, 2, 3~~ $x=0$ $f(x) < g(x)$

$(f(x) = 0,\ g(x) = 1 + 3\cdot 2^{65})$

При $x = 3$ $f(x) = 8 + 3\cdot 2^{65}$, $g(x) = 67 + 3\cdot 2^{64}$, то $f(3) > g(3)$

~~При x = 4 f(x) = 16 + 3·2^65, g(x) = 66 + 2^66~~

Подставим $x = 6$: $f(6) = 64 + 3\cdot 2^{65}$

$g(6) = 64 + 6\cdot 2^{64} = 64 + 3\cdot 2^{65}$, то

$f(6) = g(6)$

Подставим $x = 70$: $f(70) = 2^{70} + 3\cdot 2^{65} = 64\cdot 2^{64} + 6\cdot 2^{64} = 70\cdot 2^{64}$

$g(70) = 70\cdot 2^{64}$, то $f(70) = g(70)$

Т.е. нам подходят все $x \in [7; 69]$ (т.к $f(x) < y \le g(x)$, $g(x) > f(x)$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

При этом ~~нам~~ при каждом x нам подходят все $y > f(x)$, не превосходящие $g(x)$, т.е. всего ~~их~~ возможных y $g(x)-f(x)$, тогда посчитаем кол-во ~~их~~ y при каждом x

x	y
7	$g(7)-f(7)$
8	$g(8)-f(8)$
...	...
69	$g(69)-f(69)$

Тогда всего пар решений $g(7)-f(7)+g(8)-f(8)\dots$
$+g(69)-f(69)=$

$$=\sum_{k=7}^{69}\left(g(k)\right)-\sum_{k=7}^{69}\left(f(k)\right)$$

$$\sum_{k=7}^{69} g(k)=\left(2^7+2^8+\dots+2^{69}\right)+3\cdot2^{65}\cdot63=3\cdot63\cdot2^{65}+2^7\left(2^{63}-1\right)$$

$$\sum_{k=7}^{69} f(k)=70\cdot63+\left(2^{64}-1\right)\left(7+\dots+69\right)=70\cdot63+\left(2^{64}-1\right)\cdot37\cdot63=$$

$$3\cdot63\cdot2^{65}+2^7\left(2^{63}-1\right)-70\cdot63-37\cdot63\left(2^{64}-1\right)$$

Ответ: $3\cdot63\cdot2^{65}+2^7\left(2^{63}-1\right)-70\cdot63-37\cdot63\left(2^{64}-1\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Очевидно, цифр 0 быть не может, т.к. тогда пр-е цифр $=0$. ~~Итак~~ $3375=5^3\cdot3^3$, есть только одна цифра, дающая 5 — 5. Тогда среди цифр есть как минимум 3 „5". Среди других 5 цифр как минимум 2 являются ~~д~~ 3, 6 или 9.

~~Пусть число содержит только 9:~~

~~$\cdot 5^3 \cdot 8$~~

Однако 3375 — нечёт, то 6 не может быть, как и любых чётных цифр.

Тогда среди оставшихся пяти цифр есть единицы и либо 3 „3", либо 9 и 3:

I если число содержит 3 тройки:

цифры: 5 5 5 3 3 3 1 1

Таких чисел: $\frac{8!}{3!\,3!\,2!}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot5\cdot\cancel{6}\cdot7\cdot8}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=560$

II если число содержит 3 и 9:

цифры: 5 5 5 3 9 1 1 1

Таких чисел: $\frac{8!}{3!\,3!}=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot2\cdot3}=1120$

Всего чисел: $560+1120=1680$

Ответ: 1680 чисел