

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1.

1) $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Через цифры это произведение можно представить двумя способами - $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3$.

2) Количество неповторяющихся расстановок трех цифр 5 на восемь мест - $C_8^3 = 56$.

Количество неповторяющихся расстановок трех цифр 3 на ост. местах - $C_5^3 = 10$.

На оставшиеся места расставим единицы.

$\Rightarrow C_3^8 \cdot C_3^5 = 560$.

3) Теперь рассмотрим случай $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9$.

Количество расстановок 5 - C_3^8

количество расстановок 9 - C_1^5

количество расстановок 3 - C_1^4

$\Rightarrow C_3^8 \cdot C_1^5 \cdot C_1^4 = 56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$

$\Rightarrow \text{Итого} - 1120 + 560 = \text{т.е. } 1680$

Ответ: 1680.

Задача №2.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 4x \\ & -2\sin 7x \sin 4x - 2\cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x \\ & -2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \end{aligned}$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0.$$

$\Rightarrow \cos$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ & \cos 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin \frac{\pi}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ & 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{aligned}$$

$$7x = \pi k + \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{1}{7}\left(\pi k + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \\ & \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \end{aligned}$$

$$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - \sin 4x = 0$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 4x = 0.$$

$$\cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ & \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{11}\left(\pi k + \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$x = \frac{2}{3}\left(\pi k + \frac{\pi}{8}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x_1 = \frac{1}{7}(\sqrt{1}k + \frac{3\sqrt{1}}{4})$ $x_2 = \frac{2}{11}(\sqrt{1}k + \frac{5\sqrt{1}}{8})$;
 $x_3 = \frac{2}{3}(\sqrt{1}k + \frac{\sqrt{1}}{8})$, $k \in \mathbb{Z}$

Задача N 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$

1) Рассмотрим второе уравнение. Это четыре окружности с $R = 3$ и центрами $O_1(-4; -3)$, $O_2(-4; 3)$, $O_3(4; 3)$, $O_4(4; -3)$

2) Рассмотрим первое уравнение:

1. при $x < 0$

I $y < 3+x$

$$x+3-y+3-x-y=6$$

$$y=0; \quad x \in (-3; 0)$$

II $3+x \leq y < 3-x$; $y-3-x+3-x-y=6$
 $x=-3; \quad y \in [0; 6)$

III $y \geq 3-x$; $y=6$; $x \in [-3; 0)$.

2. при $x > 0$

I $y < 3-x$; $y=0$, $x \in [0; 3)$

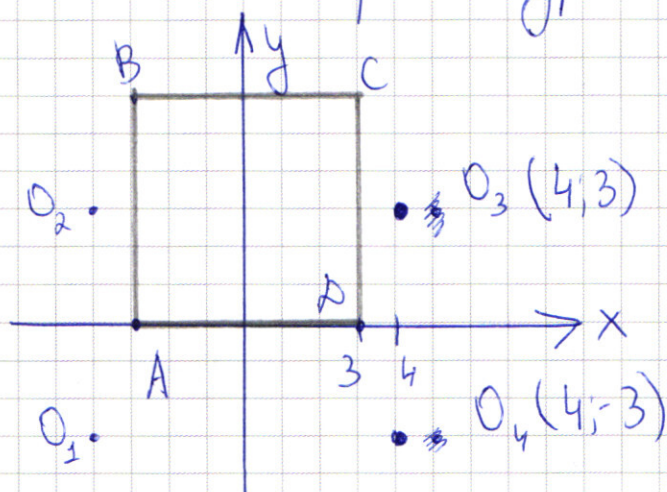
$$\text{II} \quad 3-x \leq y \leq 3+x$$

$$x=3, y \in [0; 6]$$

$$\text{III} \quad y \geq 3+x$$

$$y=6, x \in [0; 3]$$

4) Образовался квадрат с вершинами $A(-3; 0), B(-3; 6), C(3; 6), D(3; 0)$, все этот квадрат удовлетворяет все точки первого уравнения.



$$AB - x = -3, y \in [0; 6]$$

$$BC - y = 6, x \in [-3; 3]$$

$$CD - x = 3, y \in [0; 6]$$

$$AD - y = 0, x \in [-3; 3]$$

5) Окружности W_2 и W_3 расположены симметрично относительно квадрата. При $x = -3$ и $x = 3$

$$(3-4)^2 + (y-3)^2 = a \Rightarrow y^2 - 3y + (10-a) = 0$$

$$D=0 \Rightarrow (y-3)^2 = 0, \text{ при } a=1, R=1 \Rightarrow \text{при } a=1$$

верхние окружности касаются по одному разу; $\Rightarrow a=1$ - подходит.

$$6) O_2C = O_2D = O_3B = O_3A = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}; \Rightarrow \text{при}$$

$R \in (1; \sqrt{58}]$ верхние окружности пересекают квадрат по два раза. Две верхние окружн. создают 4 точки, кроме случая, когда они проходят через две точки $M(0; 6)$ и $N(0; 0)$ при $R = \sqrt{9+16} = 5$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $R > \sqrt{58}$ верхние окружности не пересекают ABCD.

7) Теперь рассмотрим нижние окружности. $O_1A = O_4D = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $\Rightarrow$ при $R = \sqrt{10}$ нижние окружности пересекают по одному разу. $O_1B = O_4C = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$, $O_1C = O_4B = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$; $O_1C > O_1B$; $\Rightarrow$ при $R = \sqrt{130}$ такие окружности нижние пересекают по одному разу. $\Rightarrow$ при $R \in (\sqrt{10}, \sqrt{130})$ нижние окружности пересекают квадрат по два раза, создавая 4 точки, кроме случая $R = 5$, когда создается три точки, при $R > \sqrt{130}$ нет точек пересечения.

8) Итого для верхних $R = 1$ - 2 точки; $R \in (1, 5)$ - 4 точки, $R = 5$ - 2 точки, $R \in (5, \sqrt{58}]$ - 4 точки, $R \in (\sqrt{58}, 1) \cup (\sqrt{58}, +\infty)$ - нет точек.

Для нижних $R = \sqrt{10}$ - 2 точки; $R \in (\sqrt{10}, 5)$ - 4 точки, $R = 5$ - 3 точки, $R \in (5, \sqrt{130})$ - 4 точки; $R \in (0, \sqrt{10}) \cup (\sqrt{130}, +\infty)$ - нет; $R = \sqrt{130}$ - 2 точки.

9) $\Rightarrow$ Проверив результаты найдем только $R = 1$ и $R = \sqrt{130}$; $\Rightarrow a = 1$, $a = 130$

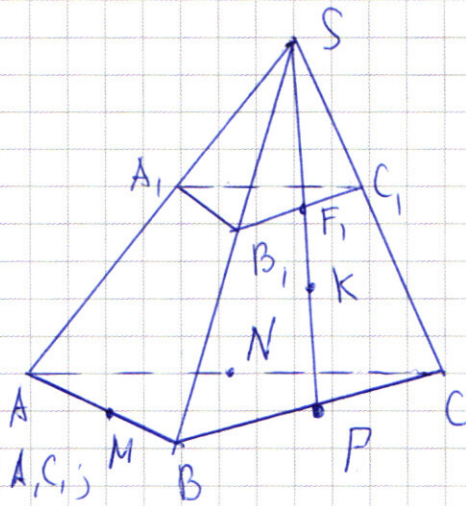
Ответ: $a = 1$, $a = 130$

Задача №4.

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ - сечения касательного шара перпендикулярные OS

2) $\Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

3) $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$; $B_1C_1 \parallel BC$; $AC \parallel A_1C_1$;
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$; $\Rightarrow k=2$ -ного Due.



4) Пусть $SK \cap B_1C_1 = F_1$; $SK \cap BC = F$; $Q, Q_1 \in SO$

5) Пусть $SQ = a$; $\Rightarrow SQ_1 = Q_1Q = \frac{1}{2}a$

$$\Rightarrow R = OK = OQ = \frac{1}{4}a.$$

$$\Rightarrow SO = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a.$$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{3}; \Rightarrow \angle KSO =$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

6) $SK = SL = SM$, т.к. они касаются. $SK = SL = SM =$

$$= SO \cdot \cos \angle KSO = \frac{3}{4}a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{\sqrt{2}}; SF = \frac{SQ}{\cos \angle KSO} =$$

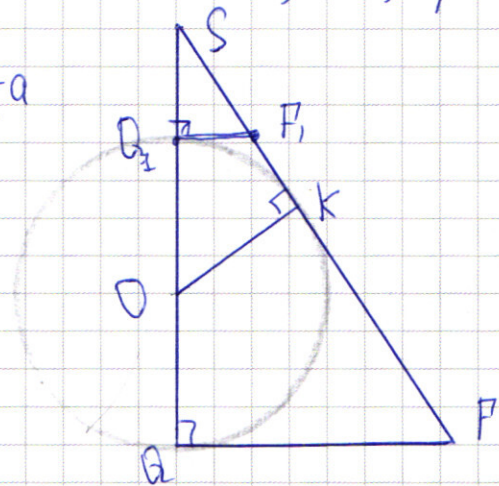
$$= a \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2}; \Rightarrow \frac{SK}{SF} = \frac{2}{3}$$

7) $X \in AB$; $N \in AC$; $\dots \in SL$; $N \in SM$; $\Rightarrow SF = SX = SN =$

$$\Rightarrow \frac{SK}{SF} = \frac{SL}{SX} = \frac{SM}{SN} = \frac{2}{3}; \Rightarrow \frac{S_{\text{сез}}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\text{сез}} = \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{сез}} = \frac{16}{9}; \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0, y \neq 0.$$

1) Рассмотрим второе уравнение.

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$x^2 - 2x(y+2) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2; \sqrt{D} = |2y-2|$$

$$x = y+2 \pm |2y-2|; \text{ при } y < 1; x_1 = 3y \quad x_2 = y-4$$

$$\Rightarrow \text{ при } y \geq 1, x_1 = 3y, x_2 = y-4; \Rightarrow x_1 = 3y; x_2 = y-4.$$

$$2) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \Rightarrow \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy} \Rightarrow y^{5 \lg x - 2 \lg xy} =$$

$$= x^{\lg x} \Rightarrow y^{\lg\left(\frac{x^5}{xy^2}\right)} = x^{\lg x} \Rightarrow y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = x^{\lg x}.$$

$$\text{ при } x = 3y; y^{\lg\left(\frac{27y^3}{y^2}\right)} = (3y)^{\lg(3y)}$$

$$\Rightarrow y^{\lg(27y)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{\lg(3y)}$$

$$y^{3 \lg 3} \cdot y^{\lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg y}$$

~~Задача №3.~~ $y \neq 0$

$$\Rightarrow y^{\log 27} = 3^{\log 3} \cdot 3^{\log y} \cdot y^{\log 3}$$

$$y^{3 \log 3} = 3^{\log 3} \cdot y^{\log 3} \cdot y^{\log 3}$$

$$\Rightarrow y^{\log 3} = 3^{\log 3}, \Rightarrow y=3, x=9.$$

$$3) \quad x^{\log x} = y^{\log \left(\frac{x^3}{y^2} \right)} \Rightarrow x = y^{\left(\frac{\log \left(\frac{x^3}{y^2} \right)}{\log(x)} \right)} = y^{\log_x \left(\frac{x^3}{y^2} \right)}$$

$$= y^{\log_x x^3 - \log_x y^2} = y^{3 - 2 \log_x y}$$

$$\Rightarrow x y^{2 \log_x y} = y^3; \quad x = y^{3 - 2 \log_x y}$$

$$\Rightarrow \text{при } y=4-x$$

$$x = (4-x)^{3 - 2 \log_x (4-x)}$$

из второго уравнения. $x = (2y-2) \pm |2y-2|$

при $y=3$; $x_2 = -1$ не может быть

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (9, 3)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 1) $3375 = 5 \cdot (600 + 60 + 15) = 5 \cdot 5(120 + 12 + 3) = \frac{125}{27}$
 $= 5^3 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$

Обязательно должны быть три цифры 5;
 есть две возможные комбинации чисел, которые дают
 2 произведений $3375 = 55 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3$
 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2. Количество вариантов размещения 5 - $C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 56$

для трех. $C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$\Rightarrow C_3^8 \cdot C_3^5 = 560$

1. $C_3^8 \cdot C_1^5 \cdot C_1^4 = 56 \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!} = 56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$

$\Rightarrow \text{Итого} = 560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

2112
 2211
 1122
 1221
 2121
 1212

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

$-2 \cos 7x \cos 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$

$\cos 7x (\cos 4x + \sin 4x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \cos^2 7x - 1)$

$\sqrt{2} \cos 7x (\cos 4x + \sin 4x) = 1 - 2 \cos^2 7x$

$2 \cos 7x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x \right) = 1 - 2 \cos^2 7x$

$$2\cos 7x \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\cos^2 7x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x\right) = \cos 4x.$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x.$$

$$-2\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 4x = \cos 4x. \quad (2)$$

$$-2\sin 7x \sin 4x - 2\cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$= 2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x. ;$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x\right) = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2}; \quad -1 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1.$$

$$-2\sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x ;$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2}; \quad \cos(3x + 7x)$$

$$\Rightarrow \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 7x \sin \frac{\pi}{4} = \cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x.$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\sin 7x + \cos 2x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 7x = \cos 7x$$

$$\cos 7x - \sin 7x = 0.$$

$$1 - 2\cos 7x \sin 7x = 0.$$

$$1 = \sin 14x.$$

$$14x = \frac{\pi}{2} +$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x.$$

$$-\sin 4x - \sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x\right)$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x = \cos 7x \sin \frac{\pi}{4} - \sin 4x = 0.$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \sin 4x = 0.$$

$$2\cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) при $x \geq 0$.

1. при $y < 3-x$.

$$x + 3 - y + 3 - x - y = 6$$

$$6 - 2y = 6; y = 0; x \in [0; 3]$$

2. при $3-x \leq y < 3+x$.

$$3 + x - y + y - 3 + x = 6$$

$$2x = 6; x = 3; y \in [0; 6]$$

3. при $y \geq 3+x$.

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$y = 6; x \in [0; 3]$$

4) Образовав кладрат:

$$x = -3; y \in [0; 6]$$

$$y = 6; x \in [-3; 3]$$

$$x = 3; y \in [0; 6]$$

$$y = 0; x \in [-3; 3]$$

5) Верхние две симметричные окружности.

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 - 6y + (10-a) = 0$$

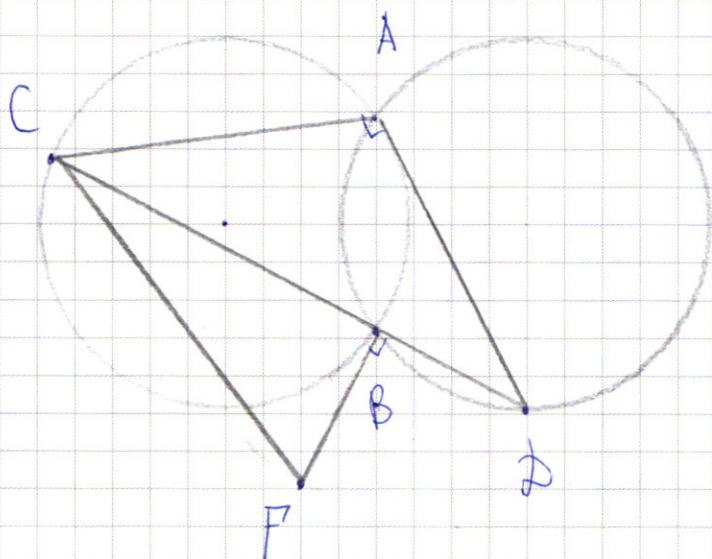
$$D = 9 - 10 + a = a - 1$$

при $a = 1; R = 1$, где верхние окружности касаются сторон квадрата, $\Rightarrow a = 1$ проходит.

обе окружности при $a > 1$ пересекаются по 2 раза, до.
 $R = \sqrt{10}$, при $R > \sqrt{10}$ обе окружности пересекаются по 4 раза и верхняя и нижняя окружности + внутр. окружности по 2 раза.

при $R = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$; верхняя окруж. верх.
 окруж. проходит через обе вершины; при $R > \sqrt{58}$, - они
 не пересекаются; при $R = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$,
 нижняя окруж. пересекает нижнюю вершину, пересекает
 также по одной; $\text{Ответ: } a = 1; a = 130.$

6



итг 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right. ; \text{ also } \lg xy = \lg x + \lg y.$

1) $\frac{y^{\frac{5\lg x}{\lg x}}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \Rightarrow \frac{y^{3\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg y}.$

$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$

$y^{\lg x - 2\lg xy} = x^{\lg x} ; y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = x^{\lg x} \quad x \neq 0.$

$y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = x^{\lg x} ; y^{\lg\left(\frac{x^5}{x^2 y^2}\right)} = x^{\lg x}$

2) $x^2 - 2x(y+2) - (3y^2 - 12y) = 0.$

$D = (y+2)^2 + (3y^2 - 12y) = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y =$

$= 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2, \sqrt{D} = |2y-2|.$

$x_{1,2} = y+2 \pm |2y-2|$

npu $y < 1$

$x_{1,2} = y+2 \pm (2-2y)$

$x_{3,4} = y+2 \pm (2y-2)$

$x_1 = 4, x_2 = 2y$

$x_1 = 3y, x_2 = 4-y.$

$x_3 = 4-y, x_4 = 3y$

$y^{\lg\left(\frac{27y^3}{y^{2y}}\right)} = (3y)^{\lg(3y)}$

$y^{\lg(27y)} = 3y^{\lg 27 + \lg y} = y^{\lg 27}.$

$$y^{\log\left(\frac{27y^3}{y^2}\right)} = (3y)^{\log(3y)}$$

$$x \neq 0, y \neq 0;$$

$$y^{\log(27y)} = y^{\log 27} \cdot y^{\log y}$$

$$(3y)^{\log(3y)} = 3^{\log 3 + \log y} \cdot y^{\log 3 + \log y} = 3^{\log 3} \cdot 3^{\log y} \cdot y^{\log 3} \cdot y^{\log y}$$

$$\Rightarrow y^{\log 27} \cdot y^{\log y} = 3^{\log 3} \cdot 3^{\log y} \cdot y^{\log 3} \cdot y^{\log y}$$

$$y^{3\log 3} = 3^{\log 3} \cdot y^{2\log 3}$$

$$\Rightarrow y^{\log 3} = 3^{\log 3}, \Rightarrow y = 3, \Rightarrow x = 9.$$

$$2) x_2 = 4 - y.$$

$$y^{\log\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = x^{\log x}.$$

$$x \in (0, 4)$$

$$y \in (0, 4).$$

$$y^{3\log x - 2\log y} = x^{\log x}$$

$$y^{3\log(4-y)} = (4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2\log y}.$$

$$x = \left(\frac{y^{\log\left(\frac{x^3}{y^2}\right)}}{y^{\log x}} \right) = y^{\log_x\left(\frac{x^3}{y^2}\right)} = y^{\log_x x^3 - \log_x y^2} = y^{3-2\log_x y}.$$

$$x y^{2\log_x y} = y^3.$$

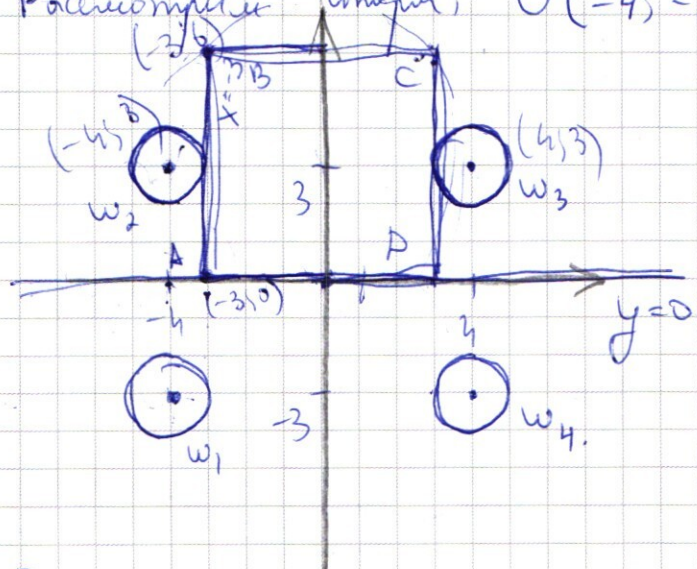
$$x = y^{3-2\log_x y}.$$

$$x = (4-x)^{3-2\log_x(4-x)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

1) Рассмотрим интервалы; $O(\pm 4, \pm 3)$; $R = \sqrt{a}$.



2) Первое; $y_1 = 3-x$; $y_2 = 3+x$
при $x \leq 0$.



при $y < 3+x$.

$$x+3-y+3-x-y=6.$$

$$6-2y=6; \Rightarrow y=0; \quad 0 < 3+x; \quad x > -3; \quad x \in (-3; 0)$$

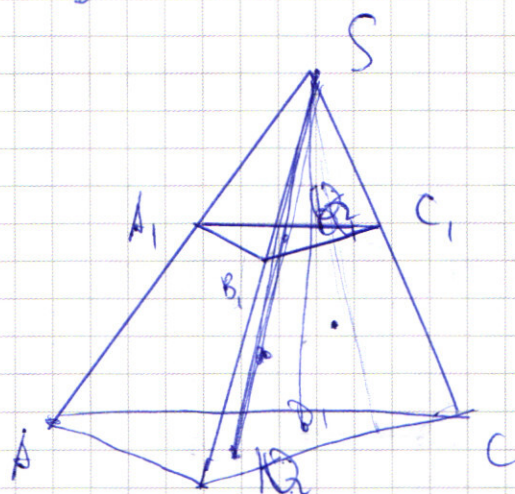
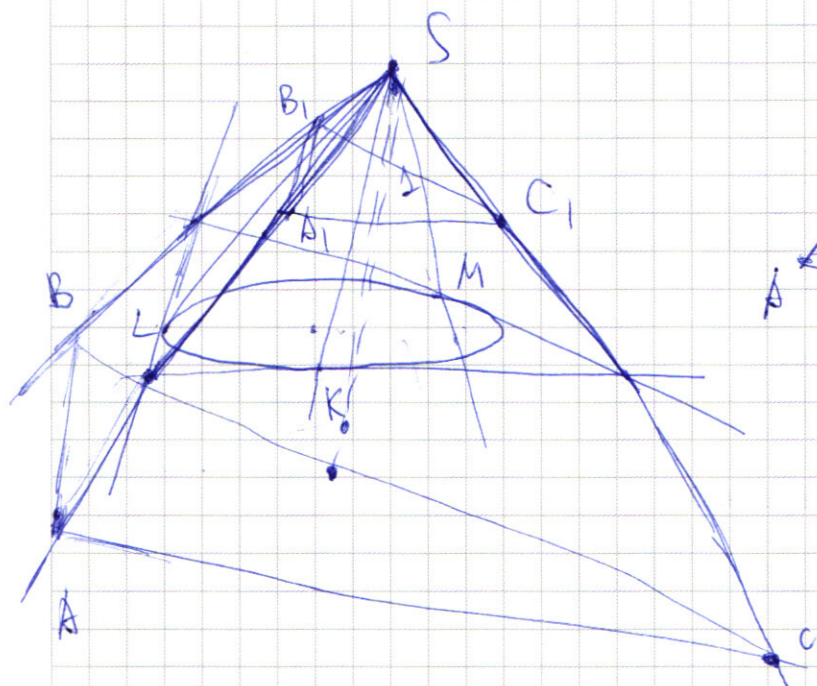
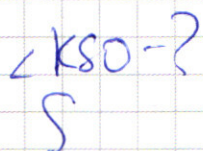
при $3+x \leq y < 3-x$.

$$y-3-x+3-x-y=6.$$

$$-2x=6; \quad x=-3; \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y < 6.$$

при $y \geq 3-x$; $2y-6=6; \quad y=6; \Rightarrow 6 \geq 3-x$
 $\Rightarrow x \geq -3$

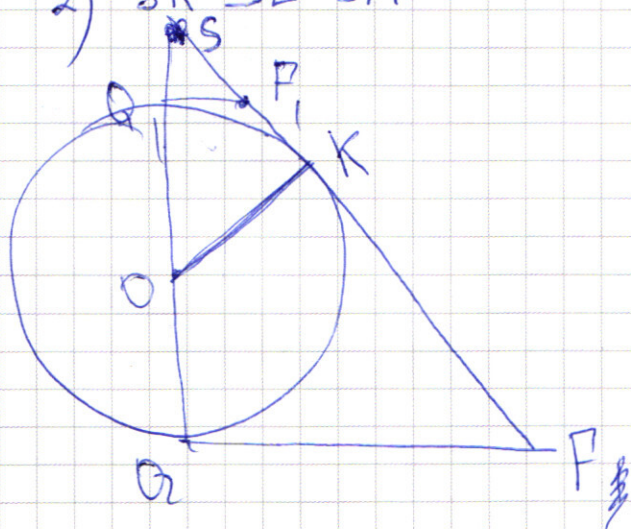
при $x \in [-3; 0)$ при 1


$$\Rightarrow K_1 K_2 = \frac{3}{4} SK$$

$$OK = \frac{3}{8} SK$$

$$\Rightarrow OS = SK \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{8} SK.$$

2) $SK = SL = SM$.



$$SO_2 = a;$$

$$SQ_1 = \frac{1}{4}a; \quad Q_1Q_2 = \frac{3}{4}a$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{8}a = 0 \text{ k}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{1}{4}a + \frac{3}{8}a = \frac{5}{8}a$$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{3}{8}a \cdot \frac{2}{5}a = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \angle KSO = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \angle KSO = \frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow SF = \frac{a}{\cos \phi} = \frac{5a}{4}; SK =$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

