

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Можно сделать вывод, что наши числа состоят из трёх пятёрок, трёх троек и 2-ух ед-ц (можно использовать только "1", т.к. только они не влияют на произ-е) или из 3-ёх пятёрок, 1-й девятки, 1-й ед-тройки и трёх ед-ц.

$$5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1 \quad - \quad 1 \text{ вид}$$

$$5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1 \quad - \quad 2 \text{ вид}$$

$$1: \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 = 560$$

$$2: \quad \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$$

$$\Rightarrow \text{Всего: } 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680

$$\sqrt{3} \begin{cases} y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg(xy)} * \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\text{О.Д.З.} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$*: y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$(3 \lg x - 2 \lg y) \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\text{Д} = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$1. \lg x = \lg y \quad 2. \lg x = 2 \lg y$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x^2 - 4x - 3y^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x(-4x + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{п.к. кол-во} \\ \text{О.Д.З} \end{matrix}$$

$$x = y = 2$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \begin{cases} y = 0 \\ y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{п.к. кол-во} \\ \text{О.Д.З} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \begin{cases} y = 3 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

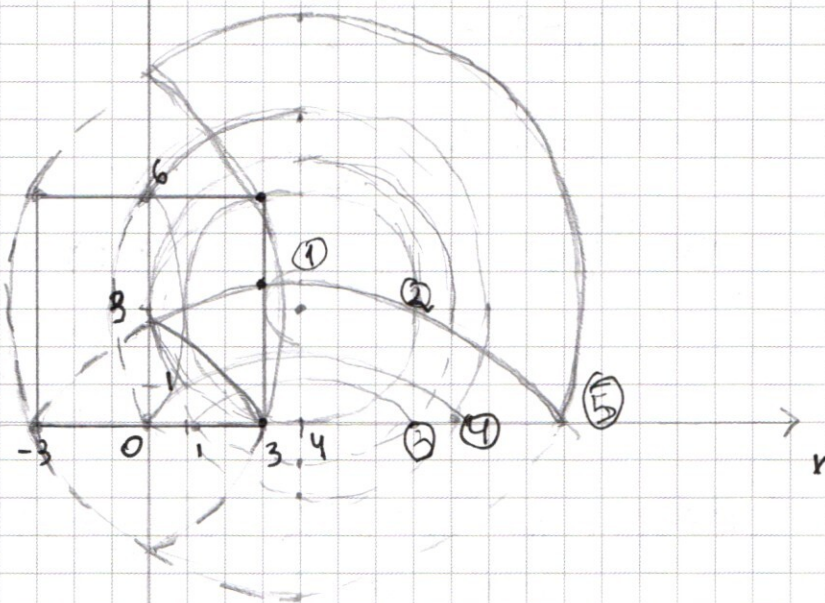
$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ x=y^2 \\ y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ - п.к.}$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2)$, $(9; 3)$ и $\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$



N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos(11x + \pi/4) - \sqrt{2} \cos(3x + \pi/4) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos(11x + \pi/4) - \cos(3x + \pi/4) = \cancel{\sqrt{2}} \cos 14x$$

$$-2 \sin(7x + \pi/4) \cdot \sin(4x) = \cos 14x$$

$$-\sqrt{2}(\sin 7x + \cos 7x) \cdot \sin 4x = (\cos 7x - \sin 7x) \cdot (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0^*$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \sin(\pi/4 - 7x)$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \pi/4)$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \pi/4 + 2\pi \cdot k \\ 4x = \pi - 7x + \pi/4 + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \pi/4 + 2\pi \cdot k \\ 4x = \pi - 7x + \pi/4 + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \pi/4 + 2\pi \cdot k \\ 11x = 5\pi/4 + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \pi/4 + 2\pi \cdot k \\ 11x = 5\pi/4 + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi/12 + 2\pi k/3 \\ x = 5\pi/44 + 2\pi k/11 \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

*

$$\cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\tan 7x = -1$$

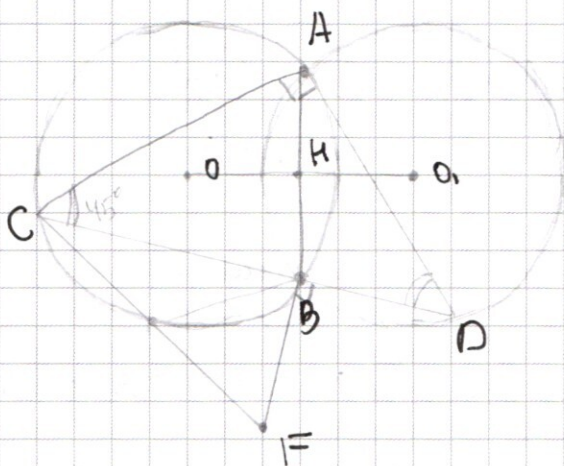
$$7x = -\pi/4 + \pi \cdot n$$

$$x = -\pi/28 + \pi \cdot n/7, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi/12 + 2\pi k/3$; $5\pi/44 + 2\pi \cdot k/11$; $-\pi/28 + \pi n/7$
 $k, n \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$$\begin{aligned} 1) \angle ACB &= \angle ADB \text{ (ок. } O) \\ \angle ADB &= \angle ADB \text{ (ок. } O_1) \\ R_0 &= R_0, \Rightarrow \\ \angle ABO &= \angle ABO, \Rightarrow \\ \angle ACD &= \angle ADC = 90^\circ = 45^\circ \\ \Rightarrow AC &= AD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \triangle OAB \quad AH \perp AB \\ OA &= AB \Rightarrow HK = HB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \triangle HO, B \quad O, H \perp AB \\ OA &= OB \Rightarrow AK = HB \end{aligned}$$

O, H, и OK падают в
1-ую точку $\Rightarrow OO, \perp AB \quad AH = BH$

4) аналогично перпенд. из B и A падают
в 1 точку $= OH = HO,$

$$\begin{aligned} 5) \triangle OAB \quad \angle H \quad \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \\ \Rightarrow OBA - KB - T \end{aligned}$$

$$6) AB = 5\sqrt{2} \Rightarrow OO_1 = 5\sqrt{2}$$

$$7) \triangle CAB \text{ по Т. Син - OB}$$

$$\frac{AB}{\sin C} =$$

1: $R = 1$ 1 реш-е (1-2): $R = 3$ 2 реш-я
 $a = 1$ $a = 9$

3: $3 < R \leq 4$ 3 реш-я 4: $4 < R \leq 5$ 3
 $9 < a \leq 16$ $16 < a \leq 25$ реш-я

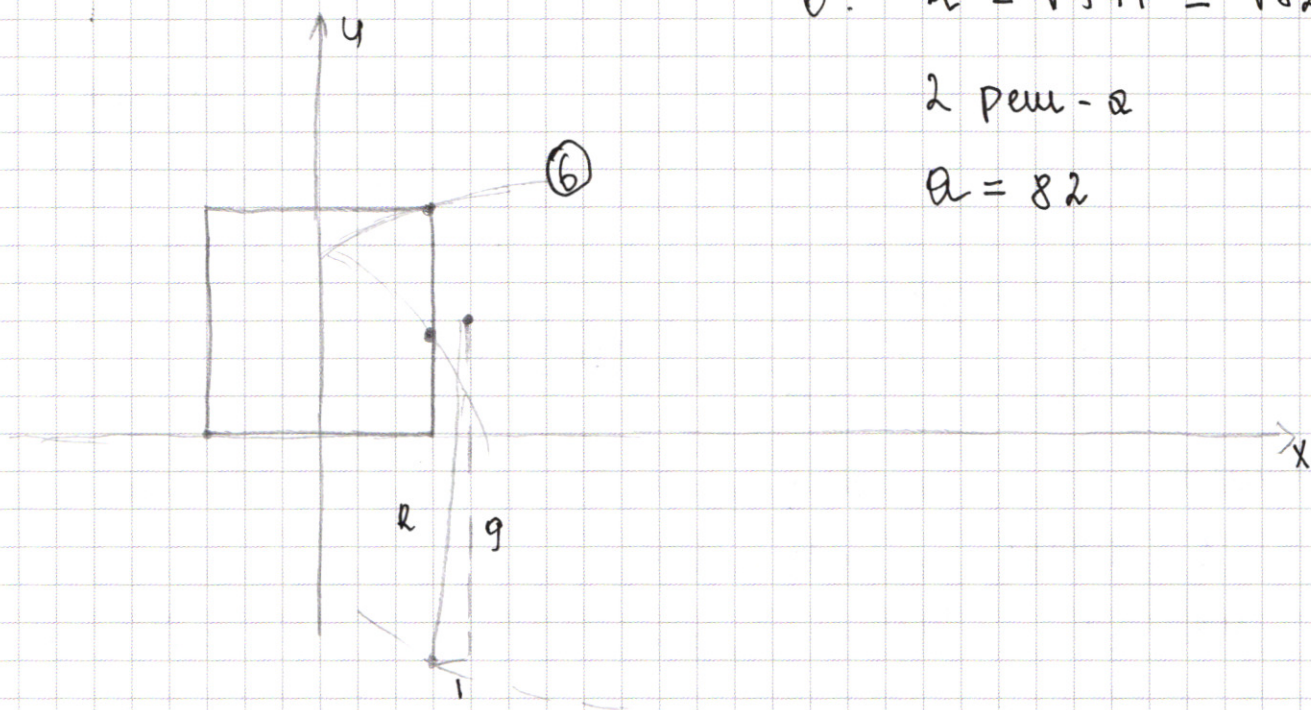
5: $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{58} < 8$
 $a = 58$

3 реш-я

5-6: $R > \sqrt{58}$
 $a > 58$

2 реш-я

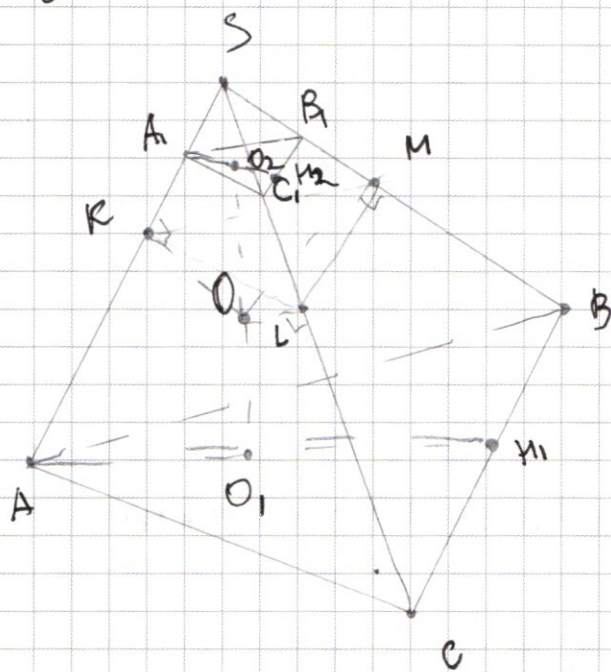
6: $R = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{82}$
 2 реш-я
 $a = 82$



Ответ: $a \in (1; 9] \cup (58; 82]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5



1) Сфера кас-ся $KS, SL, SM \Rightarrow KS = SL = SM$
(отр-ки кас-х)

2) $\triangle A_1B_1C_1$ кас-ся сферы в $O_2 \Rightarrow OO_2 \perp A_1B_1C_1$

3) ABC кас-ся сферы в $O_1 \Rightarrow OO_1 \perp ABC$
2, 3 $\Rightarrow ABC \parallel A_1B_1C_1$

4) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по м.р. $ASC \sim A_1SC_1, SC_1B_1 \sim SCB$; $SA_1B_1 \sim SAB$) $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{h_{ABC}}{h_{A_1B_1C_1}}\right)^2 = \frac{1}{4}$
 $\frac{h_{ABC}}{h_{A_1B_1C_1}} = \frac{2}{1}$ $\frac{SA_1}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SA_1}{SH} = \frac{1}{2}$
 $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{2}{1}$

5) $\triangle AM_1S \sim \triangle AM_2S \Rightarrow \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{2}{1}$

6) Пусть $SO_2 = x$ 5) $\triangle SA_1O_2 \sim \triangle SAO_1 \Rightarrow \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{1}{2}$

$SO_1 = 2R + x$ (R - радиус сферы)

4 $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{2}{1} \quad \frac{2R+x}{x} = \frac{2}{1}$

$$2R + x = 2x$$

$$2R = x$$

$$R = x/2$$

7) $SO = R + x \Rightarrow = 3x/2$

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{3x/2}{2x} = \frac{3}{4}$$

8) аналогично для $\triangle KML$ и ABC пункты

$R(4-5)$

$\triangle KML \sim \triangle ABC$

$$\frac{S_{KML}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{KML} = \frac{9}{16} \cdot 4 = \frac{9}{4}$$

Ответ: $S_{KML} = \frac{9}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

~~$$\sqrt{2} \cos 11x$$~~

~~$$\sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4})$$~~
~~$$2 \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$~~

~~$$\sqrt{2} (\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x + \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \cos 14x$$~~

~~$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$~~

~~$$\frac{\pi}{4} \sin(11x)$$~~

~~$$2 \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos(14x) \neq \cos(11x + \frac{\pi}{4})$$~~

~~$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin(3x)$$~~
~~$$2 \sin(3x)$$~~

~~$$\sin(3x + \frac{\pi}{4}) =$$~~

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(4x) = \cos 14x$$

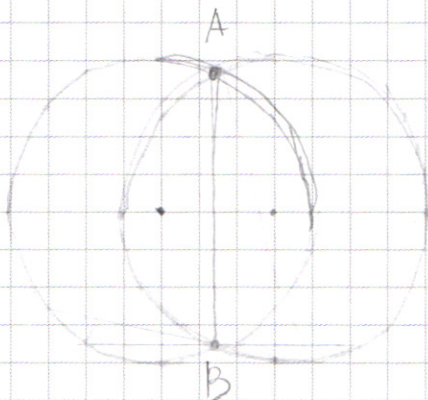
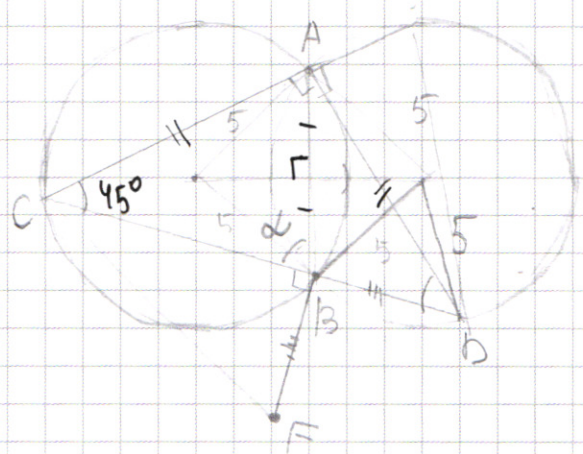
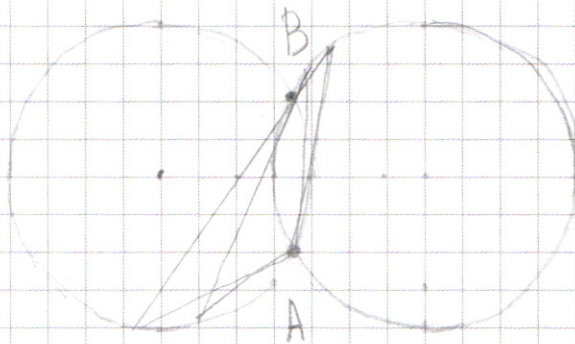
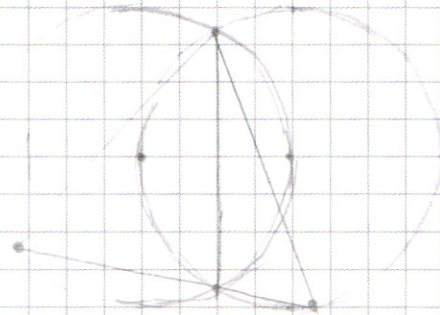
$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot \cos 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\boxed{\cos 7x - \sin 7x = 0}$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \cos 7x + \sin 7x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x = \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$



$$AB = 512$$

$$AC = AD$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 10$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin c} = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} &= y^{2 \lg(xy)} \\ y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} &= y^{2 \lg x + 2 \lg y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y^{5 \lg x} \cdot \frac{1}{10} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = 10$$

$$x^2 - 4x + 4 - 3(y^2 + 4y + 4) =$$

$$4 - 12 - 2xy$$

$$(x-2)^2 - 3(y+2)^2 = 16 + 2xy$$

$$3 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = 1$$

$$\lg y (3 \lg x - 2 \lg y) = 1$$

$$3 \lg x = \frac{1}{\lg y} - 2 \lg y = \frac{1 - 2 \lg^2 y}{\lg y}$$

$$\lg x = \frac{1 - 2 \lg^2 y}{3 \lg y}$$

$$x = \frac{10^{\frac{1}{3 \lg y}}}{10^{\frac{2 \lg^2 y}{3 \lg y}}} = \frac{10^{\frac{1}{3 \lg y}}}{y^{\frac{2 \lg y}{3}}}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{(y^{\lg y})^2} = 10$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg^2 y} = 10$$

$$y^{5\lg x} \cdot x^{-\lg y} = y^{2\lg x + 2\lg y}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$(3\lg x - 2\lg y) \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3\lg x \cdot \lg y + 2\lg^2 y = 0$$

$$D = 9\lg^2 y - 8\lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg x = \frac{3\lg y - \lg y}{2} = \lg y$$

$$\lg x = \frac{3\lg y + \lg y}{2} = 2\lg y$$

$$1. \lg x = \lg y$$

$$x = y$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x + 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0 \quad - \text{n.k.}$$

$$\boxed{x = 2 = y}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -4 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$2. \lg x = \lg y^2$$

$$x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$8 - 18 - 21 + 12 =$$

$$-9 - 9 = 0$$

$$\boxed{y = 3 \quad x = 9}$$

$$(y-3)(y^2+y-4) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\boxed{y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3^3 \end{array}$$

$$5^3 \cdot 3^3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Числа вида: 3 пятёрки, 3 тройки, 2
вз-ух; 3 пятёрки 1 девятка, 1
тройка

$$\begin{array}{c} 3! \qquad 3! \qquad 2 \\ \overbrace{5_1^* 5_2^* 5_3} \quad \overbrace{3_1 3_2 3_3} \quad \overbrace{1_1 1_2} \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ \hline 3! \cdot 3! \cdot 2! \end{array} = \begin{array}{c} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$$

$$\begin{array}{c} 3! \\ \overbrace{5_1 5_2 5_3} \quad \overbrace{3_1 3_2} \quad \overbrace{1_1 1_2 1_3} \\ 8! \\ \hline 3! \cdot 3! \end{array} = \begin{array}{c} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$$

$$560 + 1120 = 1680$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$\sqrt{2}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \cdot \sin^{\overbrace{7x}} \cdot \sin^{\overbrace{4x}} - (2 \cdot \sin 4x \cdot \overset{\cos}{\sin 7x}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-4 \sin 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-4 \sin 7x = \frac{\sqrt{2} \cos 14x}{1 - 2 \sin^2 7x}$$

$$\sqrt{2}(2 \cos^2 7x - 1) + 4 \sin 7x \cdot \sin 4x = 0$$

$$\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 7x + 4 \sin 7x \cdot \sin 4x = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin^2 7x + 1 = 0$$

$$\frac{\sin(2+\beta)}{\sin(2-\beta)} =$$

$$\cos(2+\beta) = \cos \cdot \cos - \sin \cdot \sin$$

$$\cos(2-\beta) = \cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin$$

$$\cos(2-\beta) - \cos(2+\beta) = 2 \sin \cdot \sin$$

$$2\sqrt{2}(\cos 3x - \cos 11x) - 1 + 2 \cos^2 7x = 0$$

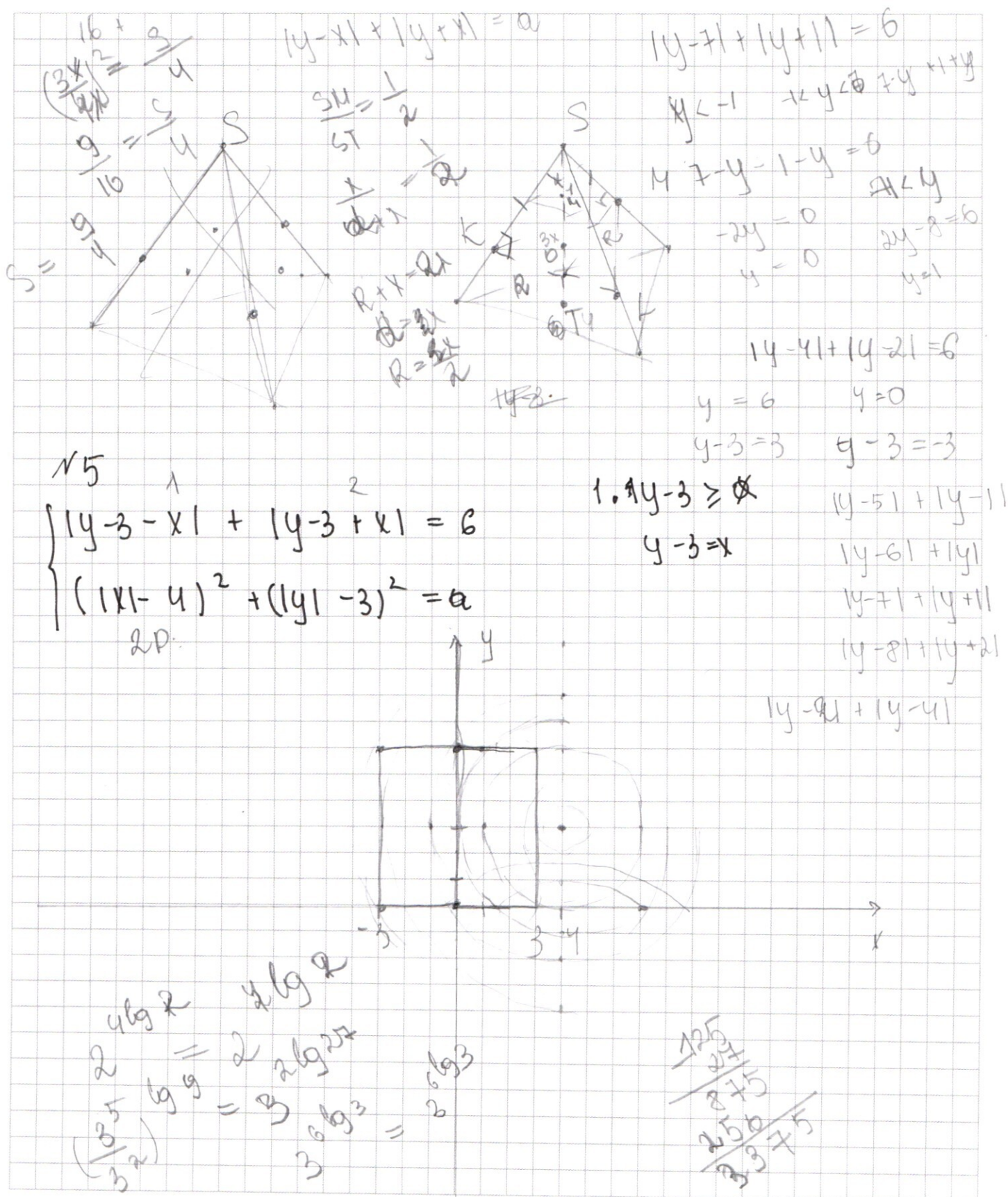
$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

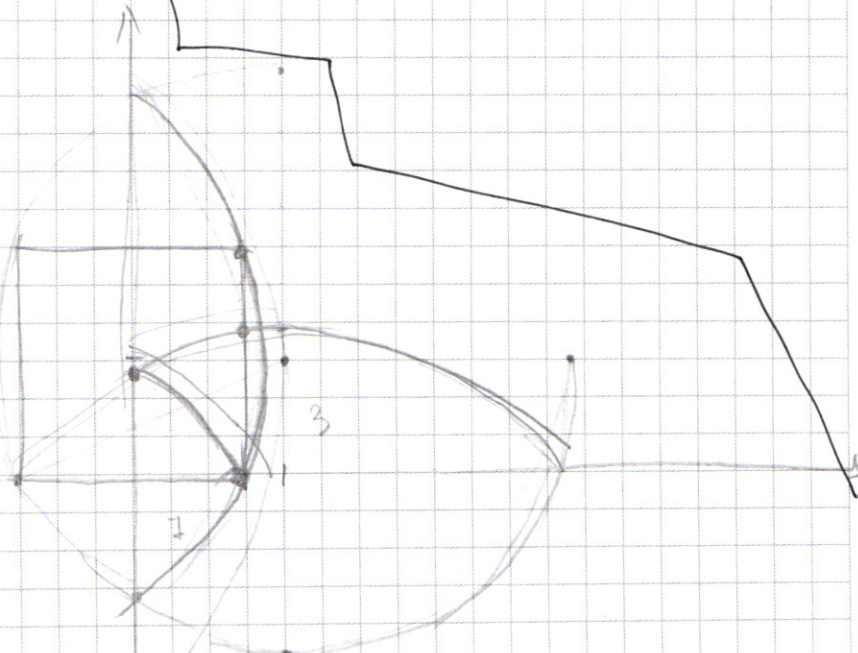
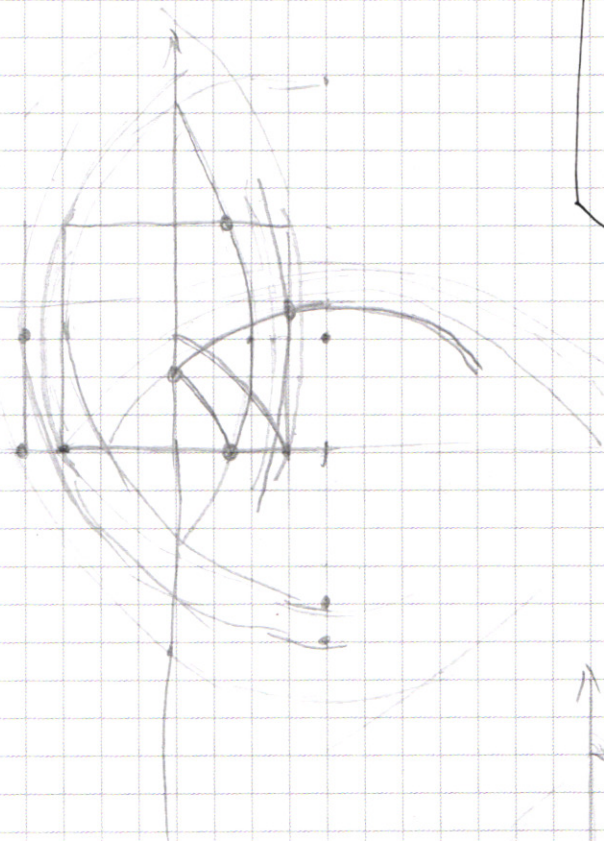
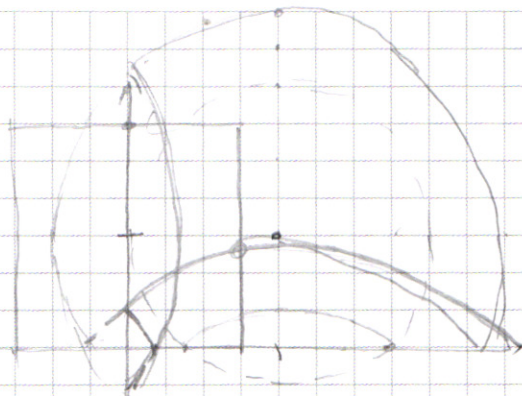
$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{2} \sin(7x + \pi/4) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(7x + \pi/4) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



6)



$$\sqrt{4g+9}$$

$$\left(\frac{F(n+1)}{2} \right) \log$$

$$\left(\frac{F(n+1)}{2} \right) \log$$

$$\left(\frac{F(n+1)}{2} \right) \log$$

$$\log$$