МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos(2\cdot 7x)$; =(1)

$\cos 11x - \cos 3x = -2\cdot\sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) = -2\cdot\sin 7x\sin 4x$ (по формуле $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$);

$\sin 11x - \sin 3x = 2\cdot\cos\left(\frac{11x+3x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) = 2\cos 7x\cdot\sin 4x$

Тогда (1) = $2\cos 7x\cdot\sin 4x - 2\cdot\sin 7x\sin 4x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 4x(\cos 7x - \sin 7x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos 7x - \sin 7x)\left(\sin 4x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x + \sin 7x)\right) = 0$

$\cos 7x = \sin 7x \;|: \cos 7x \neq 0$ или

(если $\cos 7x = 0$, то $\sin 7x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 7x \neq 0$),

$1 = tg(7x) \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{4} + \pi n$;

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}}$, $n \in Z$.

$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x + \sin 7x)$

$\sin 4x = \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\frac{\pi}{4}\cos 7x + \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\frac{\pi}{4}\sin 7x$

$\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$.

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\right)$.

Если синусы углов равны, то или значения углов равны, или $\alpha = \pi - \beta$ (при $\sin\alpha = \sin\beta$), что можно увидеть из тригонометрич. окружности:

$\alpha = \beta$

или

$\Rightarrow \alpha = \pi - \beta$

1) $4x = \frac{\pi}{4} + 7x \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}$ (но повторяется каждый круг)

$x_2 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n$; $n \in Z$.

2) $4x = \pi - \frac{\pi}{4} - 7x \Rightarrow 11x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{44}$, но $x_3 = \frac{3\pi}{44} + 2\pi n$, $n \in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{28}+\frac{\pi n}{7}$; $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n$; $x=\frac{3\pi}{44}+2\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{№5}$

$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$; стоит заметить, что нижний график образует 4 окружности с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами в: $(4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$. (при 4 случаях раскрытия $|x|$ и $|y|$ так и получается).

Рассмотрю верхнюю функцию в системе:

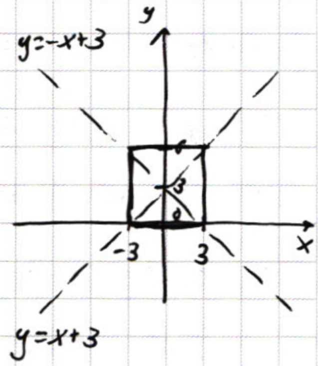
возможны 4 случая:

1) $y\geq 3+x$ и $y\geq -x+3 \Rightarrow y-3-x+y-3+x=6 \Rightarrow y=6$

2) $y\geq 3+x$ и $y\leq -x+3 \Rightarrow \cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6 \Rightarrow x=-3$

3) $y\leq 3+x$ и $y\geq -x+3 \Rightarrow -\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6 \Rightarrow x=3$

4) $y\leq 3+x$ и $y\leq -x+3 \Rightarrow -y+\cancel{3}+\cancel{x}-y+\cancel{3}-\cancel{x}=\cancel{6} \Rightarrow y=0.$

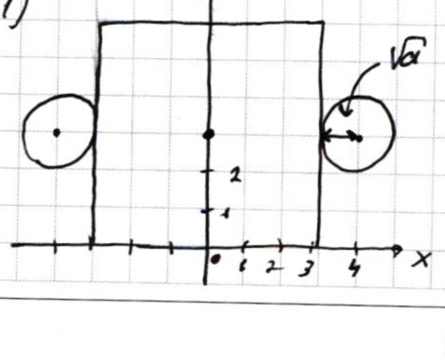


Тогда из построения видно, что верхняя $f(x)$ образует квадрат с центром в $(3;0)$ и стороной 6.

Теперь графически найду a, при которых будет два решения лишь в том случае, когда 2 из 4 окружностей будут касаться квадрата (невозможен случай, когда лишь 1 окружность имеет 2 точки пересечения, т.к. вторая окр., симметричная первой отн. Oy, будет иметь 2 точки пересеч. в симм отн O_y точках).

Возможны след. варианты:

1)



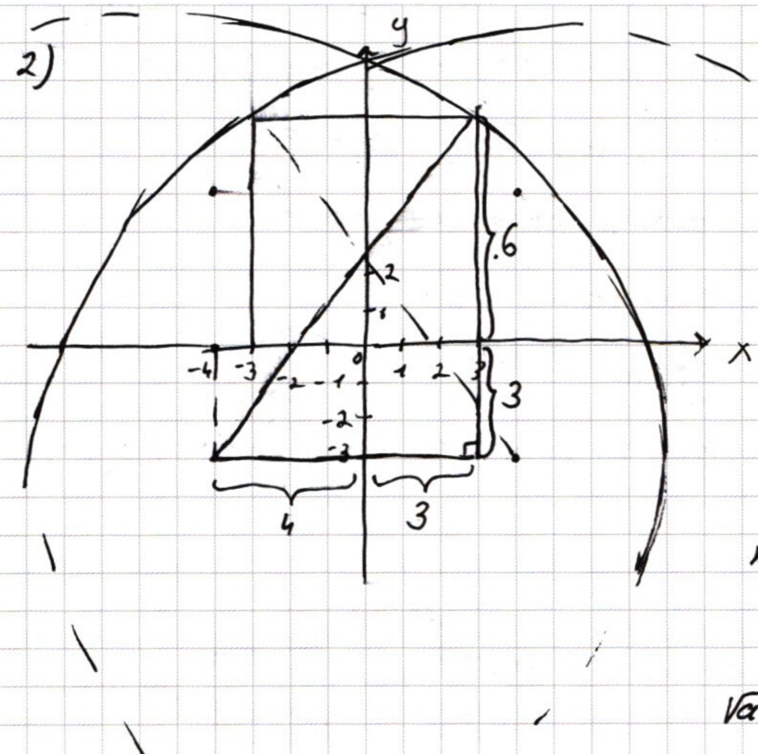
Верхние окружности касаются, две нижние — нет. Здесь легко найти $\sqrt{a}$ — расстояние от центра окр. до квадрата $\Rightarrow \sqrt{a}=4-3 \Rightarrow \boxed{a=1}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



В этом случае две верхние окр. лежат так, что квадрат находится внутри них, а нижние окружности касаются верхних углов квадрата.

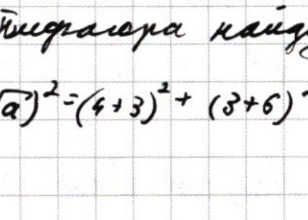
Здесь по т. Пифагора найду $\sqrt{a}$ (радиус): $(\sqrt{a})^2 = (4+3)^2 + (3+6)^2$

$(\sqrt{a})^2 = 49 + 81 = 130 \Rightarrow \boxed{a = 130}$

3) Две нижние касаются нижних углов, две верхние не должны пересекать.

Стоит заметить, что, т.к. окружности симметричны, их точки тоже симметричны. Координаты точек касания нижн. окружностями квадрата: $(-3;0)$ и $(3;0)$, тогда координаты верхних будут симметричны и равны $(3;0)$ и $(-3;0)$ $\Rightarrow$ как минимум верхние окр. будут проходить эти точки касания $\Rightarrow$ уже больше двух решений.

4) Две верхние касаются нижних углов;



Но в этом случае, в силу симметрии, нижние окружности будут пересекать квадрат $\Rightarrow$ не подходит.

<u>Ответ</u>: $a = 1$; $a = 130$.

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2(\lg x+\lg y)} & \text{— ①} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0. & \text{— ②} \end{cases}$$

Отмечу, что $x>0$ и $y>0$.

($y>0$, т.к. $xy>0$ и $x>0$).

Прологарифмирую по основанию 10 первое ур-ие:

но $y>0$ $\Rightarrow |y|=y$.

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2(\lg x+\lg y)} \Leftrightarrow \lg x(\lg y^5-\lg x) = 2(\lg x+\lg y)(\lg|y|)$

$5\cdot\lg x\cdot\lg y - \lg^2 x = 2\lg x\lg y + 2\lg^2 y$, перенесу все влево:

$3\cdot\lg x\cdot\lg y - \lg^2 x - 2\lg^2 y = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x\lg y + 2\lg^2 y = 0$

Решу квадратное ур-ие относит. $\lg x$:

$D = 9\cdot\lg^2 y - 8\lg^2 y = (\lg y)^2 \Rightarrow \log_{10} x = \frac{3\lg y \pm \lg y}{2} = \left[\begin{array}{l}\lg y\\ 2\lg y\end{array}\right.$

$\lg x = \lg y \Rightarrow x=y$; $\lg x = 2\lg y = \lg y^2 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$ (но $y>0$) $\Rightarrow y=\sqrt{x}$.

$\boxed{x=y \text{ или } y=\sqrt{x}}$

Подставлю $x=y$ во ②:

$x^2-2x^2-4x-3x^2+12x=0 \Leftrightarrow -4x^2+8x=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}}$ (п.к) или $\boxed{\begin{array}{l}x=2\\ y=2.\end{array}}$ - решение.

Подставлю $x=y^2$ во ②:

$y^4-2y^3-4y^2-3y^2+12y=0 \Leftrightarrow y(y^3-2y^2-7y+12)=0. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}y=0\\ x=0\end{array}}$ (п.к.) и

$y^3-2y^2-7y+12=0$, замечу, что $y=3$ — корень (угадал), тогда

разделю $y^3-2y^2-7y+12=0$ на $y-3$ и получу:

$y^2+y-4=0$; $D=1+16=(\sqrt{17})^2 \Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, но т.к. $y>0$, $y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$x=y^2=\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4}=\frac{17-2\sqrt{17}+1}{4}=\frac{18-2\sqrt{17}}{4}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$; $\sqrt{17}<\sqrt{25}=5 \Rightarrow x>\frac{9-5}{2}=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ - решение, $x=0$ и $y=0$ - нет, т.к. $x>0$ и $y>0$

__Ответ:__ $(2;2)$ и $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$3375 = 125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$; тогда восьмизначное может состоять из следующих наборов чисел:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$;

2) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$;

Рассмотрю различные комбинации для 1-ого набора;

Если бы все числа были разными, то всего комбинаций было бы $8!$; но числа 1 и 1 одинаковы $\Rightarrow$ в $8!$ половина комбинаций будет одинакова $\Rightarrow$ без $\frac{8!}{2}$;

3, 3 и 3 могут быть переставлены $3!$ различными способами, а 5, 5 и 5 — тоже $3!$, тогда, аналогично для ситуации с 1 и 1, получаю: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{2} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2}} = 56 \cdot 10 = 560$.

Теперь рассмотрю 2-ой случай:

аналогично 1-ому получаю, что комбин. 5 и 1 — $3!$ и $3!$ $\Rightarrow$

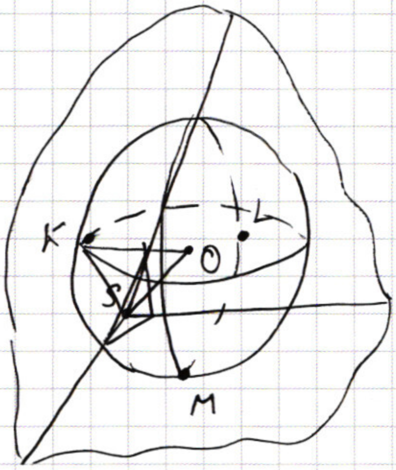
$\Rightarrow \frac{8!}{3! \cdot 3!}$ — кол-во комб. во 2-ом случае.

$\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 56 \cdot 20 = 560 \cdot 2$

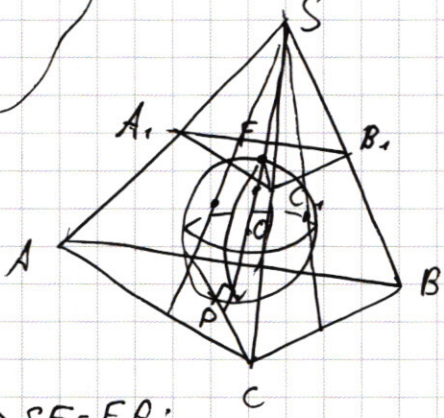
$\Rightarrow$ всего 8-ми значных чисел $560 \cdot 2 + 560 = 1680$

Ответ: 1680.

№4.



Стоит заметить, что эта сфера вписана в пирамиду с вершиной в S и площадью основания 4;



(т.к. $SO \perp (ABC)$ и $\perp (A_1B_1C_1)$ по условию).

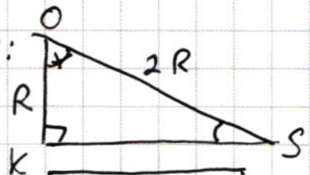
Очевидно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, тогда коэф. подобия $k = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$. Тогда $2SF = SP \Rightarrow$

$\Rightarrow 2SF = SF + FP \Rightarrow SF = FP$;

$FP = 2R$ (т.к. проходит через центр окружности);

тогда $SP = 2R + 2R = 4R \Rightarrow SO = SF + FO = 2R$

Перерисую $\triangle KSO$:



$OK \perp KS$, т.к. касательная.

$OK = R$; $SO = 2R$

$\sin\angle KSO = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\angle KSO = 30^\circ}$

<u>Ответ:</u> $\angle KSO = 30^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$3375 = 5\cdot 675 = 5\cdot5\cdot135 = 5\cdot5\cdot5\cdot27 = 5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

$\left.\begin{array}{l} 5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1 \\ 5\cdot5\cdot5\cdot9\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1 \end{array}\right\}$ 2 случая.

x x x y y y z z

1 1 3 3 3 5 5 5

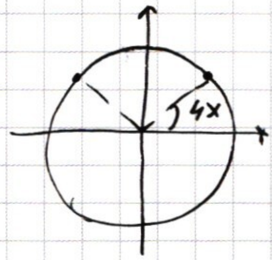
$5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1$ | $5\cdot5\cdot3\cdot5\ 3\ 3\ 1$

$5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot1\cdot3$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot 3\ 1\ 3\ 3$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot 1\ 3\ 3\ 3$

$\sin\frac{\pi}{4}$



№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 11x - \cos 3x) + (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x.$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$

$\cancel{\cos(x+y) - \cos(x-y) =}$ $\quad \cos(\overset{\alpha}{x-y}) - \cos(\overset{\beta}{x+y}) = 2\sin x\sin y$

$\alpha = x-y;\ \beta = x+y;\quad 2x = \alpha+\beta \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2};\quad \beta-\alpha = x+y-x+y = 2y \Rightarrow y = \frac{\beta-\alpha}{2}.$

$\cos\alpha - \cos\beta = -\cancel{2\frac{\alpha+\beta}{}}\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\sin\frac{11x+3x}{2}\sin\frac{11x-3x}{2}\cdot 2\cdot(-1) = \sin 7x\sin 4x\cdot(-2).$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y.\quad ;\ \sin(\overset{\alpha}{x+y}) - \sin(\overset{\beta}{x-y}) = 2\cos x\sin y.$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.\qquad \alpha = x+y;\ \beta = x-y \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin(11x) - \sin(3x) = 2\cdot\cos\left(\frac{11x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) = \quad \alpha-\beta = x+y-x+y \Rightarrow y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$

$= 2\cos 7x\sin 4x.$

$(2\cos 7x\sin 4x - 2\sin 7x\sin 4x) = \sqrt{2}\cos 14x \Leftrightarrow \sin 4x(\cos 7x - \sin 7x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 14x.$

$\cos 14x = \cos 2\cdot(7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x$

$3\lg x\lg y=\lg^2x+2\lg^2y.$

$\lg x\cdot(\lg y^5-\lg x)=(2\lg x+2\lg y)\cdot\lg y.$

$5\lg y\lg x-\lg^2x=2\lg y\lg x+2\lg^2y$

$3\lg y\lg x=\lg^2x+2\lg^2y.$

$x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0.$

$(x^2-2xy+y^2)-4x-3y^2+12y=0.\Rightarrow(x-y)^2-4x-3y^2+12y\overset{12\;12}{\cancel{+6+6}}=0.$

$(x-y)^2-4x-3(y^2-4y+4)+12=0.\quad\Rightarrow(x-y)^2-4x-3(y-2)^2+12=0.$

$(x-y)^2-4(x-3)-3(y-2)^2=0.$

№5.

$\cancel{y-3x}\,|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$y-3-x+y-3+x=6\qquad y-3-x\geq0\qquad y-3+x\geq0.$

$2y-6=6\Rightarrow y=6.\qquad y\geq x+3\qquad y\geq\cancel{3-x}\,-x+3$

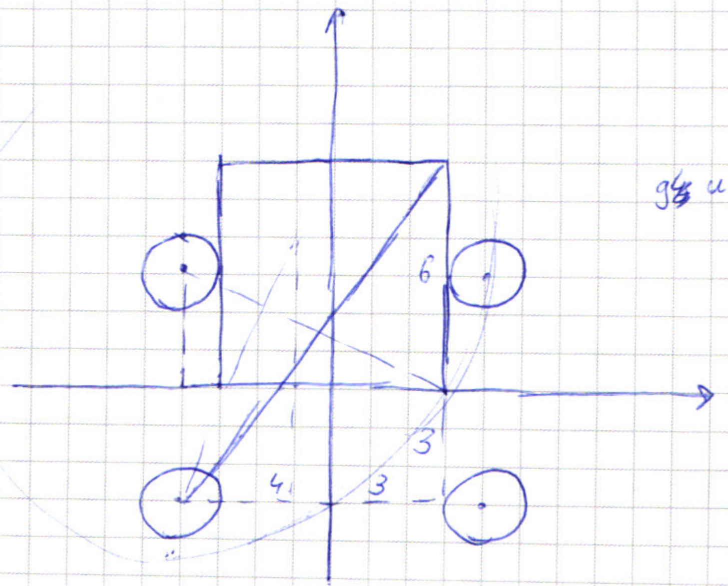
$y\geq x+3$ и $y\leq-x+3\qquad\qquad y\leq x+3\qquad y\geq-x+3$

$\cancel{y-3-x=y+3-x}=6.\qquad\qquad \cancel{-y+3+x+y-3}+x=6$

$x=3\qquad\qquad x=3$

$\cancel{-y+3+x-y+3-x}=6.$

$-2y=0.$



g и 7

$\cancel{x^2-2x^2-4x-3y^2+12x=0}$

$\cancel{=x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 4x(\cos 7x - \sin 7x) = \frac{1}{\sqrt2}(\cos^2(7x) - \sin^2(7x))$

$\sin 4x(\cos 7x - \sin 7x) - \frac{1}{\sqrt2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0.$

$(\cos 7x - \sin 7x)(\sin 4x - (\frac{1}{\sqrt2}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt2}\sin 7x)) = 0.$

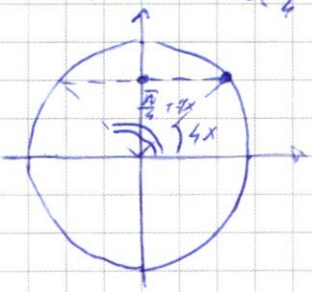
$\frac{1}{\sqrt2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{\pi}{4}\cos 7x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 7x = \cos(\frac{\pi}{4} - 7x)$

$\sin 4x = \cos(\frac{\pi}{4} - 7x)$; $\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - 14x}{2})$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{\pi}{2} - 14x)\cos x + 1}{2}}}$ $\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + 7x)) = \sin(\frac{\pi}{4} + 7x)$

$\sin 4x - \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0.$



$4x = \frac{\pi}{4} + 7x \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}$

$4x = \pi - \frac{\pi}{4} + 7x$

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \,|\, y-3$

$-(y^3 - 3y^2)$ → $y^2 + y - 4$

$y^2 - 7y$

$-(y^2 - 3y)$

$-4y + 12$

$-4y + 12$

$y^2 + y - 4 = 0.$

$D = 1 + 16 = \sqrt{17}$

$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$

$y = \sqrt{x}$

$(y^2 + y - 4)(y - 3) = y^3 + y^2 - 4y - 3y^2 - 3y + 12$

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12$

$\sin 4x = \cos 7x + \sin 7x.$; $\sin 7x = \sin 4x\cos 3x + \cos 4x\sin 3x.$

$\cos 7x = \cos 4x\cos 3x - \sin 4x\sin 3x.$

$\sin 4x - \sin 4x\cos 3x - \cos 4x\sin 3x - \cos 4x\cos 3x + \sin 4x\sin 3x = 0.$

$\sin 4x(1 - \cos 3x + \sin 3x) - \cos 4x(\sin 3x + \cos 3x) = 0.$

$-\cos 3x(\sin 4x + \cos 4x) + \sin 3x(\sin 4x - \cos 4x)$

$x = \frac{(\sqrt{17} - 1)^2}{4}$

$x = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4}$

$x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4}$

$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg(y)^{2\lg xy}$

$\lg x\cdot(\lg y^5 - \lg x) = 2\cdot(\lg x + \lg y)\cdot\lg y.$

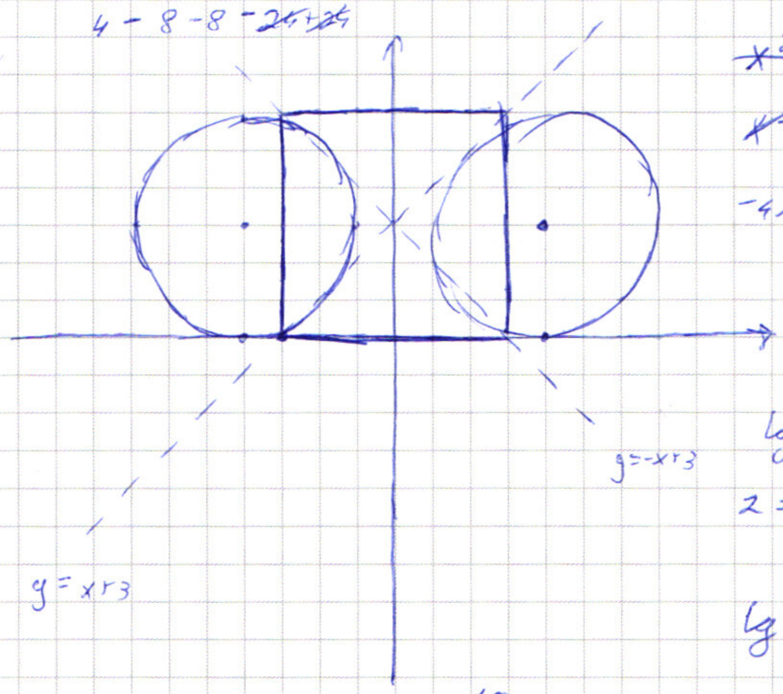
$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0.$ $5\lg x\cdot\lg y - \lg^2 x = 2\lg x\lg y + 2\lg^2 y$

$(x - y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0.$ $4(x - y^2 + 3y).$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$4-8-8-\cancel{24+24}$



$\cancel{x^2-2xy}$

$\cancel{x^2}-2x^2-4x-3x^2+12x=0.$

$a=9.$

$-4x^2+8x=0 \Rightarrow x=2.=y.$

$x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$

$y=x.$

$y=\sqrt{x}$ $\quad y>0$

$\lg 100 = 2\cdot\lg(-10)$ $\quad x=100$

$2=2\cdot\cancel{\ldots}$ $\quad y=-10$

$\log_a b = 2\log_a c.$

$\lg x = 2\lg y.$

$x=y^2$ $\quad \cancel{y=}\ x=\pm y.$

$\cancel{x}\ y=\pm\sqrt{x}.$

$y=0,\ x=4$ $\quad \cancel{4-8-8-12+24=0.}$ (12)

$(|x|-4)^2+9=9.$

$(|x|-4)^2=0 \qquad |x|-4=0$

$x=-4$ и $x=4.$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a.$

$(x+4)^2+(y-3)^2=a.$

$\cancel{0=|y|-3}$

№1.

$3375=5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1=5\cdot5\cdot5\cdot9\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1.$

$5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1\cdot1 : \quad 3\cdot3\cdot3$

$1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5$

$\cancel{3\cdot3}\ 3\cdot3$

№3.

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg x}\lg y.$

$\lg_x(5\lg y-\lg x)=\lg^2 x+2\lg^2 y$

$3\lg x\lg x=\lg^2 x+2\lg^2 y.$

$x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0$

$x(x-2y-4)-3y(y-4)$

$x^2-4x+4-3(y^2-4y+4)+12-2xy=0.$ $\qquad 2\lg 5=\lg(-5)$

$(x-2)^2-3(y-2)^2=2xy-12.$ $\qquad \lg 25=\lg(-5)$

$3\lg x\lg y=\lg^2 x+2\lg^2 y.$

$\lg^2 x-3\lg x\lg y+2\lg^2 y=0.$ $\qquad \lg x=\frac{3\lg y\pm\lg y}{2}=\left[\begin{array}{l}2\lg y\\ \lg y.\end{array}\right.$

$D=9\lg^2 y-8\lg^2 y-0=\lg^2 y.$ $\qquad \lg x=2\lg y$ $\qquad \lg x=\lg y.$

$\cancel{\lg 25=2\lg}$ $\cancel{y=x}$ $x=\pm y$ $\cancel{x=y^2}$ $\qquad x=y.$

$y^4-2y^3-4y^2-3y^2+12y=0.$

$y^3-2y^2-4y-3y+12=0.$

$y=0$ и $x=0$

$y^3-2y^2-7y+12=0.$

$27-18-21+12$

$9-21+12=0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1224
1234

№6.

$CF = ?$

~~3·3~~ 4·3·2·1·
12·2·1=24

$\frac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{6}}$

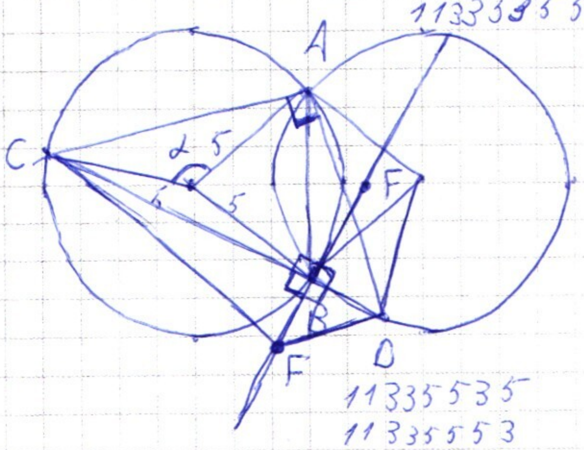
7·16·5

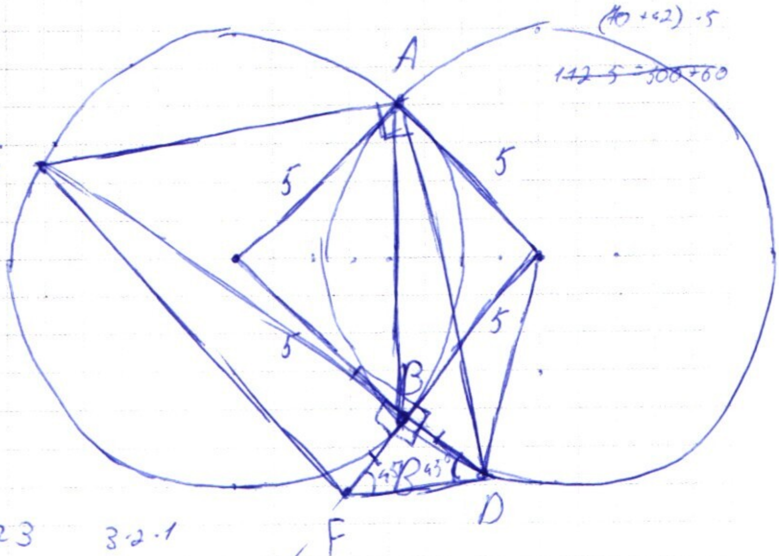
(10+42)·5

~~142·5 = 500+60~~

5·5·5·3·3·3·1·1.

11333555
11335355

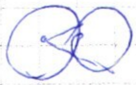




11335535
11335553
11353553
11355353

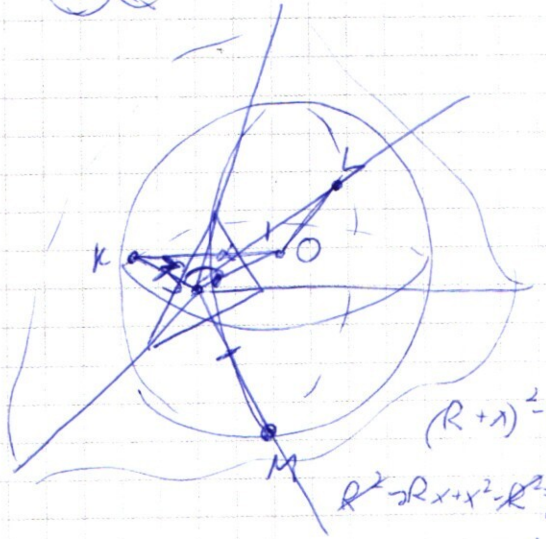
123
132
312

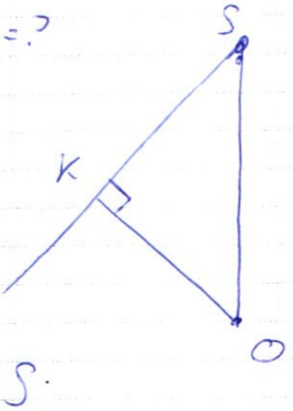
3·2·1



$\begin{array}{r} 560 \\ \times\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$

$\alpha = ?$





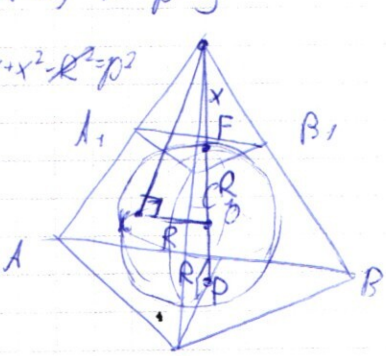
$(R+x)^2 - R^2 = p^2 S.$

$R^2 + 2Rx + x^2 - R^2 = p^2$

$p^2 = x^2 - 2Rx$

$\sin\angle KSO = \frac{R}{x+R}$

$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2.$



$r = \frac{3V}{S}$

$V = \frac{1}{3}\cdot SP \cdot 4 = \frac{4}{3} SP$

$r = \frac{4SP}{S}$

$r = \frac{V}{3S} = \frac{\frac{1}{3}\cdot SP\cdot \cancel{4}}{3\cdot \cancel{4}} = \frac{SP}{9}$

$r = \frac{\cancel{8}\, h\cdot S}{\cancel{8}}$; $r = \frac{V}{3S} = \frac{SP}{9}$

$\frac{SF}{SP} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2SF = SP \Rightarrow 2SF = SF + FP \Rightarrow SF = FP.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

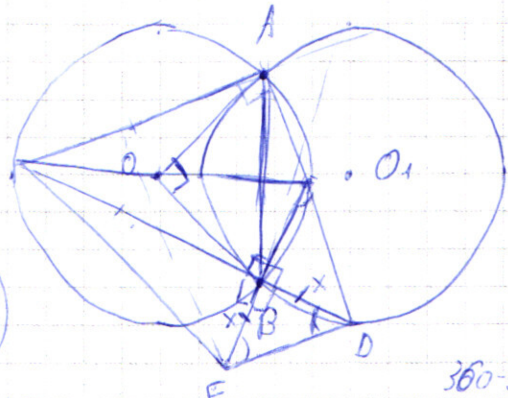
$y \le 70 + (2^{64}-1)x$

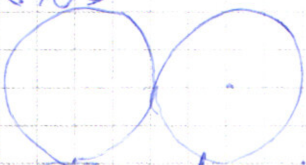
$x=0.$

$y > 1+3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{65}-1)x$

$y \le 70$





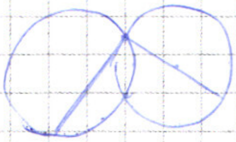
$y > 2+3\cdot 2^{65}$

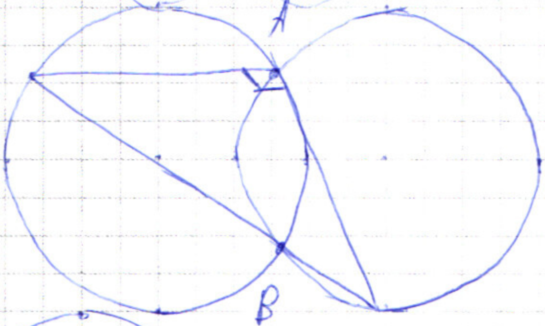
$y \le 70 + 2^{64} - 1$

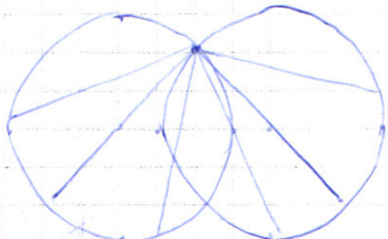
$360-90=270$

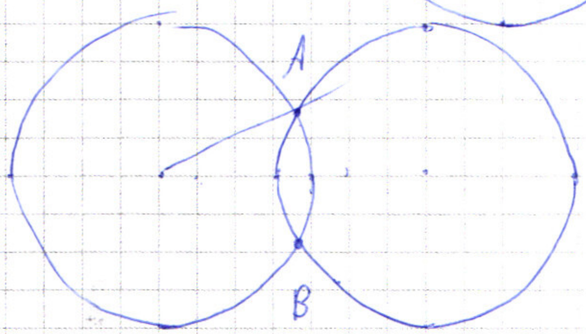
$\frac{1}{2}\sin 45^\circ.$

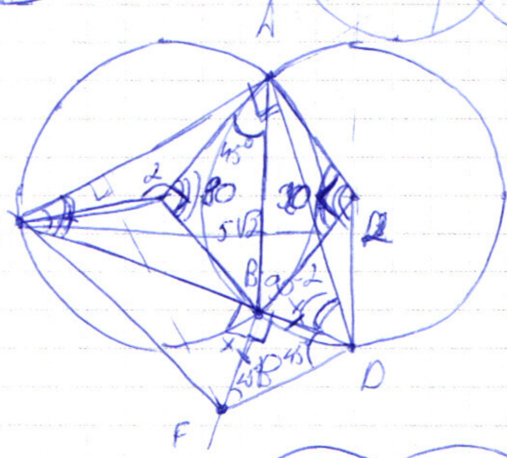
$135^\circ = 90+45^\circ$











$CF^2 = CB^2 + x^2$

$CA^2 = \cancel{x^2+x^2}\ 25+25-2\cdot 25\cos\alpha = 50(1-\cos\alpha)$

$AD^2 = 50(1-\cos\beta).$

$CB^2 = 50(1-\cos(360-\alpha-\delta));\ BD^2 = 50(1-\cos(\beta-\delta))$

$CB^2 = 50(1-\cos(\alpha+\delta));\ BD^2 = 50(1-\cos(\beta-\delta)).$

$50(1-\cos\alpha) + 50(1-\cos\beta) = \left(\sqrt{50(1-\cos(\alpha+\delta))} + \sqrt{50(1-\cos(\beta-\delta))}\right)^2$

$50(1-\cos(\alpha+\delta)$

$\cancel{CF^2}\ CF^2 = 50(1-\cos(\alpha+\delta)) + 50(1-\cos(\alpha-\delta)) = 50+50-50(\cos(\alpha+\delta)+\cos(\alpha-\delta))$

$\cos(\alpha+\delta)$ и $\cos(\alpha-\delta).$

~~$\cos\alpha\cos\delta - \cos\delta\cos$~~ $\quad 2\cos\alpha\cos\delta \quad \delta =$

$r = \frac{4\pi r^3}{S} \Rightarrow S = 4\pi r^2$