МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра[бот]у.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Значит, необходимо найти кол-во 8-значных чисел состоящих из:

а) трёх 5, трёх 3 и двух 1 : $\frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$

б) трёх 5, одной 3, одной 9 и трёх 1: $\frac{8!}{3!\,3!} = 1120$

$560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin\frac{8x}{2}\sin\frac{14x}{2} - 2\sin\frac{8x}{2}\cos\frac{14x}{2} = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 7x = -\sin 7x \\ \sqrt{2}\sin 4x = \sin 7x - \cos 7x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, 7x = -1 \\ \left\{\begin{array}{l} 2\sin^2 4x = \sin^2 7x + \cos^2 7x - 2\sin 7x\cos 7x \quad (*) \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin 4x \geq 0 \\ \sin 7x - \cos 7x \geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin 4x \leq 0 \\ \sin 7x - \cos 7x \leq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (**) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi b}{3} \end{array}\right. \quad m, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin 4x \geq 0 \\ \sin 7x \geq \cos 7x \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin 4x \leq 0 \\ \sin 7x \leq \cos 7x \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

(*) $2\sin^2 4x = \sin^2 7x + \cos^2 7x - \sin 14x$

$\sin 14x = 1 - 2\sin^2 4x$

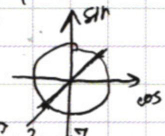
$\sin 14x = \cos 8x$

$\left[\begin{array}{l} 14x = \pi - \arcsin(\cos 8x) + 2\pi t \\ 14x = \arcsin(\cos 8x) + 2\pi m \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 14x = \frac{\pi}{2} - 8x + 2\pi m \\ 14x = \frac{\pi}{2} + 8x + 2\pi t \end{array}\right.$ $m, t \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 22x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t \end{array}\right.$ $m, t \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi t}{3} \end{array}\right.$ $m, t \in \mathbb{Z}$

(**) $\sin 4x \geq 0 \Rightarrow 4x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k] \Rightarrow x \in [\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}]$ (I)

$\sin 4x \leq 0 \Rightarrow 4x \in [\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k] \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}]$ (II)

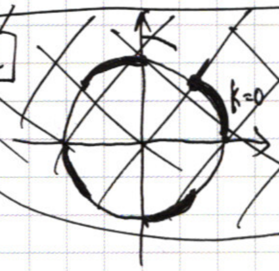


$\sin 7x - \cos 7x \geq 0 \Rightarrow \sin 7x \geq \cos 7x \Rightarrow 7x \in [\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k]$ (I)

$x \in [\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k; \frac{5\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k]$

$\sin 7x - \cos 7x \leq 0 \Rightarrow \sin 7x \leq \cos 7x \Rightarrow 7x \in [\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{9\pi}{4} + 2\pi k]$ (II)

~~I~~

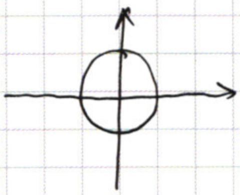


$\cancel{\begin{cases} \frac{\pi k}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi p \leq x \leq \frac{5\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi p \end{cases} \Rightarrow}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}] \\ x \in [\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k; \frac{5\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k] \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}] \\ x \in [\frac{5\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k; \frac{9\pi}{4} + 2\pi k] \end{cases} \end{array}\right.$

Подставим (*) в (**):

1) $x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11}$



$\frac{\pi k}{2} \leq \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$\frac{22k - 1}{44} \leq \frac{m}{11} \leq \frac{10}{44} + \frac{k}{2}$

$\frac{22k - 1}{4} \leq m \leq \frac{10 + 22k}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№3~~

$$\cancel{\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \ (1) \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{5\lg x} = y^{2\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot x^{\lg x} \ (1) \\ x(x+y-4)-3y(x+y-4)=0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} y^{3\lg x} = y^{\lg y}\cdot x^{\lg x} \ \downarrow \lg y \\ (x+y-4)(x-3y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{3\frac{\lg x}{\lg y}} = y\cdot x^{\frac{\lg x}{\lg y}} \end{cases}}$$

$$\cancel{(1)\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \ \downarrow \lg y}$$

$$\cancel{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\lg x}{\lg y}} = y^2}$$

$x>0$

$y>0$

При $x=1$:

$$\begin{cases} -//- \\ \cancel{1-2y-4y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -//- \\ 1-2y-4-3y^2+12y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -//- \\ 3y^2-10y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1=\left(\frac{1}{9}\right)^{\lg 3} \text{ неверно} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 1=9^{\lg 3} \text{ неверно} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x\neq 1$$

$D=25-9=16$

$y_{1,2}=\frac{5\pm 4}{3}=\left[\begin{array}{l}3\\ \frac{1}{3}\end{array}\right.$

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad | : y^{2\lg x} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y} \ \downarrow \lg y \\ x(x+y-4)-3y(x+y-4)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\frac{\lg x}{\lg y}} = y^2 \\ (x+y-4)(x-3y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\log_y x} = y^2 \\ -//- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{3-\log_y x} = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} x=3y \\ y=4-x \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

При $y=1$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1 \\ -//- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{-\lg x}=1 \\ -//- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = 0 \ \cancel{} \\ x=1 \ \cancel{} \end{array}\right. \\ -//- \end{cases}$$

$\Rightarrow y\neq 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y \\ (3y)^{3-1-\log_y 3} = y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4-x \\ 2\log_x y = 3-\log_y x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -//- \\ \frac{9y^2}{(3y)^{\log_y 3}} = y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -//- \\ 2t^2-3t+1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -//- \\ 3^{\log_y 3}\cdot 3 = 9^{\frac{3}{}} \end{cases} \\ \begin{cases} -//- \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow x=y \ \cancel{} \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=y \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Пусть $\log_x y = t$

(*) $D=1+16=17$

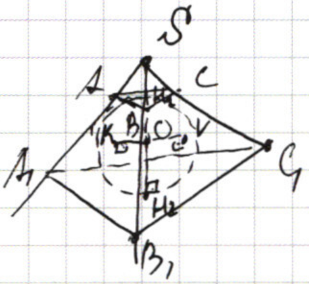
$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -//- \\ \log_y 3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4-x \\ x=y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2+y-4=0^* \\ -//- \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} - \text{п.к.}(<0) \\ -//- \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x=\frac{18-2\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x=9-\sqrt{17} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x=9;\ y=3)$ $(x=9-\sqrt{17};\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



Пусть H_1, H_2 – точки, в которых SO пересекает сек. плоскости.

Тогда: $\frac{SH_1}{SH_2} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$SH_1 = \frac{1}{2} SH_2$ $\qquad SH_1 = \frac{1}{2}(SH_1 + 2R)$

Значит, радиус сферы $R = \frac{2SH_1 - SH_1}{2}$

$R = \frac{SH_1}{2}$

$\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{R}{SH_1 + R} = \frac{SH_1}{2\left(\frac{SH_1}{2} + SH_1\right)} = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ $\qquad \angle KSO = \angle\alpha$

$\frac{S_{сеч}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SO - R\sin\alpha}{SH_1}\right)^2 = \left(\frac{SH_1 + R - R\sin\alpha}{SH_1}\right)^2 = \left(\frac{SH_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{SH_1}{2}}{SH_1}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

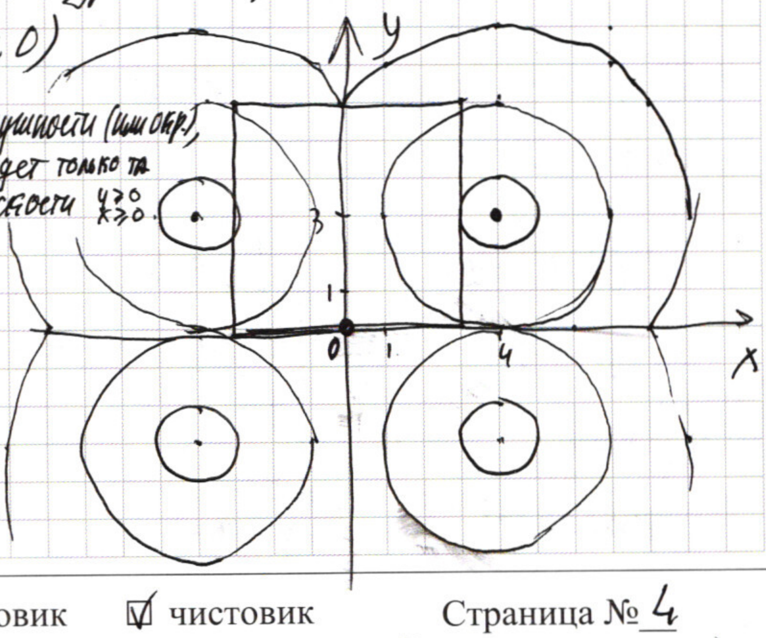
$S_{сеч} = \frac{16}{9}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$; $S_{сеч} = \frac{16}{9}$.

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (2) \end{cases}$$

(1) графиком уравнения будет квадрат с вершинами в точках $(3;0)$; $(3;6)$; $(-3;6)$; $(-3;0)$



(2) графиком уравнения будет часть окружности (или окр.), отраженная от осей. Отражаться будет только та часть, которая находится в части плоскости $y \geq 0$, $x \geq 0$

Центр окружности: $(4;3)$

Радиус: $\sqrt{a}$

При $a < 1$ решений нет

При $a = 1$ два решения

При $a \in (1; 5)$ четыре решения

При $a = 5$ два решения

При $a > 5$ решений нет.

Ответ: $a = \{1; 5\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ 3375 | 5
675 | 5
135 | 5
27 | 3
9 | 3
3 | 3
1 |

Необходимо найти кол-во 8-зн. чис., состоящих из 3х „5", 3х „3" и 2х „1"

$\frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \underline{\underline{560}}$

5 5 5 3 9 111

2345678 = 20·56

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

55333
53533
53353
53335
35533
35353
35335

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}$

$\boxed{2}$ $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\cos\frac{8x}{2}\cos\frac{14x}{2} - \left(2\sin\frac{8x}{2}\cos\frac{14x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\cos 4x\cos 7x - 2\sin 4x\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\cos 7x(\cos 4x - \sin 4x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\cos 7x(\cos 4x - \sin 4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14x$

$\cos\frac{\pi}{4}$

$\boxed{5}$

$\begin{cases} \text{— " —} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \;(1) \end{cases}$

(1) $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$-3xy + xy$

$x(x - 4 + y) - 3y(y - 4 + x) = 0$

$(x+y-4)(x-3y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 4 - x \\ y = \frac{x}{3} \end{array}\right.$

$\log_4 x = \frac{1}{\log_x 4}$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

$y^{5\lg x} = y^{2\lg x + 2\lg y}\, x^{\lg x}$

$y^{3\lg x} = y^{2\lg y}\, x^{\lg x}$

$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y} \;\Big\downarrow \lg y$

$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\frac{\lg x}{\lg y}} = y^{2\lg y} \Rightarrow \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\log_y x} = y^2 \Rightarrow y^{3\log_y x} = y^2\cdot x^{\log_y x}$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$x^3 = y^2\cdot x^{\log_y x}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

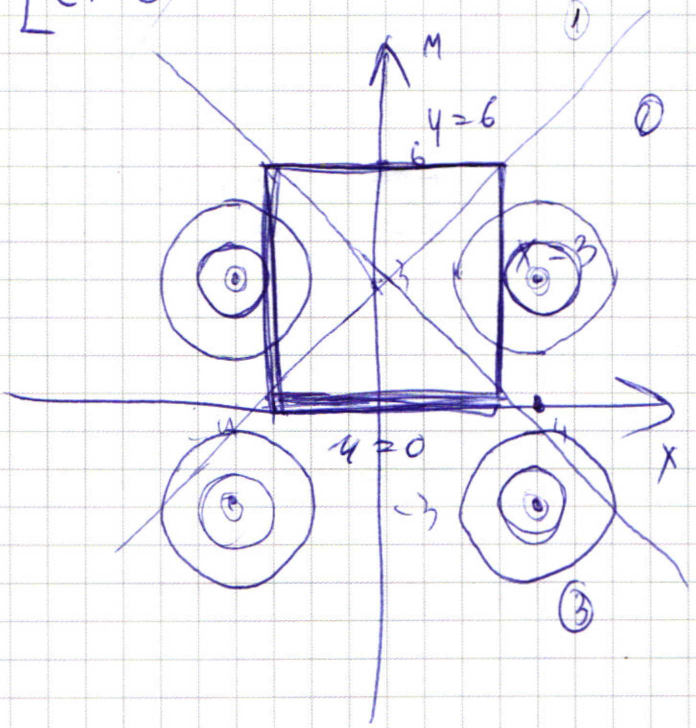
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$y^2 = x^{3-\log_3 x}$

$\left[\begin{cases} 16-8x+x^2 = x^{3-\log_3 x} \\ y = 4-x \end{cases}\right.$

$\begin{cases} \\ y = \frac{x}{3} \end{cases}$

$\boxed{№5}$ $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \Rightarrow$



$y = x+3$

$y = -x+3$

1 $y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y-6=6$

$y=6$

2 $x+\cancel{3}-\cancel{y}+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$

$x=3$

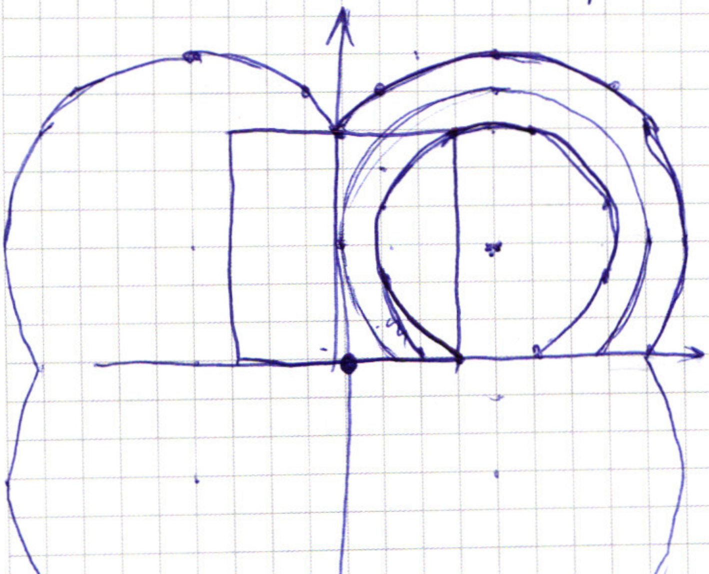
3 $-y+3+\cancel{x}-y+3-\cancel{x}=6$

$y=0$

4 $\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6$

$x=-3$

При $a=10$: 4 реш.



РЕШЕНИЕ

При $a=1$

~~При $a=25$~~

!!!

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{2}$ $\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin\frac{8x}{2}\sin\frac{14x}{2} - 2\sin\frac{8x}{2}\cos\frac{14x}{2} = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 4x\sin 7x - 2\sin 4x\cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$(\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin 7x = -\cos 7x \\ \cos 7x = \sin 7x - \sqrt{2}\sin 4x\end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \right.$ $\Rightarrow \left[x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \right.$

$\sqrt{2}\sin 4x = \sin 7x - \cos 7x$

$2\sin 4x = \sin^2 7x - \sin 14x + \cos^2 7x$

$\cancel{4\sin 2x\cos 2x}$

$2\sin 4x + \sin 14x = 1$

$2\sin\frac{18x}{2}\cos\frac{-10x}{2} + 2\sin 4x = 1$

$2\sin 9x\cos 5x + 2\sin 4x = 1$

$\boxed{3.}$ $\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} y^{5\lg x} = y^{2\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot x^{\lg x} \\ (y+x-4)(x-3y) = 0\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} y^{3\lg x - \lg y} = x^{\lg x} \\ -\,\text{"}-\end{cases}$

$x(x+y-4) \quad -3y(y+x-4)$

$+xy \quad -3xy$

$x = 1$, $y = 1$

$2\lg x + 2\lg y$

(1) $\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg y} \Rightarrow \frac{y^{3\frac{\lg x}{\lg y}}}{x^{\frac{\lg x}{\lg y}}} = y \Rightarrow \frac{y^{3\log_y x}}{x^{\log_y x}} = y \Rightarrow y^{3t-1} = x^t$

$\log_y x = t$ $\qquad \lg y = \frac{1}{\log_y 10}$

$\boxed{I}$ $x = 3y$

$y^{3t-1} = (3y)^t$

$\left(\frac{y^3}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{\lg y}$

$\boxed{II}$ $x = 4 - y$

$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{\lg y}$

~~$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\frac{\log_y x}{\log_y 10}} = y^{2\cdot\frac{1+\log_y x}{\log_y 10}}$~~

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log_y x} = y^{2+2\log_y x} \Rightarrow \frac{y^{3\log_y x}}{x^{\log_y x}} = y^2$

$\frac{x^3}{x^{\log_y x}} = y^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^{3-\log_y x} = y^2$

$\left[\begin{array}{l} x = 3y \\ y = 4-x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{3} \\ y = 4-x \end{array}\right.$

$(3y)^{(3-\cancel{2})(1+\log_y 3)} = y^2$

$(3y)^{2-\log_y 3} = y^2$

$\frac{9y^{\cancel{2}}}{(3y)^{\log_y 3}} = y^2$

$\frac{9^{3}}{3^{\log_y 3}\cdot\cancel{3}} = y$

$y \cdot 3^{\log_y 3} = 3$

$y = \frac{3^1}{3^{\log_y 3}}$

$y = 3^{1-\log_y 3}$

$\log_3 y = 1 - \log_y 3$

$\log_3 y + \frac{1}{\log_3 y} = 1$

$\log_3 y = t$

$t^2 - t + 1 = 0$

$\cancel{D<1}$

$\frac{x^3}{x^{\log_y x}} = y^2$

$2\log_x y = 3 - \log_y x$

$\log_x y = t$

$2t + \frac{1}{t} - 3 = 0$

$\cancel{D}$ $2t^2 - 3t + 1 = 0$

$D = 9 - 8 = 1$

$t_{1,2} = \frac{3 \mp 1}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \log_x y = \frac{1}{2} \\ \log_x y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = y \\ \cancel{x = y} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3} = \sqrt{x} \\ \sqrt{x} = 4-y \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{9} = x \\ x = 16 - 8x + x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \quad (y=3) \\ x^2 - 9x + 16 = 0^{(1)} \end{array}\right. \cancel{\Rightarrow}$

(1) $D = 81 - 64 = 17$

$x_{1,2} = \frac{9 \mp \sqrt{17}}{2}$

Отв:

$(9; 3)$

$\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}\right)$

$\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

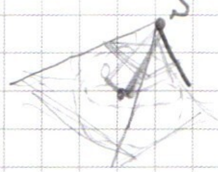
Страница №__

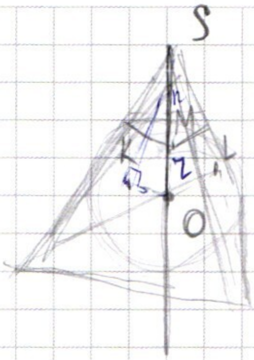
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



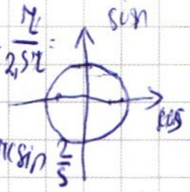


$4r = r + 2\tau$

$2\tau = 3r$

$\tau = 1{,}5r$

$\sin\angle KSO = \frac{\tau}{2{,}5\tau} =$



$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{2}{5}$

$\arcsin(\cos t) = \frac{\pi}{2} - t$

$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$\sqrt{2}\sin 4x = \sin 7x - \cos 7x$

$2\sin^2 4x = \sin^2 7x - \sin 14x + \cos^2 7x$ (1)

$\sin 14x = \cos 8x$

$\sin 14x - \cos 8x = 0$

$14x = \arcsin(\cos 8x) + \boxed{2\pi n}$

$14x = \frac{\pi}{2} - 8x + 2\pi n$

$22x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi n}{11}}$

$14x = \pi - \arcsin(\cos 8x) + 2\pi m$

$14x = \pi - \frac{\pi}{2} + 8x + 2\pi m$

$6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

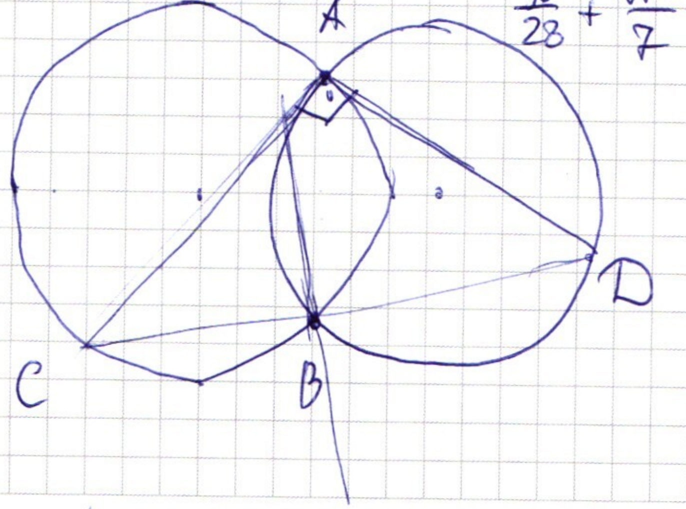
$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}}$

Ответ: $\frac{\pi}{44} + \frac{\pi n}{11}$

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}$ $\quad n, m, t \in \mathbb{Z}$

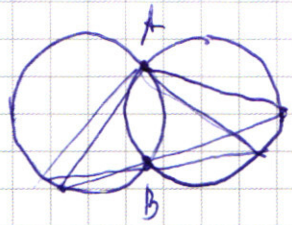
$\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi t}{7}$

⑥



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\angle CAB + \angle BAD = 90^\circ$

$\smile CB + \smile BD = 180^\circ$

~~$CF = \sqrt{(CD - BD)^2 + BD^2}$~~

~~$CF = \sqrt{CD^2 - x}$~~

$\boxed{7}$ $\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + 2^{64}x - x \end{cases} \Rightarrow$

$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$

если $x = 65$

$y > 4\cdot 2^{65}$ $\quad 2^{67}$

$2^x + x(1 - 2^{64}) = 70 - 3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + 2^{64}\cdot 64 - 64$

$6 + 2^{70}$