МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3375

№6

$r = 5$ $\angle CAD = 90^\circ$ | a.) CF – ?

$B \in CD$ $BF = BD$. | б.) $BC = 6$

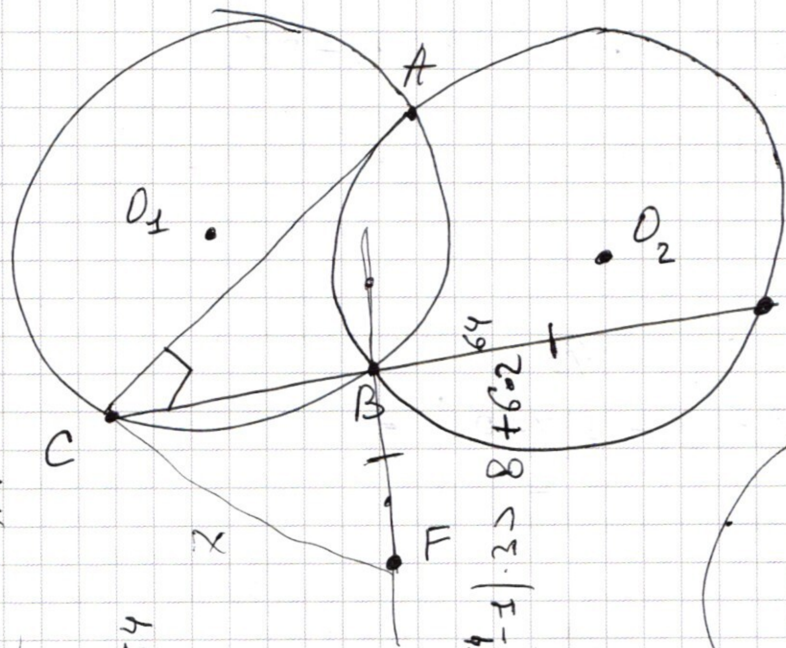
$S(\triangle ACF)$ – ?

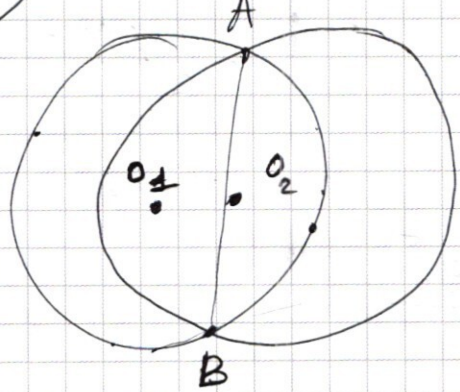
$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3\cdot 2^{65} \geq 1 + 3\cdot 2^{65}$.

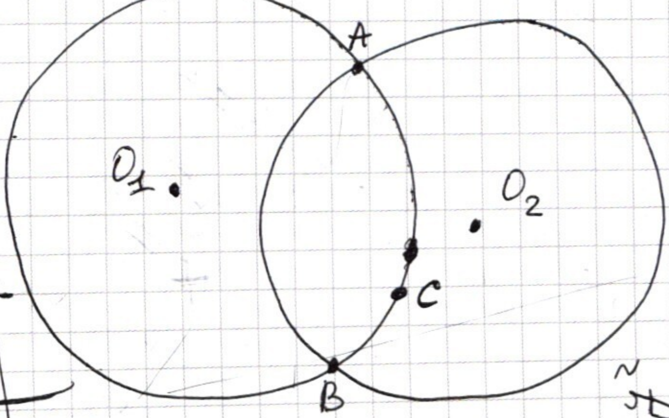
$2\cdot 35$. $6\cdot 2^{64}$

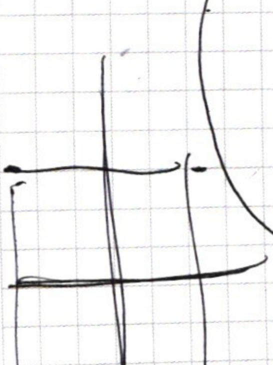
$70 + (2^{64} - 1)\cdot 33 > 8 + 6\cdot 2^{64}$

$\cos 11x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 8x}{2}\right)\cos\left(\frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = -2\sin(4x)\sin\left(\frac{\pi}{4} x\right)$









$x = y^2$

$\cancel{(y^3 \cdot 2^{6}y) = y^{2}\ldots}$

$\cancel{(y^3 \cdot 2^6 y^2) = y^4 \ldots}$

$y^6 2^{6} y = y^6 2^{6} y$.

№2

$$\cos(11x) - \sin(11x) + \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2}\cos(14x)$$

$$\cos(14x) = \cos(11x)\cos(3x) - \sin(11x)\sin(3x)$$

$$\cos(11x) - \sin(11x) = \sqrt{2}\left(\sin(45)\cos(11x) - \cos 45 \cdot \sin 11x\right)$$

$$\cos(11x) - \sin(11x) = \sqrt{2}\cdot\sin(45 - 11x)$$

$$-(\cos(3x) - \sin 3x) = -\sqrt{2}\sin(45 - 3x)$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\sin(45 - 11x) - \cancel{\sqrt{2}}\sin(45 - 3x) = \cancel{\sqrt{2}}\cos(14x)$$

$$\sin(45 - 11x) + \sin(3x - 45) = \cos(14x)$$

$$2\sin\left(\frac{3x - 11x}{2}\right)\cos\left(-\frac{14x + 90}{2}\right) = \cos(14x)$$

№3

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x$$

$$y - 3 - x = 6 \Rightarrow y - x = 9$$

$$y - 3 + x = 0 \Rightarrow y + x = 3$$

$$2y = 12$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 6 \\ x = -3 \end{matrix}}$$

$$y - 3 - x = -6$$

$$\begin{cases} y - 3 - x = 0 \\ y - 3 + x = 6 \end{cases} \Rightarrow 2y - 6 = 6$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 6 \\ x = 3 \end{matrix}}$$

$$\cos(A) - \cos B = \cos A + \cos(\pi - B) = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + A - B}{2}\right)\cos\left(\frac{B + A - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{lg(x)} = y^{2\cdot lg(xy)} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0. \\ y\neq 0 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}}$

$$x^2-2xy+y^2-4x-4y^2+\overset{4\cdot 3}{\cancel{12}}y=0.$$

$$(x-y)^2-(4y^2-2\cdot 2\cdot 3y+9)=-9+4x.$$

$$y^{5\cdot lg(x)} = y^{2lg(xy)}\cdot x^{lg(x)}.$$

$$y^{5\cdot lg(x)} = y^{2lg(x)}\cdot y^{2lg(y)}\cdot x^{lg(x)}$$

$$y^{3lg(x)} = y^{2lg(y)}\cdot x^{lg(x)}$$

Вспомним: $a^{log_b(c)} = c^{log_b(a)}$

$$y^{lg(x^3)} = (x^3)^{lg(y)} = x^{3lg(y)}.$$

$$x^{3lg(y)} = y^{2lg(y)}\cdot x^{lg(x)}.$$

Заново.

$$y^{5\lg(x)} = x^{\lg(x)} \cdot y^{2\lg(xy)}$$

$$y^{2\lg(xy)} = (xy)^{2\lg(y)} \cancel{\cdot x^{\lg(x)}} = x^{2\lg(y)} \cdot y^{2\lg(y)}.$$

$\underline{\text{(с учетом ОДЗ)}}$.

$$y^{5\lg(x)} = x^{\lg(x)} \cdot x^{2\lg(y)} \cdot y^{2\lg(y)}$$

Заметим: $$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = x^{5\lg(y)-\lg(x)}$$

$$y^{5\lg(x)} = y^{2(\lg x+\lg y)} \cdot x^{\lg(x)}.$$

$$\boxed{y^{3\lg(x)} = y^{2\lg(y)} \cdot x^{\lg(x)}} \Rightarrow y^{3\lg(x)-2\lg y} = x^{\lg(x)}.$$

$$(x^2-2\cdot(2x)+4)-4-2xy-3y^2+12y=0$$

$$(x-2)^2 = 3y^2-12y+2xy+4 \geq 0$$

$$3\lg(x)\cdot\lg(y) = 2\lg(y)\cdot\lg(y)+\lg x\lg(x).$$

$$\boxed{2\lg^2(y) - 3\lg(x)\lg(y) + \lg^2(x) = 0.}$$

$$\cancel{(\lg(y)-\lg x)^2 = \lg x\lg y}$$

$$\cancel{\lg^2(xy) = \lg x\lg y}$$

$$\cancel{\lg^2\left(\frac{y}{x}\right) = \lg x\lg y}$$

$$\cancel{\lg(y) = 3\lg(x) \pm \sqrt{9\lg^2(x)-4\lg}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2\lg^2 y - 3\lg x \lg y + \lg^2(x) = 0. \\ x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

$$\lg(y) = \frac{3\lg(x) \pm \sqrt{9\lg^2(x) - 4\cdot 2\lg^2(x)}}{2\cdot 2} = \frac{3\lg x \pm \lg x}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \lg(y) = \lg(x) \Rightarrow x = y \\ \lg(y) = \frac{1}{2}\lg x \Rightarrow y^2 = x. \end{array}\right. \qquad x, y > 0$$

Рассм. 1-й случай.

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 - 4y + 12y = 0 \Rightarrow \cancel{4}y^2 = \cancel{8}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(y-2) = 0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \notin \text{ОДЗ} \\ y = 2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 2 \end{array}}$$

проверяем:

$$\left(\frac{2^5}{2}\right)^{\lg(2)} = 2^{2\lg(2^2)}$$

ответ

$$2^{4\lg(2)} = 2^{4\lg(2)} \text{ — подходит.}$$

для 1-го случая.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3 (Нумеровать только чистовики)

$\boxed{\text{2-й случай:}}$ $y^2 = x$

~~$x^2 - 2x^3 - 4x - 3x^4 +$~~

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 4y - 3y + 12) = 0.$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0.$$

угадаем 1 корень: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$.

$y = 2 \Rightarrow 8 - 8 - 7 \cdot 2 + 12 \neq 0.$

$y = 3 \Rightarrow 27 - 18 - 21 + 12 = 39 - 39 = 0$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y-3 \\ \cline{2-2} -(y^3 - 3y^2) & y^2 + y - 4 \\ \hline y^2 - 7y + 12 & \\ -(y^2 - 3y) & \\ \hline -4y + 12 & \\ -(-4y + 12) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$y^2 + y - 4 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4}}{2}$

~~$y = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$~~

$\begin{cases} y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y > 0 \end{cases}$

$\rightarrow y = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$

В случае $\boxed{y = 3 \Rightarrow x = 9.}$

В случае $y = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{17 + 1 - 2\sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{9 - \sqrt{17}}{2}$ Я проверил. на черновике Всё подходит. $\boxed{\text{3 ответа}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5.

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6. \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases} \quad \Bigg| \text{ 2 реш.}$$

Поймем сначала, что за фигура в 1 уравнении.

~~Рассм. крайние точки~~

~~если $\begin{cases} y-x\geq 3 \\ y+x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow y\geq 3+x,\ y\geq 3-x$~~

Рассмотрим ~~границы~~ крайние точки (точки излома).
~~Свобод~~ 1 уравнение всегда линейное
(кусочно-линейная ф-ция).

1.) $\begin{cases} y-3-x=6 \\ y-3+x=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=6 \\ x=-3 \end{matrix}}$

2.) $\begin{cases} y-3-x=-6 \\ y-3+x=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=0 \\ x=3 \end{matrix}}$

3.) $\begin{cases} y-3-x=0 \\ y-3+x=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=6 \\ x=3 \end{matrix}}$

4) $\begin{cases} y-3-x=0 \\ y-3+x=-6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y=0 \\ x=-3 \end{array}}$

то есть:

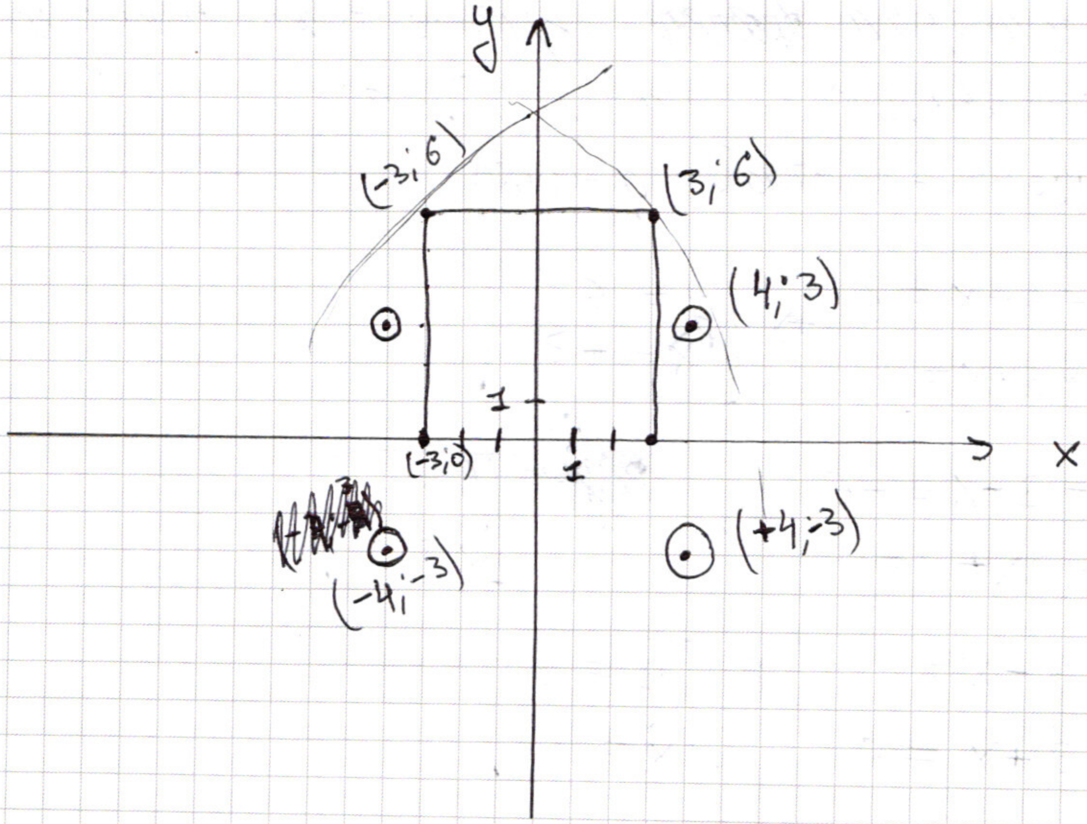
$y=6$ $x=-3$ $\quad y=0$ $x=3$ $\quad y=6$ $x=3$ $\quad y=0$ $x=-3$

то есть это квадрат.

теперь рассм. 2 ур-ние.

Если бы не было модулей, то это была бы окружность с центром в $(x_0; y_0)=(4;3)$.

Но т.к. есть в обоих скобках модули, то это ур-ние задает 4 окружности с центрами в $(\pm 4; \pm 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$!



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 решения будет, когда радиус окружности станет равен 1 (видно из рис).

В этом случае 2 окружности будут касаться квадрата.

То есть при $\boxed{a=1}$

Проверим: ~~точки~~ точка касания из рис. будут иметь координаты $(3;3)$ и $(-3;3)$.

$$\begin{cases} |3-3-3|+|3-3+3| = 6=6 \\ (3-4)^2+(3-3)^2 = 1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3-3+3|+|3-3-3| = 6=6 \\ (3-4)^2+(3-3)^2 = 1=1 \end{cases}$$

В случае $a>1$ ~~будет так как~~ еще надо рассм случаи, когда квадрат ~~от окр~~ внутри окружностей.

Еще подойдет случай, когда нижние (на рис.) окружности касаются верхних углов квадрата.

В этом случае:

$49+81=130$

$a=(3+4)^2+(6+3)^2=$ ~~36+100=136~~

Так как $a=130>(4+3)^2+3^2=49+9=58$

(это я доказал, что для окружностей с центрами в $(-4;3)$ и $(4;3)$ нет решений) (квадрат будет внутри).

Ответ: $\boxed{\begin{array}{l} a=1 \\ a=130 \end{array}}$

Других решений нет, т.к. в других случаях будет квадрат не полностью внутри двух ближних окружностей.

Задание №2.

$$\cos(11x)-\cos(3x)-\sin(11x)+\sin(3x)=\sqrt{2}\cos(14x).$$

$$\cos(14x)=\cos(11x)\cos(3x)-\sin(11x)\sin(3x).$$

$$\cos(11x)-\sin(11x)=\cos(11x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+11x\right)$$

$$=2\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Аналогично:

$$-(\cos(3x)-\sin 3x)=-\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$$

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{\sqrt{2}}\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)-\cancel{\sqrt{2}}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cancel{\sqrt{2}}\cos(14x)$$

$$\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(4x)=\cos(14x) \text{ (по усл.)}$$

$$2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=(\sin 7x+\cos(7x))\cdot\sqrt{2}.$$

$$\cancel{\cos(14x)+\sin(4x)\cdot\sqrt{2}\cdot(\sin 7x+\cos 7x)}$$

$$\cancel{\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 11x\cos 3x-\sin 11x\sin 3x}$$

~~Тупик. Попробуем по-другому~~:

$$-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x=-\sqrt{2}(\sin 7x+\cos 7x)\sin(4x)$$

Вспомним: $\cancel{\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=}$

$$\cos(14x)=\cos^2(7x)-\sin^2(7x).$$

$$-\sqrt{2}(\sin(7x)+\cos(7x))\sin(4x)=(\cos(7x)+\sin 7x)(\cos 7x-\sin 7x)$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\cos(7x)+\sin(7x)=0\\ \sqrt{2}\sin(4x)+\cos 7x-\sin 7x=0.\end{array}\right.$$

$$-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos(14x)$$

$$-\sqrt{2}\left(\sin 7x+\cos 7x\right)\sin(4x) = \cos^2(7x)-\sin^2(7x)$$

а.) $\sin(7x)+\cos(7x)=0.$

$$\cancel{\sin(7x)+\sin}\ \boxed{\sqrt{2}\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=0.}$$

$$\Rightarrow \sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow 7x+\frac{\pi}{4}=\pi k,\ k\in Z.$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi k}{7}-\frac{\pi}{28}},\ k\in Z.$$ – ответ

б.) второй случай:

$$-\sqrt{2}\sin(4x) = \cos(7x)-\sin(7x).$$

$$\cos(7x)+\sin(-7x) = \cos(7x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+7x\right)$$

$$\cancel{\cos(7x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+7x\right)=2}$$

$$\cos(7x)-\sin(7x) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(7x)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(7x)\right)$$

$$=\cancel{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-7x\right) = -\cancel{\sqrt{2}}\sin(4x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)+\sin(4x)=0$$

$$\cancel{2}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-7x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-7x-4x}{2}\right)=0$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{11x}{2}\right)=0.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)=0$$

$$\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x=\pi\tilde{k},\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi\tilde{k}}{3}},\ \tilde{k}\in\mathbb{Z}.$$

ответ

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{11x}{2}\right)=0$$

$$\frac{\pi}{8}-\frac{11}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$11x=\frac{\pi}{4}-\pi-2\pi n$$

ответ. $$\boxed{x=-\frac{3\pi}{44}-\frac{2\pi n}{11}},\ n\in\mathbb{Z}$$

т.е. всего 3 серии корней.

Задание №1

3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3

т.е. $3375=5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$.

Задание 1.

3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3

~~Чтобы~~

$\overline{abcdefgh}$

Чтобы восьмизн. число ⋮ 3375:

а.) ~~но~~ в числе должен быть ≥ 1 ноль

~~то~~ но 1 цифру выбирать только 9 спос.

Тогда: а.) $9 \cdot 1 \cdot 10^6 = N_1$.

б.) из 8 цифр должны быть либо: (без нулей)

~~1.) $\cdot 5,5,5,3,3,3 \Rightarrow N_2 =$~~

~~2.) $\cdot 5,5,5,9,3$~~

1) 5,5,5,3,3,3 (без нулей и девятки)

$N_2 = C_3^8 \cdot C_3^5 \cdot 8 \cdot 8 =$

$N_2 = \frac{8! \cdot 5!}{5! \cdot 2!} \cdot 64 = \cancel{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 64}$

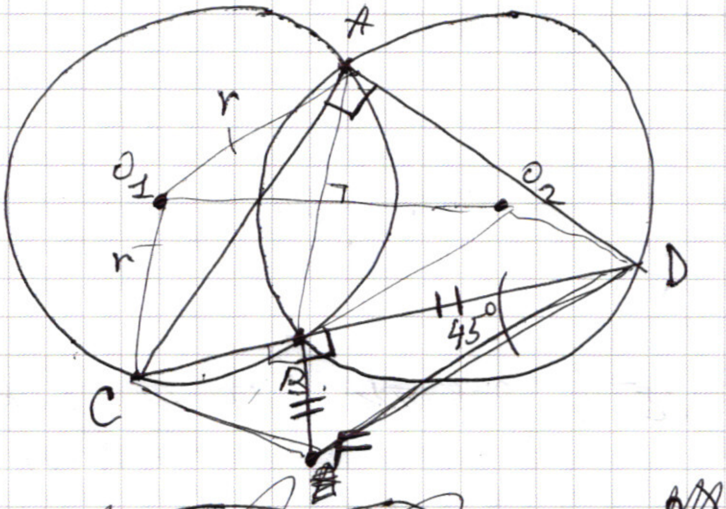
2.) 5,5,5,9,3 : $N_3 = C_3^8 \cdot C$

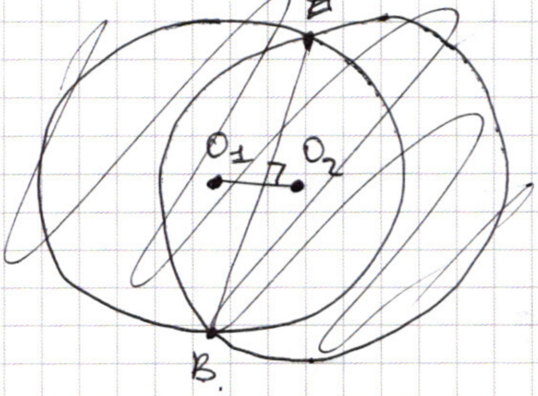
Задание №6.

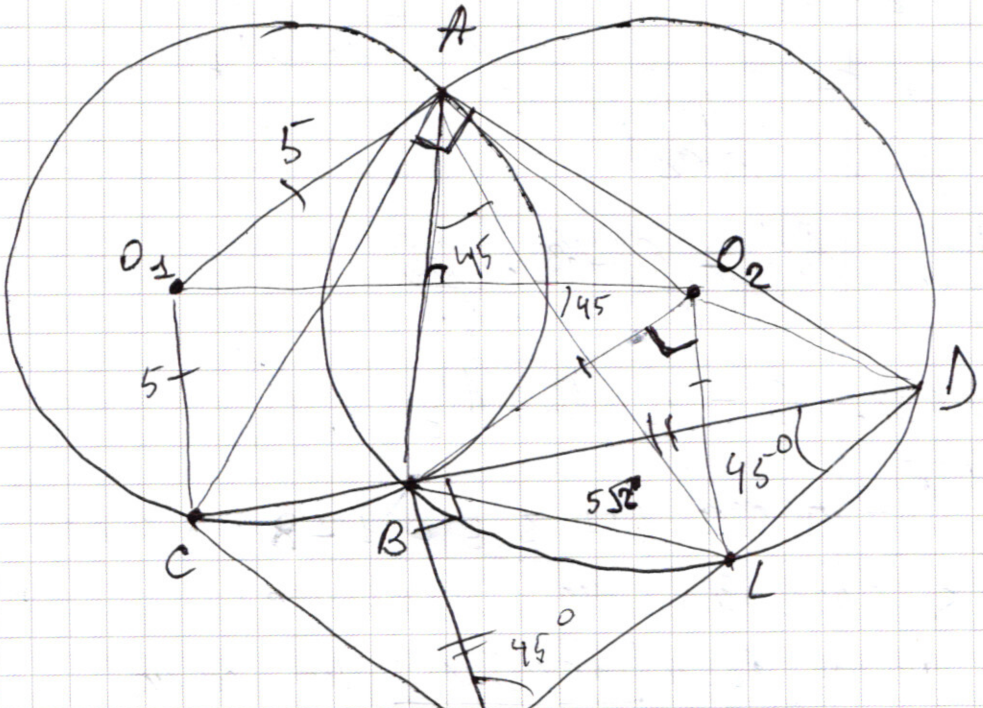
$r = 5$

1.) $\angle BDF = 45^\circ$
(т.к равнобедр + $\angle FBD = 90^\circ$)

CF − ?







ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заново.

$N_1 = 9 \cdot 10^6$. — если есть нули.

в случ. если есть:

5, 5, 5, 3, 3, 3 (без нулей и девяток) (порядок важен)

$\cancel{C_8^3 \cdot C_8}$

$N_2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 8 \cdot 8$.

если 5, 5, 5, 9, 3:

$N_3 = C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$.

$N = N_1 + N_2 + N_3$ $\qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$\cancel{N_2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot 8 \cdot 8}$

$\cancel{\frac{8!}{5!\,3!}} \cdot \cancel{N_2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2}}$

Ответ: $N = N_1 + N_2 + N_3$

$\boxed{N = 17350178}$ чисел.

(я посчитал на черновике)

скорее всего обсчитался, но сама идея же правильная

1.) $\angle BDF = 45^{\circ}$

2.) $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

3.) $CF^2 = CB^2 + BF^2$

4.) $BL = 2 \cdot r \sin 45 = \cancel{\ } 5\sqrt{2}$. $(\angle BO_2L = 90)$

~~[illegible]~~ заметим: $\triangle BLO \sim \triangle CBF$ $(k = 1)$

(2 угла и сторона)

$\Rightarrow BL = CF = 5\sqrt{2}$.

Заметим: $\angle BAL = 45^{\circ}$.

~~[illegible]~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$$70+(2^{64}-1)x > 2^x + 6\cdot 2^{64}$$

Заметим, что тут главный фактор явл. коэф. перед 2^{64}:

$$70 + x\cdot 2^{64} - x > 2^x + 6\cdot 2^{64}$$

в случае $x = 6$:

$$70+6\cdot 2^{64} - 6 = 64 + 6\cdot 2^{64}$$

$x = 7$:

$$70+7\cdot 2^{64} - 7 > 128 + 6\cdot 2^{64}$$

То есть начиная с $x = 7$ нерав. выполняется.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)