

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

П.к. $3 \cdot 5 = 15 > 10$, $5 \cdot 5 = 25 > 10$, подходящие нам числа могут иметь только цифры 1, 3, 5, 9 (если будут другие цифры, то произведение будет делиться на другие пр. мн.) $\Rightarrow$ подходящие числа состоят из 2-х наборов цифр (5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1) и (5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1). Кол-во чисел из первого набора $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6} = 560$ (кол-во способов выбрать 3 места под пятерки $\times$ на кол-во способов выбрать 3 места под тройки). Для второго набора $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 560 \cdot 2$ (кол-во способов расставить 3 пятерки $\cdot$ на кол-во способов поставить 9 и 3) $\Rightarrow$ всего чисел: $560 \cdot 3 = 1680$. Ответ: 1680.

2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\sin 7x - \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

Если $\sin 7x + \cos 7x = 0$

$$\tan 7x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{28} \pi + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или $\sin 7x - \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x = 0$

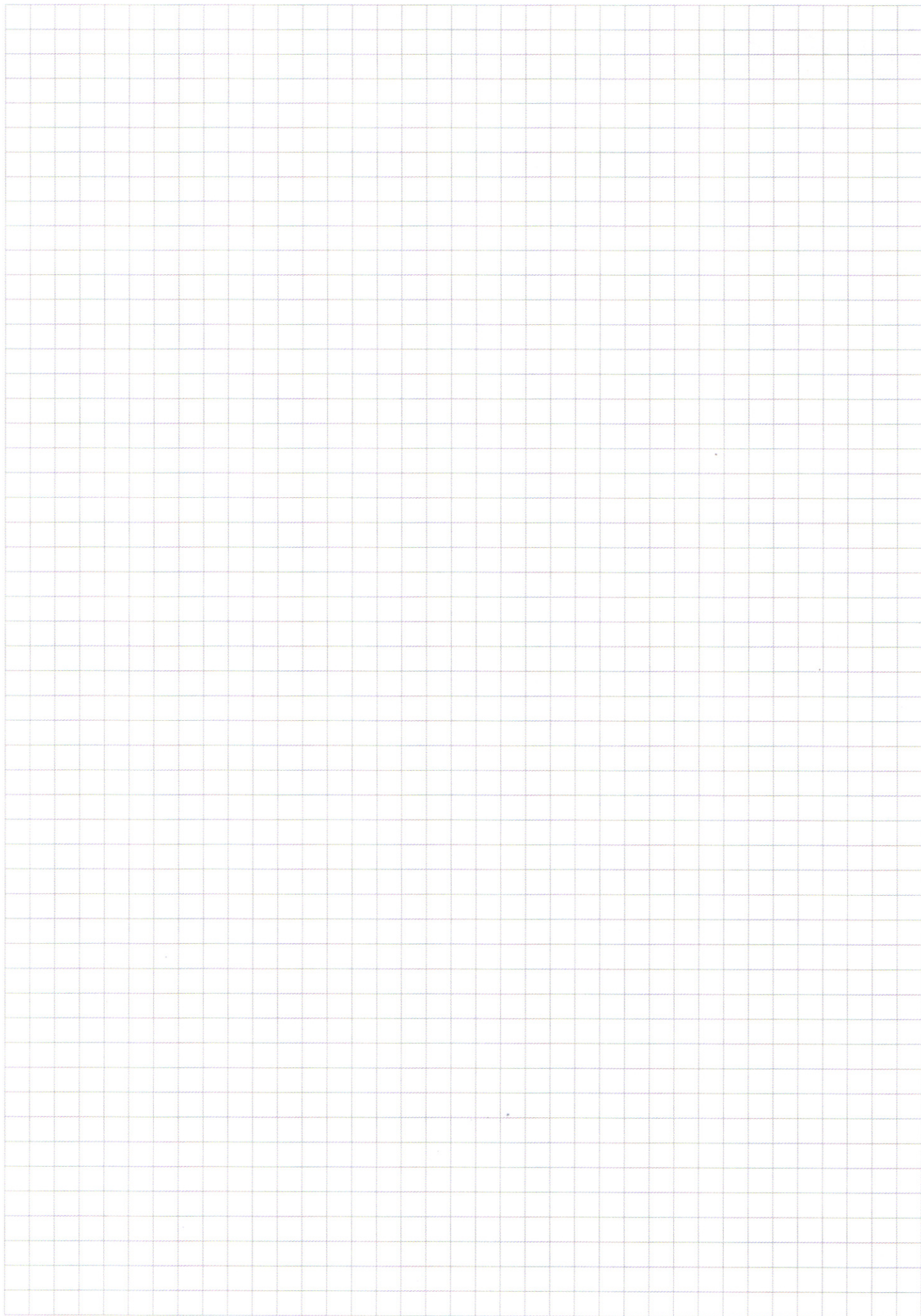
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = -\sin 4x = \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 4x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + 7x = \frac{5}{2}\pi + 4x + 2\pi k \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{4} + 7x = -\frac{5}{2}\pi - 4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{9}{43} \pi + \frac{2}{3} \pi k$$

$$\text{или} \quad x = \frac{2}{11} \pi k - \frac{11}{4} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{3}{28} \pi + \frac{\pi}{7} \pi k$; $\frac{3}{4} \pi + \frac{2}{3} \pi k$; $\frac{2}{11} \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$



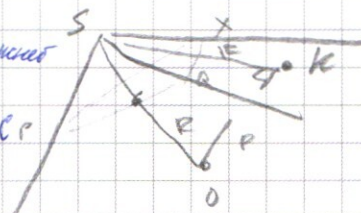
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

Пусть радиус сферы $= R$, т. пер. ближайшей к S плоскости $\perp SO$ и кас. сферой к ребрам угла PQX . Второго - $ABCS$ и пер. этих пл-ей к SO - D, Z .



$(PQX) \parallel (ABCS)$ (они $\perp$ плоскости)

$\Rightarrow PQS \sim ABS, SQX \sim SBC, SPX \sim SAC$ и коэф. подобия одинаковы $(\frac{SQ}{SB})$

$\Rightarrow \triangle PQX \sim \triangle ABC \quad k = \frac{1}{2}$ (из их площадей) $\Rightarrow 2SD = SZ = SD + 2R$

$\Rightarrow SD = 2R \Rightarrow \angle KSO = \arcsin(\frac{1}{3}) \quad (\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R}) \Rightarrow SK = \sqrt{8}R$

(по теор. Пиф.) $= SL = SM \Rightarrow (MLK) \parallel (ABC) \parallel (PQX)$ (т.к. это пл-и пер.

пер. окруж. сфер с центрами S и O и радиусами $\sqrt{8}R$ и R . Пусть

F т. пер. SK и $QX \quad SK : SF = SO : SD = \frac{3}{2} \Rightarrow 2SK = 3SF$. Пусть

т. пер. (KLM) к ребрам угла $ENY \Rightarrow \triangle PQX \sim \triangle ENY \quad k_2 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ площадь сечения KML угла $S = \frac{9}{4} S_{PQX} = \frac{9}{4}$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}; \frac{9}{4}$

№ 5. $|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$

$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a$

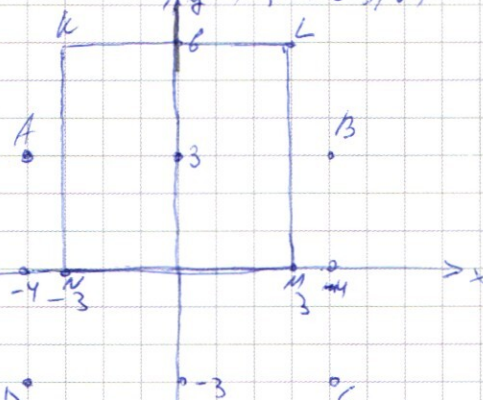
Нарисуем мн-во решений 1 ур. на мн-ги xOy :
это квадрат со ст. 6 и вершинами $(-3, 6), (3, 6), (3, 0), (-3, 0)$

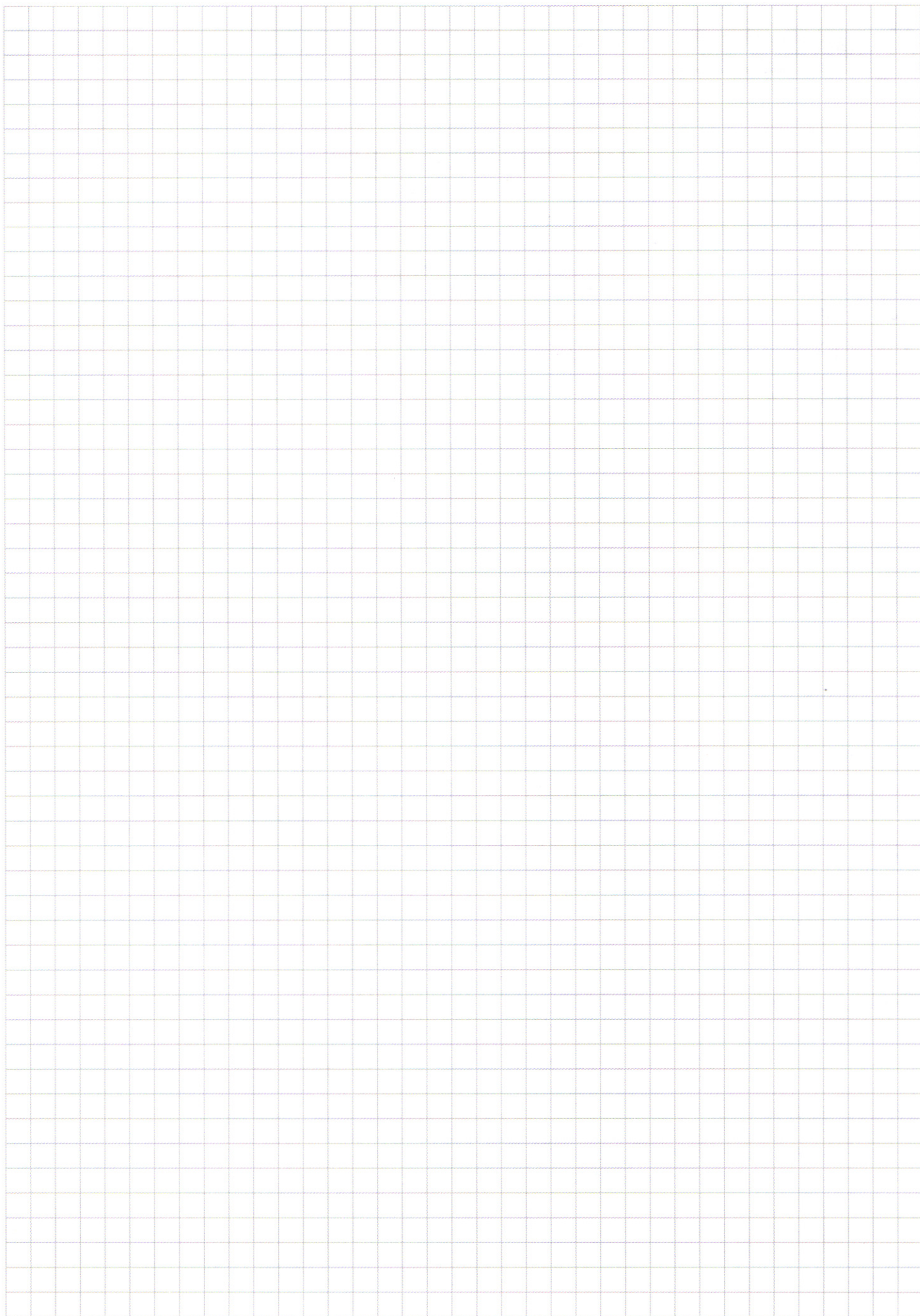
Мн-во решений второго ур-ния это
4 окр-ти со ст. 1 и центрами $A(-4, 3), B(4, 3), C(4, -3), D(-4, -3)$ и ради-

усом $\sqrt{a}$ (или только A, B, C, D если $a = 0$)

Если $\sqrt{a} < 1$, все окр-ти лежат
вне квадрата $\Rightarrow 0$ решений

2) Если $\sqrt{a} = 1$, окр-ти со ст. A и B
касаются квадрата снаружи, а
другие окр-ти лежат вне квадрата $\Rightarrow 2$ реш.





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Если $a \in (1, 25)$ окр-ти из A и B имеют по 2 общих т. с квадратом $\Rightarrow$ решений ≥ 4 (точки пер. не совпадают, т.к. две окр-ти с центрами в этих точках ^{A и B} пересекаются на прямой Oy)
 $\Rightarrow$ точки пер. в квадрате должны исходить по две, чтобы совпасть

4) Если $a = 25$, окр-ти A и B пересекаются между собой и с квадратом в 2х точках $(0, 5)$ и $(10, 0)$. окр-ти из C и D пересекают кв. в других точках (т.к. $\sqrt{a} > 10$ окр-ти пер. $\square$, а радиус C и D $\sqrt{0, 0} \neq 5$)
 $\Rightarrow$ корней > 2

5) Если $a > 58$, окр-ти A и B не пер. кв. Если a при этом < 130 окр-ти C и D пер. кв. Более чем в 1 точке $\Rightarrow$ реш. > 2 (окр-ти из C и D пересекаются друг с другом на пр. Oy или Ox) $\Rightarrow$ корней не менее 3.

6) Если $a = 130$ 2 реш. $(-3, 6)$ и $(3, 6)$

7) Если $a > 130$, окр-ти не пересекают квадрата $\Rightarrow$ 0 реш.

Ответ:

Ответ: 130, 1.

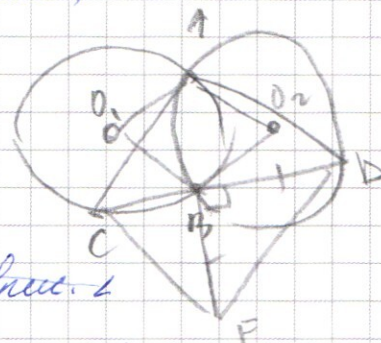
8 в.

а) Пусть $\angle BCA = \angle$, тогда $\angle ABC = 30^\circ$ (прям. $\triangle$)

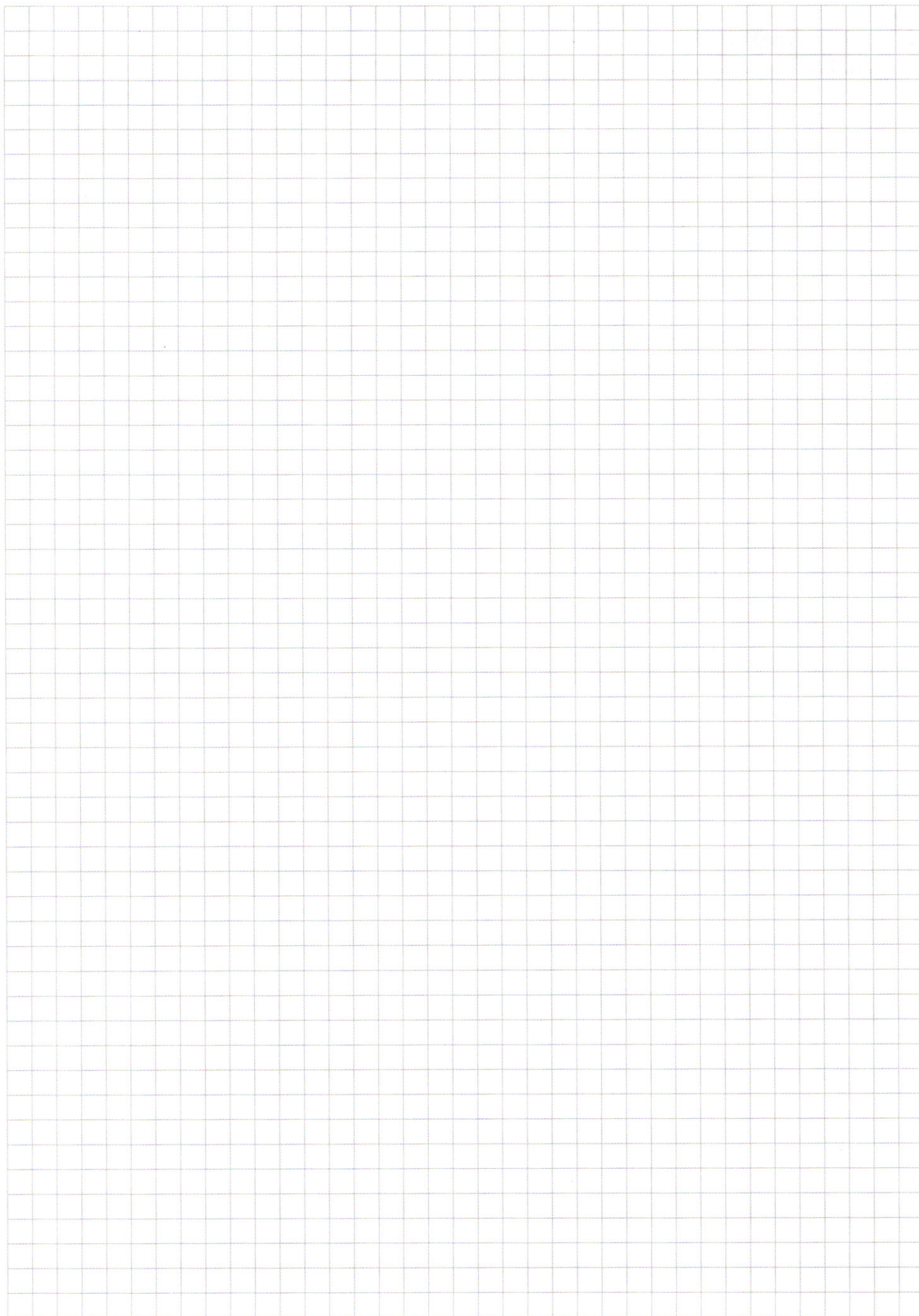
$\Rightarrow \angle AOB = 2\angle$ (внеш. угол), $\angle AOB = 130 - 2\angle$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB$ (по сим. огн. ^{AB} ~~O_1, O_2~~)

$\Rightarrow \angle = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$



$\angle ABC = \angle ABD$ или $\angle ABC = 130^\circ - \angle ABD$ (внеш. $\angle$ опирается на равные хорды в равных окр-тах)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

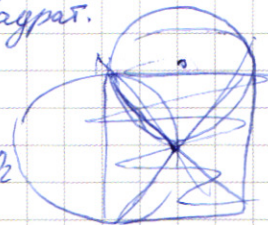
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

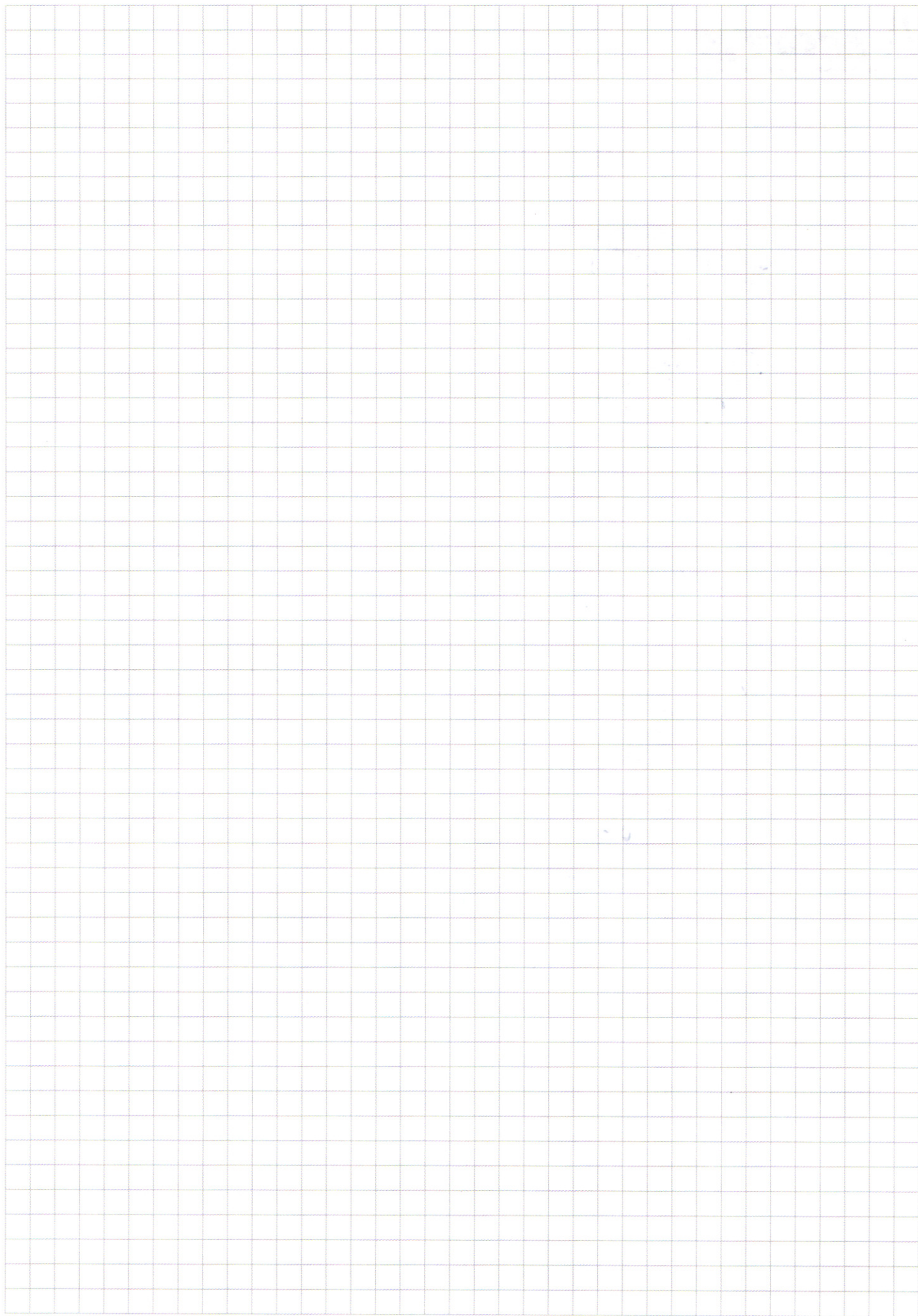
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Если $\angle ABC = \angle ABD$, то $\angle ABC = 90^\circ$ ($2\angle ABC = 180^\circ$) $\Rightarrow ABFC$ ромб
 $\Rightarrow \angle CAF = \angle AFC = 45^\circ \Rightarrow CF = CA \Rightarrow ADF$ — квадрат.
 $AD: \sin 90^\circ = 10 \Rightarrow AD = 10 = CF$

Если $\angle ABE \neq \angle ABD$, $\angle AOB = 90^\circ = \angle AOB_1 = \angle O, AO_2$
 $= \angle O, BO_2 \Rightarrow AOB_2$ — квадрат





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 1 \ 5 \\ 6 \ 7 \ 5 \ 1 \ 5 \\ 2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \\ 4 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 1 \ 5 \\ 6 \ 7 \ 5 \ 1 \ 5 \\ 1 \ 3 \ 5 \ 5 \ 3 \\ 2 \ 7 \ 3 \end{array}$$

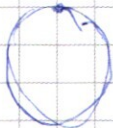
$$\begin{array}{ccccccc} 3 & . & 5 & 5 & 5 & . & 3 \ 3 & . & 1 \ 1 \\ & & & & & & 2 & & \\ \hline 8 & . & 7 & . & 6 & . & 5 & . & 4 & . & 3 & . & 2 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{4x}{2} + 2 \sin \frac{14x}{2} \cos \frac{4x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \sin \frac{14x}{2} \cos \frac{14x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$



$$(\sin 7x + \cos 7x)(\sin 7x - \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x = 1 - 2 \sin 7x \cos 7x = 2 \sin^2 4x$$



$$\cos 3x (\sqrt{2} \cos 11x + 1)$$

$$1 - \sin 14x = 2 \sin^2 4x \quad 2 - 2 \cos^2 4x = 1 - \sin 14x$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} + 4x \sin$$

$$\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - 14x}{2} \cos \frac{\pi + 14x}{2} = \sin^2 4x$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin 11x - \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \frac{1}{2} - \sin 7x \cos 8x = \sin^2 4x$$

$$\sin 3x - \frac{\pi}{4} + \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{14x}{2} \cos \frac{14x - \pi}{2} = \cos 14x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x+y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x^2 + 3y + 4y =$$

$$y^2 \left(\frac{\log x}{\log 10} - 1 \right) = x$$

$$(x+y)^2 - 12y + 3 = 4x + 9$$

$$(x+3y-3)(x-y+3) = 4x+9$$

$$y^2 \lg x \left(\frac{\log x}{\log 10} - 1 \right) = \frac{1 - \log x}{\log 10} \frac{y^2 \lg x}{x} = 0$$

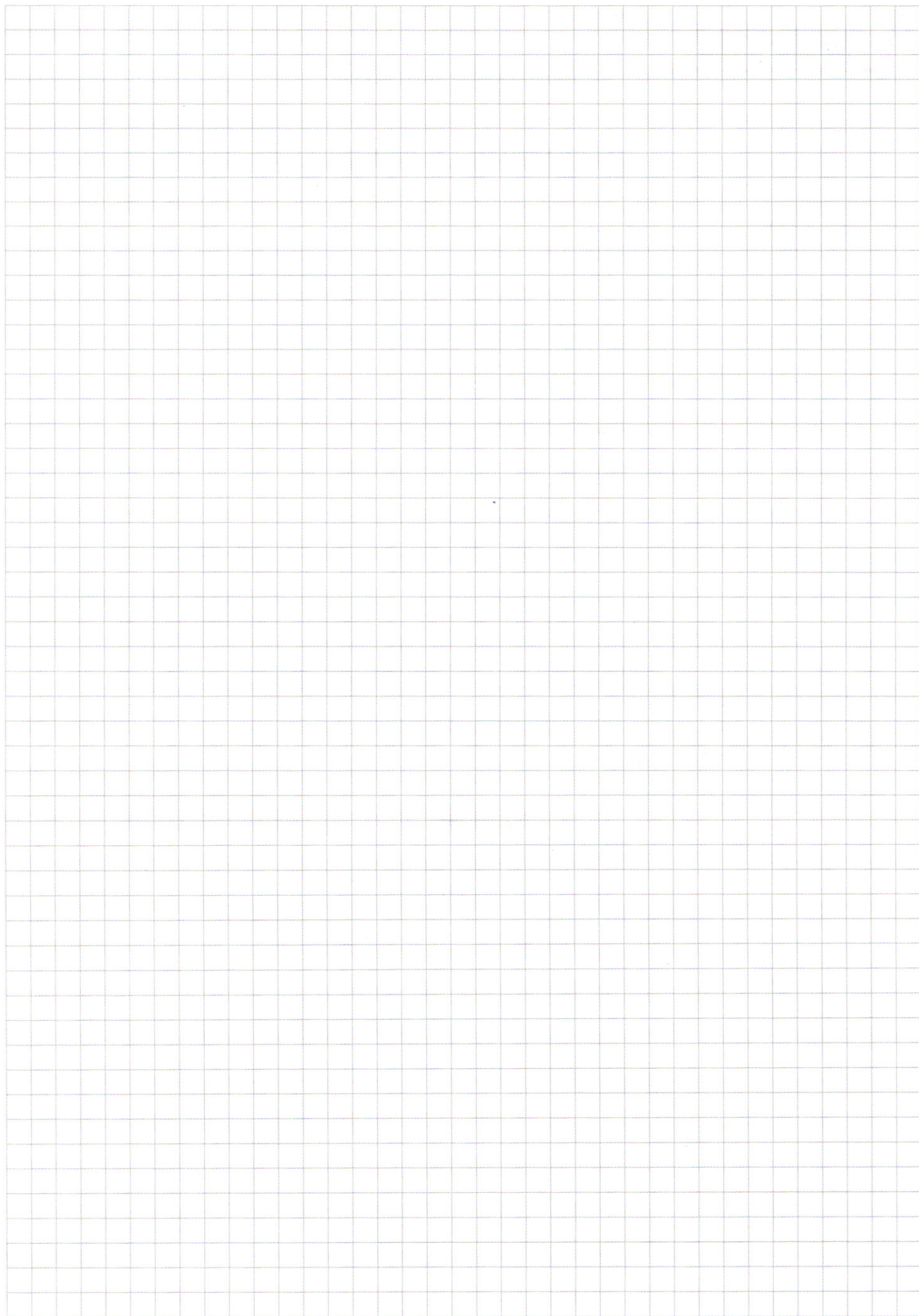
$$\frac{y^{2 \lg x} \cdot y^{3 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg x}$$

$$y^{2 \lg x} - 2 \lg y = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg x^3} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^2}{y^2}} = x$$

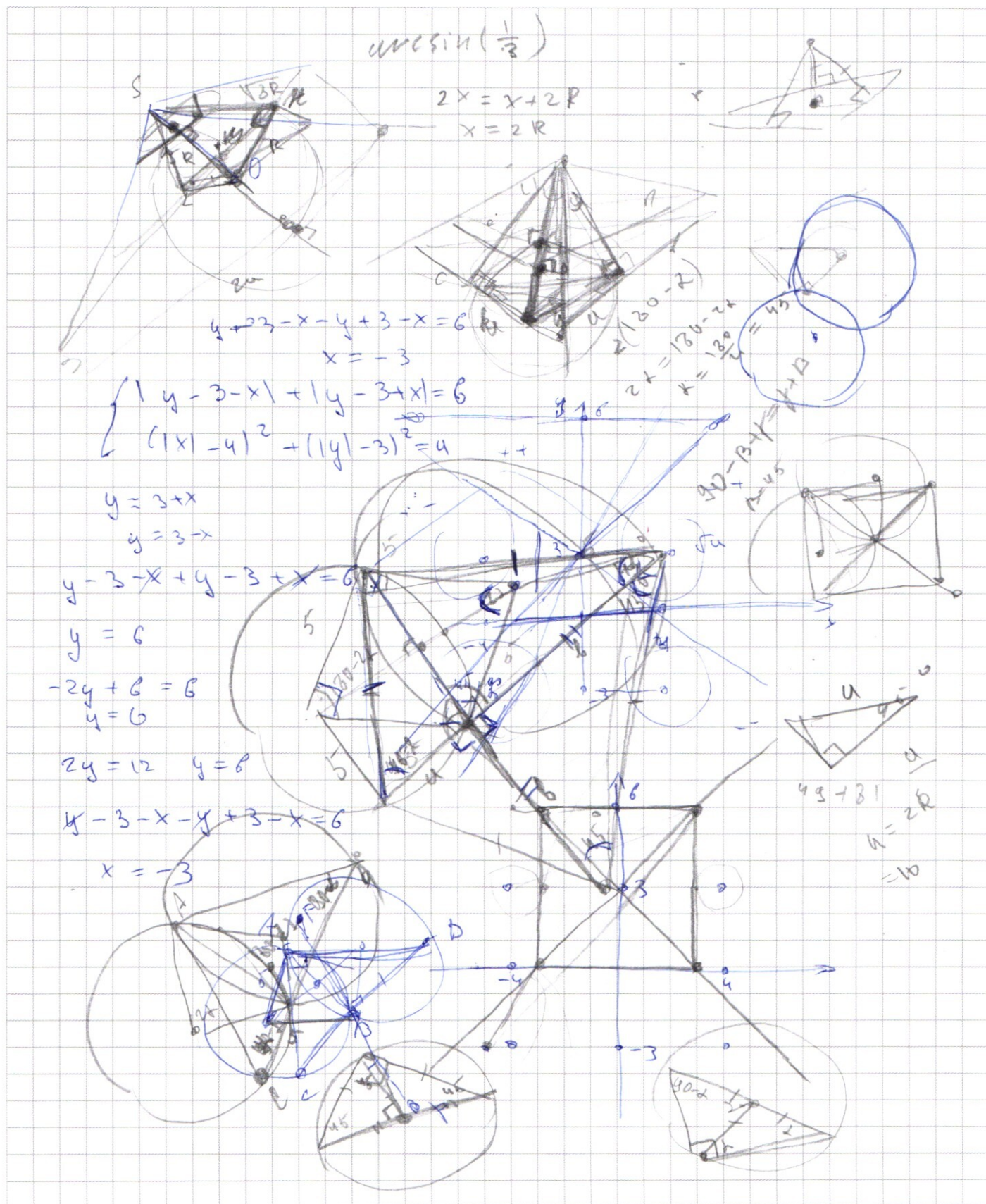
$$y^{2 \lg \frac{x}{y}} = x$$

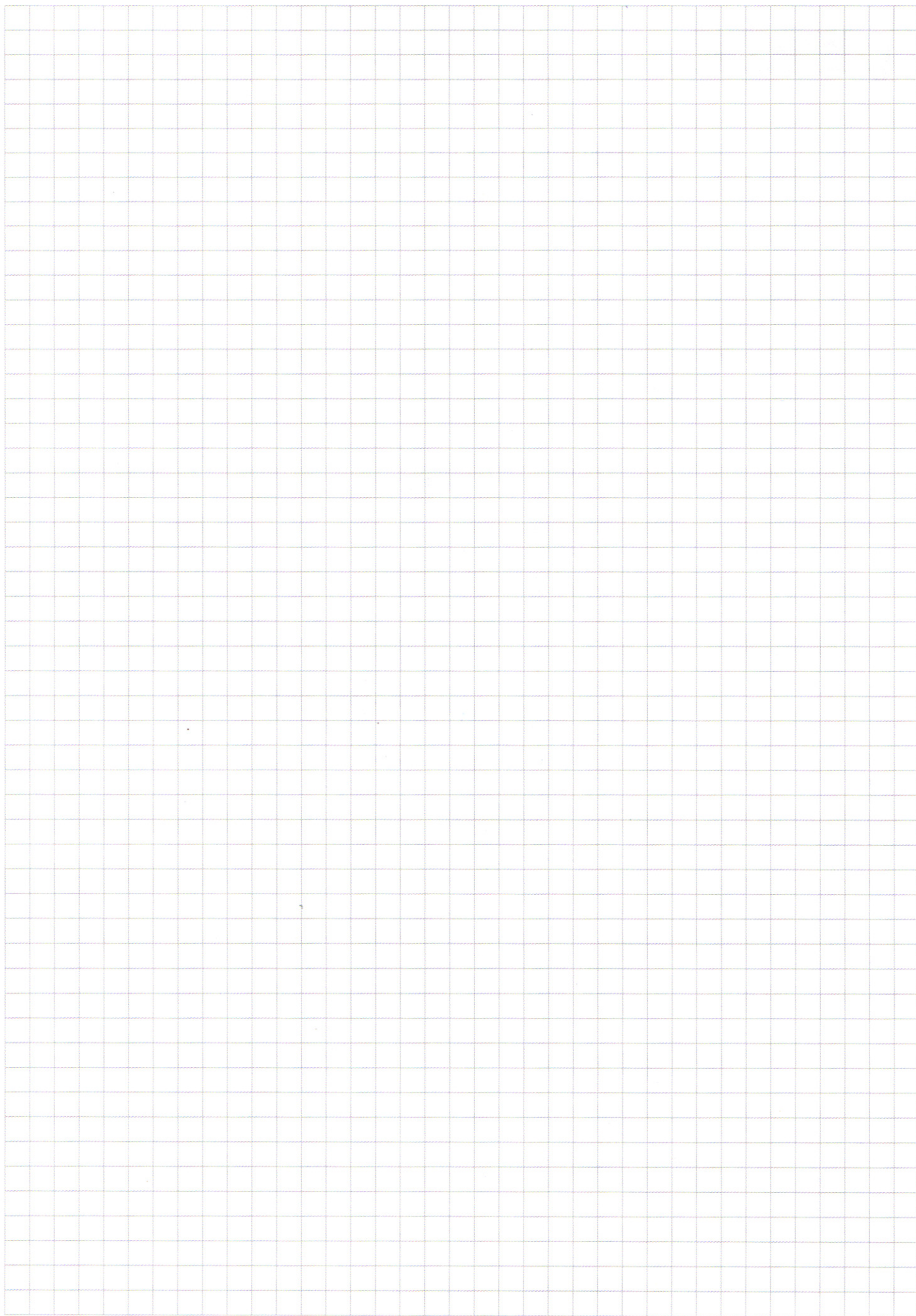


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)