

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$3375 = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3$$

⇒ число цифр среди 6 цифр числа должно быть 3 или 6
цифры 5, и три цифры 3; либо три цифры 5 и, одна
цифра 3 и одна цифра 3. Среди цифр не могут
быть 0 и цифры, кроме 1, 3, 5, 9, т.к. при этом в произведе-
нии будут другие простые множители.

кол-во чисел для 1 варианта: $\binom{3}{8} \cdot \binom{3}{5}$

кол-во чисел для 2 варианта: $\binom{3}{8} \cdot \binom{1}{5} \cdot \binom{1}{4}$

(и оставшиеся места заполняют единицы)

⇒ всего будет $\binom{3}{8} \cdot \binom{3}{5} + \binom{3}{8} \cdot \binom{1}{5} \cdot \binom{1}{4} =$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 1660$$

Ответ: 1660

№ 3

Рассмотрим уравнение: $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

Заметим, что $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y =$

$$= (x+y-4)(x-3y) = 0 \Rightarrow 1) x+y=4 \quad 2) x=3y$$

$$\text{и если } x=3y \Rightarrow \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\log_{10} 3y} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\log_{10} 3y} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{10} 3y^2} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\log_{10} 3y^2}{\log_{10} 3y^2}} = y^2 \Rightarrow \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{10} 3y^2} = y^2 \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ при 1) возможно $|x| \leq 3 \Rightarrow$ м.к. во 2 уравнении

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 0 \text{ — это значит, что } y_1 = 0, y_2 = 6$$

$(|y| - 3)^2$ принимает значение 9 $\Rightarrow$ чтобы было 2 решения, нужно, чтобы $x = 0$, и.к. иначе $|x|$ и $-|x|$ будут негодными по y_1 и y_2 (будет 4 решения) $\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow a = (0-4)^2 + 9 = 25$ (при $a=25$ и 1 наименьшее будет 2 решения)

2) Выходит: $|y-3-x|$ и $|y-3+x|$ имеют ~~значения~~ разные

знак :  $\Rightarrow$ м.к. от 0 размечается на 2 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2|x| = 6, |x| = 3$.

$$x_2 = -2 \Rightarrow y - 3 - 3 \leq 0, y - 3 + 3 \geq 0 \Rightarrow y \leq 6, y \geq 0$$

во 2 варианте если $\text{подсудим} \neq \text{подсудим} - \text{н} =$

$\Rightarrow$ для n всегда решение

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = (3-4)^2 + (|y|-3)^2 = 1 + (|y|-3)^2 \quad y \in [0, 6] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = y \Rightarrow (y-3)^2 = a-1 \Rightarrow y-3 = \pm \sqrt{a-1} \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{a-1} \Rightarrow$$

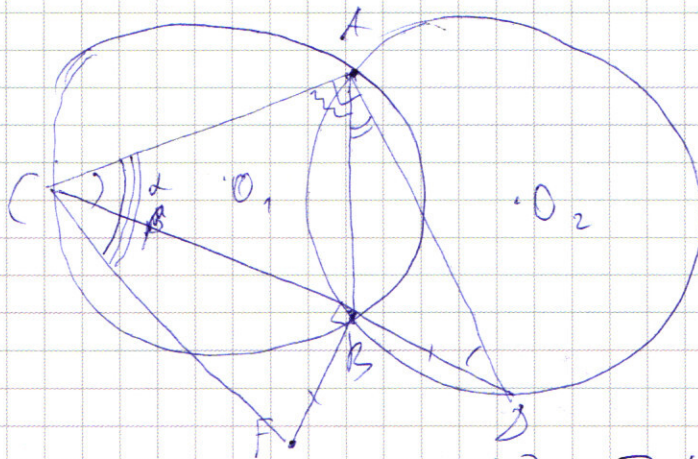
$\Rightarrow$ чтобы было решение, необходимо: $y_1 = y_2 = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 1$ ~~и~~, при остальных a решение либо не будет,

либо будет подходить 1), или 2) вариант, и появится
и решение

Ans: $Q_1 = 1, Q_2 = 25$

н 6



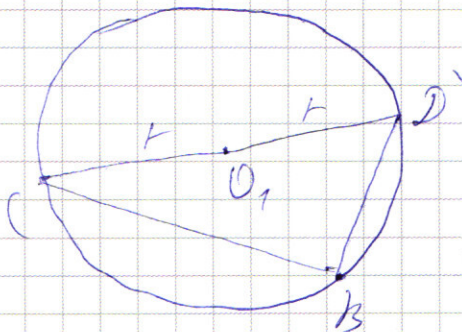
т.к. окруж. одинак. $\Rightarrow \widehat{AB}(1) = \widehat{AB}(2)$ для каждой окр.

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$, т.к. опираются на одинак. дуги.

$\Rightarrow$ т.к. $\triangle ACD$ - прямой $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADB (= 45)$

$\angle ACB + \angle CBD = 90 \Rightarrow$ т.к. окр. равны, то $\widehat{CB} + \widehat{BD} = 180$

опишем D' на 1 окр. так, что $\widehat{BD'} = \widehat{BD}$:



Запишем, что $\widehat{BD'} = \widehat{BD} \Rightarrow$ если $\angle C = x$ и $\angle B D' = y$, то
 $x^2 + y^2 = (2R)^2 = 100$, а $\triangle CBF = \triangle CBD'$ (CB - общ., $\widehat{BD'} = \widehat{BD} =$
 $= \widehat{BF}$, $\angle CBD' = \angle CBF = 90$) $\Rightarrow CF = CD' = 2R = 10$

а) $BC = 6 \Rightarrow BD' = BF = BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow CD = 6 + 8 = 14$

$CD = \sqrt{2} \cdot CA$ ($CA = AD$, $\angle CAD = 90$) $\Rightarrow CA = \frac{14}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot 7$

$S_{\triangle CAF} = \frac{CA \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7 \cdot 10}{2} \sin 2(\angle ACF = 45)$

$= 35\sqrt{2} \cdot \sin(45 + \angle BCF)$ и $\sin \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 35\sqrt{2} \sin(45 + \arcsin \frac{4}{5})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 4

Заметим что так как $2^n + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для ~~каждого~~ ^{каждого} ~~и~~ ^{то} ~~то~~ ^{то} $70 + (2^{64} - 1)n \geq 2^n + 3 \cdot 2^{65}$

кол-во вариантов y будет: $70 + (2^{64} - 1)n - 2^n + 3 \cdot 2^{65}$

$$\text{при } n = 6: 2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 6 \cdot 2^{64} + 64$$

$$70 + (2^{64} - 1)n \cdot 6 = 6 \cdot 2^{64} + 70 - 6 = 6 \cdot 2^{64} + 64$$

Будем говорить, что $2^n + 3 \cdot 2^{65} = a$, $70 + (2^{64} - 1)n = b$

$\Rightarrow$ при $n = 6$ $a = 6$, при $n \leq 6$ $a > 6$

при $n \geq 70$: $a = 2^{70} + 6 \cdot 2^{64}$, $b = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 70 =$

$$= 70 + 70 \cdot 2^{64} - 70 = 70 \cdot 2^{64}, \quad a = 2^{70} + 6 \cdot 2^{64} =$$

$$= 2^6 \cdot 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} = (6 + 2^6) \cdot 2^{64} = (6 + 64) \cdot 2^{64} = 70 \cdot 2^{64} =$$

$\Rightarrow$ при $n = 70$ $a = 6$, при $n > 70$ $a > 6$

$\Rightarrow$ при $n \in [6; 70]$ будет выполняться $a \leq b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомый ответ будет сумма разностей ~~а(х)~~

$b(n) - a(n)$ для всех $n \in [6; 70]$. Найдем сумму ^{всех} $b(n)$ для

$n \in [6; 70]$ и сумму всех $a(n)$ для $n \in [6; 70] \Rightarrow$ искомый

ответ будет $\text{sum}(b) - \text{sum}(a)$ ($\text{sum}(b)$, $\text{sum}(a)$ — суммы

— суммы отнесенные к ним)

$$\text{sum}(b) = 70 \cdot (70 - 6 + 1) \cdot 65 + (2^{64} - 1) \cdot (6 + 7 + \dots + 70) =$$

$$= 70 \cdot 65 + (2^{64} - 1) \cdot \frac{76 \cdot 65}{2}$$

$$\text{sum}(a) = 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{70} \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{70} = 2^{71} - 1)$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^5 = 2^6 - 1 \Rightarrow \text{sum}(a) = 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 + 2^{71} - 1 - 2^6 + 1 =$$

$$= 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 + 2^{71} - 2^6$$

$$\Rightarrow \text{аналогично} \text{ } \text{sum}(b) - \text{sum}(a) =$$

$$= 70 \cdot 65 + (2^{64} - 1) \cdot \frac{76 \cdot 65}{2} - 3 \cdot 2^{65} - 2^{71} + 2^6$$

$$= 4550 + 2^{64} \cdot 2470 - 2470 - 6 \cdot 2^{64} - 2^7 \cdot 2^{64} + 64 =$$

$$= (4550 - 2470 + 64) + 2^{64} \cdot (2470 - 6 - 128) =$$

$$= 2080 + 2^{64} \cdot 2336$$

$$\text{Ответ: } 2080 + 2^{64} \cdot 2336$$

$$2|y-3| = 6$$

$$y_1 = 0$$

$$|y-3| = 3$$

$$y_2 = 6$$

$$|x| = 4$$

$$|y| = 3$$

$$2|x| =$$

$$|x| = 3$$

$$2|x| = 6$$

$$|x| = 3$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y-3-3 \leq 0$$

$$y \leq 6$$

$$y \in [0; 6]$$

$$y-3+3 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$1 + (y-3)^2 = a$$

$$(y-3)^2 \in [0; 9] \Rightarrow a \in [1; 10] \Rightarrow 2$$

$$16 + 9 = 25$$

$$a \in [10; 25] \Rightarrow 2$$

$$a = 25 \Rightarrow 2$$

$$-5 + |x| < 0$$

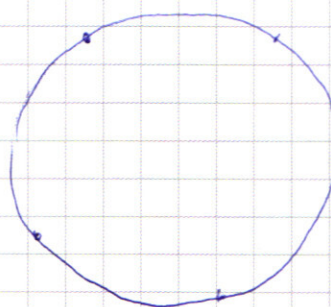
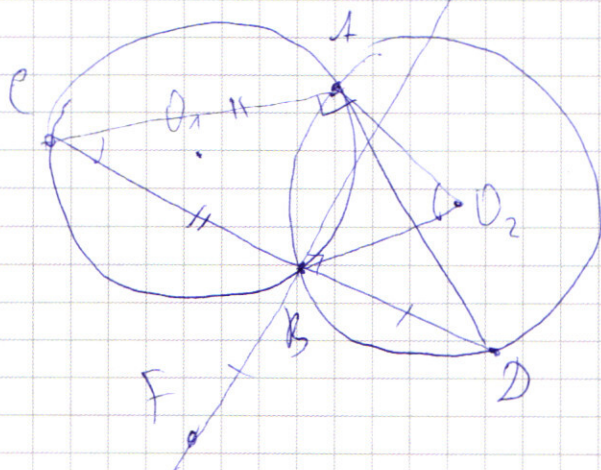
$$|x| < 5$$

$$-6 \quad 0$$

$$-5 \quad 1$$

$$y \in [0; 6]$$

$$(y-3)^2 = a$$



$$\begin{array}{r} 1120 \\ - 560 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$560 \cdot 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\log_{10} 3y} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\log_{10} 9 = \log_{10} 24^2$$

$$\left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{10} 3y^2} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{\log_{10} 3y^2}{\log_{10} 3y^2}} = y^2$$

$$24^{\log_{10} 9} = 9^{\log_{10} 24^2} \cdot \frac{y^3}{y^4}$$

$$\left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3y^2} = y^2$$

$$\left(\frac{y^5}{\pi}\right)^{\log_{10} \pi} = (y^2)^{\log_{10} \pi y}$$

$$\pi^{\log_{10} \frac{y^5}{\pi}} =$$

$$\pi + y = 4$$

$$\left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{3y^2}{3\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{3}^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{y^3}{y-4} = (y^2)^{\log_{y-4} y}$$

$$\frac{3}{3\sqrt{3}}^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$3^{\log_{3y^2} 3} = 1$$

$$\log_{3y^2} 3 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{3y^2} = 3$$

$$3y^2 = 27$$

$$\left(\frac{y^5}{y-4}\right)^{\log_{10} y-4} = (y^2)^{\log_{10} y^2-4y}$$

$$\frac{y^5}{y-4} = (y^2)^{\frac{\log_{10} y^2-4y}{\log_{10} y-4}} = y^{2 \log_{y-4} y^2-4y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{10} 9y^2 = n$$

$$10^n = 9y^2$$

$$\sqrt[n]{9y^2} = 10$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\log_{10} n} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^5}{n}\right)^{\log_{10} n} = (y^2)^{\log_{10} ny}$$

$$\frac{\binom{3}{8} \cdot \binom{3}{5}}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$\left(\frac{y^5}{n}\right)^{\log_{10} n} = y^{2 \log_{10} ny}$$

$$n^2 - 2ny - 4n - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(n+y+4)(n+3y) = 0$$

$$n^2 + ny - 4n - 3ny - 3y^2 + 12y =$$

$$= n^2 - 2ny - 4n + 12y - 3y^2$$

$$\log_{10} 9y^2 = \frac{1}{3} \cdot 1, 3, 7$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\log_{10} 9y^2 = \frac{1}{3} \cdot 1, 3, 7$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ -5 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$24 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 8 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 =$$

$$= 15^3 \quad 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10 =$$

$$1, 3, 5 \quad = 56$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$1) n+y=4$$

$$2) n=3y$$

$$\left(\frac{y^3}{n}\right)^{\frac{1}{\log_{10} 10}} = (y^2)^{\frac{1}{\log_{10} 10}}$$

$$27 \log_{10} 9 = 9 \log_{10} 27$$

$$n = 3y$$

$$3 \log_{10} 9 = \log_{10} 27$$

$$n + y = 4$$

$$n = 3y$$

$$\log_{10} 9^3 = \log_{10} 27$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\log_{10} 3y} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$n = 9$$

$$3 \log_{10} 9 = 9 \log_{10} 27$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{10} 3y^2} = (y^2)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$y^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{10} 3y^2}$$

$$\frac{\log_{10} 3y^2}{\log_{10} 3y^2} = \log_{3y^2} 3y^2 = \log_2 4$$

$$\log_{3y^2} 3y^2 = \log_{3y^2} 2^{3y^2} + \log_{3y^2} 2^3 = 1 + \log_{3y^2} 2^3$$

$$y^2 = \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3y^2} = \frac{y^2 \log_{3y^2} 3y^2}{\sqrt{3} \log_{3y^2} 3y^2}$$

$$(3\sqrt{3})^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3y^2 - 1} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\log_{3y^2} 3 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{10} 3} = 1$$

$$\left(\frac{3y^2}{3\sqrt{3}}\right)^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{3y^2} = 3$$

$$(3\sqrt{3})^{\log_{3y^2} 3} = \sqrt{3}$$

$$3y^2 = 27$$

$$y^2 = 9 \quad y = 3$$

$$\begin{array}{r}
 65 \\
 + 70 \\
 \hline
 4550 \\
 - 2470 \\
 \hline
 2080
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 76 \\
 + 69 \\
 \hline
 38 \\
 \hline
 520 \\
 + 135 \\
 \hline
 2470 \\
 - 134 \\
 \hline
 2336
 \end{array}$$

134

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 6 \cdot 2^{64} + 2^{66} \cdot 2^{64} = 2^{64} \cdot (6 + 2^{14})$$

$$x \in [6; 70] \quad -65$$

$$70 \cdot 65 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 65 = (70 - 3 \cdot 2^{65}) \cdot 65$$

$$2^6 + 2^7 + \dots + 2^{70} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{70} - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^5)$$

$$(2^{71} - 1) - (2^6 - 1) = 2^{71} - 2^6$$

$$6 + 7 + \dots + 70 = \frac{76 \cdot 65}{2}$$

$$70 \cdot 65 + \frac{76 \cdot 65}{2} \cdot 2^{64} - 2^{71} + 2^6 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 65$$

$$4550 + 2470 \cdot 2^{64} - 2^{71} + 64 - 390 \cdot 2^{64} =$$

$$= 4550 + (2470 - 128 - 390) \cdot 2^{64}$$

$$4614 + 1052 \cdot 2^{64}$$

38

65
- 38

520

195

2470

65
+ 70

4550
+ 2470

7020

390
+ 128

518

2470
- 390

2080

65
- 6

390

2470
- 518

1952

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

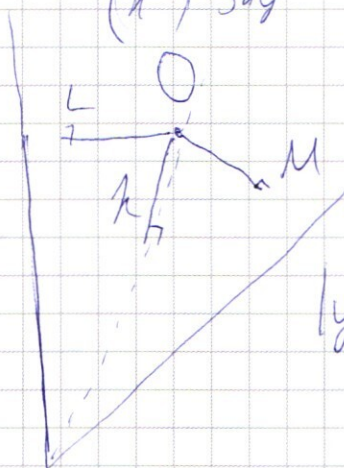
$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log_{xy} x} = y^2$$

$$\left(\frac{x^5 \cdot y^5}{x^6}\right)^{\log_{xy} x} = y^2$$

$$\frac{x^5}{(x^6)^{\log_{xy} x}} = y^2$$

$$(2^4)^{\log_{10} 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{10} 4}$$

$$\log_{10} 2^4 = \log_{10} 4^2$$



$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$16 \quad a \in [10; 25] - 2$$

$$a = 25 - 1$$

$$S \quad |2y-6|=6$$

$$2y-6=6$$

$$2y-6=-6$$

$$y=6$$

$$\text{or } y=0$$

$$|x| \leq 3$$

$$a \in [10; 25]$$

$$(|x|-4)^2 + 9 = a$$

$$4 + \sqrt{a-9} \leq 3$$

$$|x|-4 = \sqrt{a-9}$$

$$a \geq 9 \quad (|x|-4)^2 \in [0; 16]$$

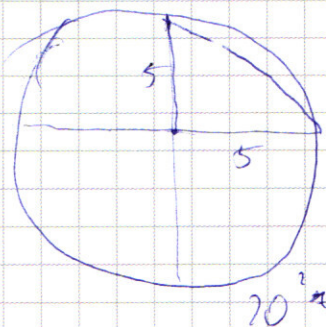
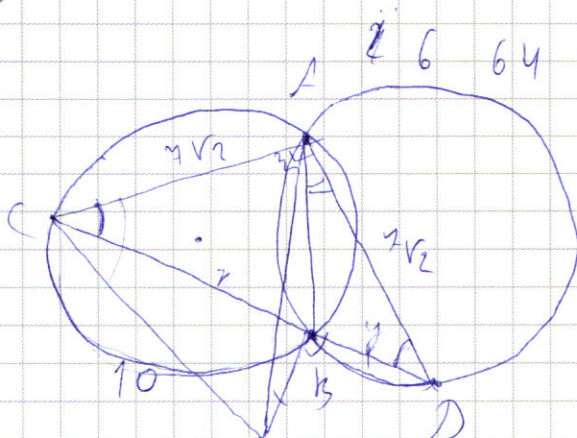
$$|x| = 4 + \sqrt{a-9}$$

2

$$n = 70$$

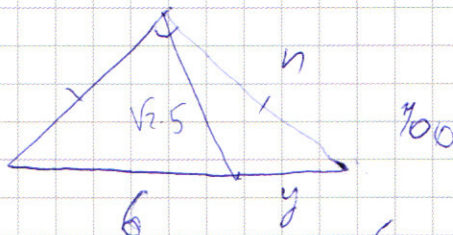
$$u = 72$$

$$V_2 \leftarrow$$



$$F \quad x^2 + y^2$$

$x = 6$



$$100 = 36 + y^2$$

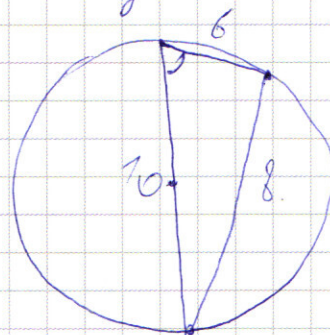
$$y^2 = 64$$

$$y = 2$$

$$A \cdot (F \cdot \sin p)$$

2

5



$$\sqrt{2}h = 6 + y$$

$$\sqrt{2}u = 14$$

$$\left(s = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(45^\circ + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) \right) \quad h = 7\sqrt{2}$$

$$y > 3 \cdot 2^{65} + 1$$

$$n \geq 6$$

$$64 + 6.7^{64}$$

$$64 + 6 \cdot 2^{64}$$

4440

$$2^{21} + 3 \cdot 2^{65} = 40 + 2^{64} \cdot 2 - 2$$

$$7^x + 6 \cdot 2^{64} = 70 + 2^{64} \cdot x - x$$

$$2^n + n - 70 = (n-6) \cdot 2^6$$