

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Число 3375 можно представить в виде произведения простых чисел следующим образом: $3375 = 3^3 \cdot 5^3$.

Это значит, что цифры 3 и 5 будут присутствовать в искомого восьмизначного числа, причем и цифра "3", и цифра "5" в таких числах будет 3 штуки.

Очевидно, что число 3375 нельзя иным образом представить в виде простых сомножителей, каждый из которых меньше 10. Итак, искомого числа будут состоять из трех цифр "3" и трех цифр "5", а остальные две цифры будут единицами. Количество таких чисел найдем, используя формулу перестановки с повторениями:

$$n = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{6 \cdot 2} = 40 \cdot 4 = 560.$$

Ответ: 560

② $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg(xy)$

ОДЗ:
 $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 17y > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg(xy)$$

Поскольку $x^{\lg x} \neq 0$ ($x > 0$), то запишем уравнение по $\lg x$:

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg(xy)} \cdot x^{\lg x}$$

Пусть $y \neq 1$ (случай $y = 1$ рассмотрим позже), тогда

$$x^{\lg x} = y^{\log_y x^{\lg x}} = y^{\log_y(x) \cdot \lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg(xy)} \cdot y^{\log_y(x) \cdot \lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x + 2 \lg y + \log_y(x) \cdot \lg x}$$

В силу равенства степеней с одинаковыми основаниями равны степени:

$$5 \lg x = 2 \lg x + 2 \lg y + \log_y(x) \cdot \lg x$$

$$5 \lg x = 2 \lg x + 2 \lg y + \frac{\lg^2 x}{\lg y}$$

Сократим полученное уравнение на $\lg y \neq 0$ ($y \neq 1$):

$$5 \lg x \cdot \lg y = 2 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$$

Решим полученное квадратное относительно $\lg y$ ур-е:

$$D = 9 \lg^2 x - 4 \cdot 2 \cdot \lg^2 x = \lg^2 x$$

$$\lg y = \frac{3 \lg x - \lg x}{4} = \frac{1}{2} \lg x$$

$$\lg y = \frac{3 \lg x + \lg x}{4} = \lg x$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg x \\ \lg y = \frac{1}{2} \lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Рассмотрим случай $y = 1$. Подставив $y = 1$ во второе уравнение, получим:

$$x^2 - 2x - 4x - 3 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Сделаем подстановку $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ в первое ур-е системы

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2 \lg 3 \cdot 1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1 - \text{неверно, т. е. } y \neq 1.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Объединяя найденные решения, окончательно получаем:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 9 \\ y = 3 \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2)$, $(9; 3)$, $(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$

5) Первое уравнение системы описывает квадрат со стороной 4, центр которого находится в точке $P(0; 3)$ являющейся точкой пересечения прямых $y = x + 3$ и $y = 3 - x$. Второе уравнение системы описывает окружности с центрами $O_1(4; 3)$, $O_2(-4; -3)$, $O_3(-4; 3)$, $O_4(4; -3)$. Радиусы всех этих окружностей одинаковы и равны $\sqrt{a}$.

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$(\sin 3x - \cos 3x) - (\sin 11x - \cos 11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

Применим для каждой из скобок формулу дополнительного аргумента:

$$\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 14x)$$

Вернемся к совокупности, полученной ранее

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Положим $y = x$. Подставляя во второе ур-е системы, имеем:

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x(2-x) = 0,$$

Откуда $x = 2$ ($x = 0$ не удовлетворяет ОДЗ), а зна-

чит $y = 2$. Далее рассмотрим случай $y = \sqrt{x}$. Подставляя во второе ур-е системы, получаем:

$$x^2 - 2x\sqrt{x} - 4x - 3x + 12\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{x}^3 - 7x + 12\sqrt{x} = 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{x}$, $t > 0$ (Если $t = 0$, то $x = 0$ - это неверно)

$$t^4 - 2t^3 - 7t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 2t^2 - 7t + 12) = 0.$$

$$\begin{cases} t = 0 - \text{посторонн.} \\ t^3 - 2t^2 - 7t + 12 = 0 \end{cases}$$

$$t^3 - 2t^2 - 7t + 12 = 0$$

Заметим, что $t = 3$ является корнем этого ур-я, тогда:

$$t^3 - 2t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+t-4) = 0.$$

$$\begin{cases} t-3=0 \\ t^2+t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 - \text{посторонн.} \end{cases}$$

Сделаем обратную замену

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1 - 2\sqrt{17} + 17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Объединив все найденные решения получаем:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 9 \\ y = 3 \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \quad | : 2$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x \cdot \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2): \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3): \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(4): \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

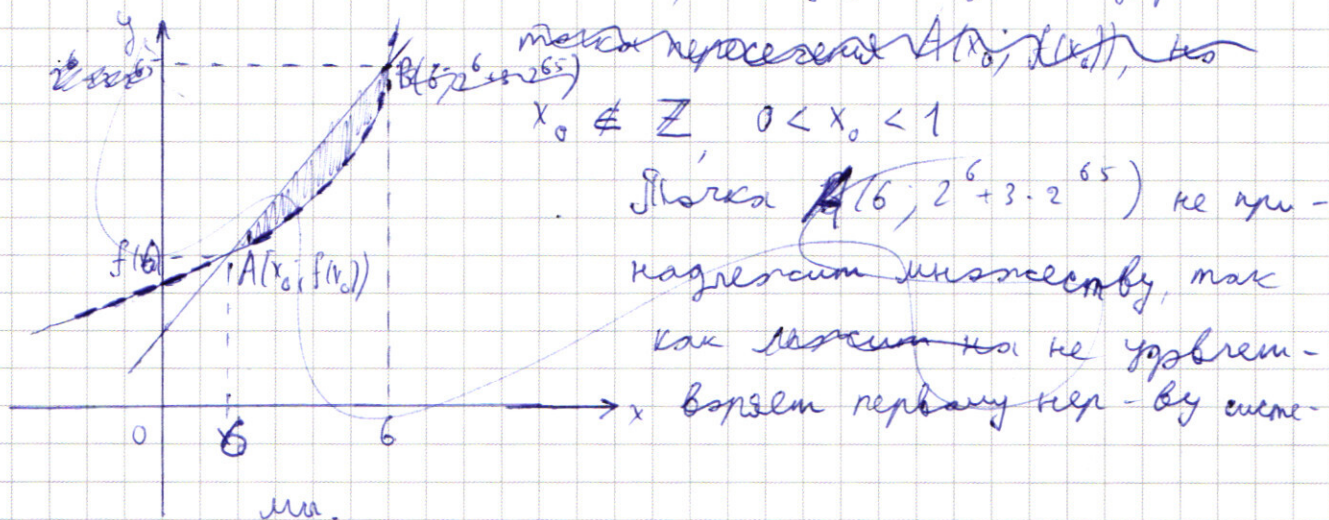
Объединяя все решения, окончательные полуравенства:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{ \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} : k, n \in \mathbb{Z} \right\}$

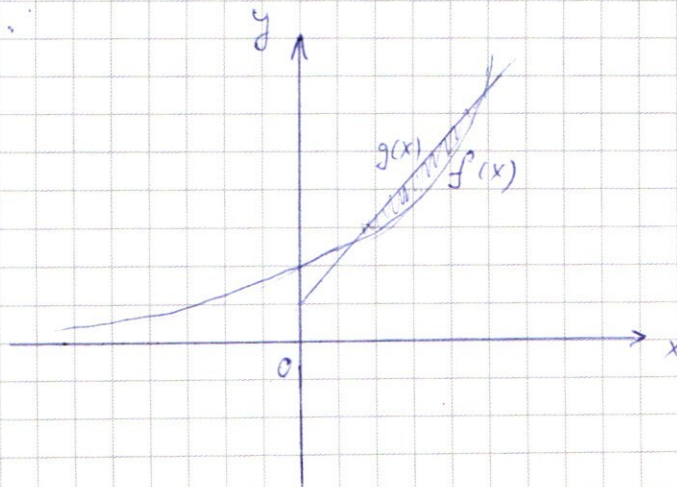
7)
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Данная система описывает множество точек на координатной плоскости Oxy , таких, что все точки этого множества лежат выше графика $ф$ -и $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ и ниже прямой $g(x) = (2^{64} - 1)x + 70$. Заметим, что $f(6) = g(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{65}$. Изобразим (схематично) множество. (Объясним, что существует и другая



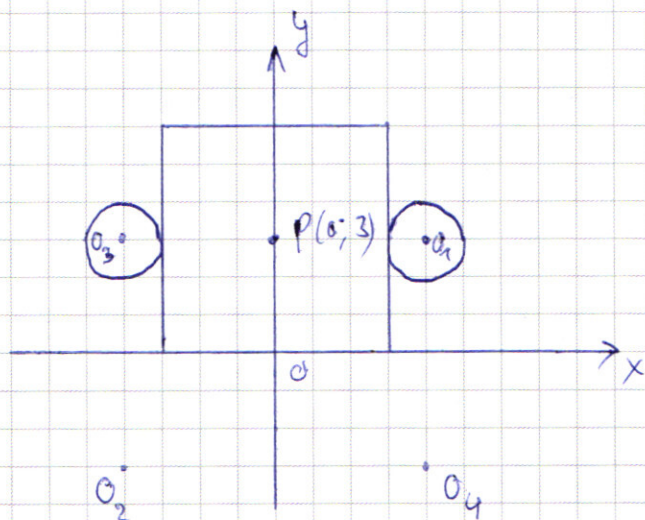
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь отдельно посчитаем количество точек с абсциссами $1, 2, \dots, 5, 6$ нашего множества (все точки с целыми абсциссами явно не принадлежат множеству). При подсчете будем пользоваться следующим фактом: количество целых чисел $s \in [a; b]$ определяется формулой $b - a + 1$. Поскольку все необходимые точки (т.е. принадлежащие множеству) лежат ниже прямой $g(x) = (2^{64} - 1)x + 70$ и выше графика $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$, то нужно подсчитать следующую сумму: $g(1) - f(1) + g(2) - f(2) + g(3) - f(3) + g(4) - f(4) + g(5) - f(5)$. Заметим, что точки, имеющие абсциссу 6 не принадлежат нашему множеству.



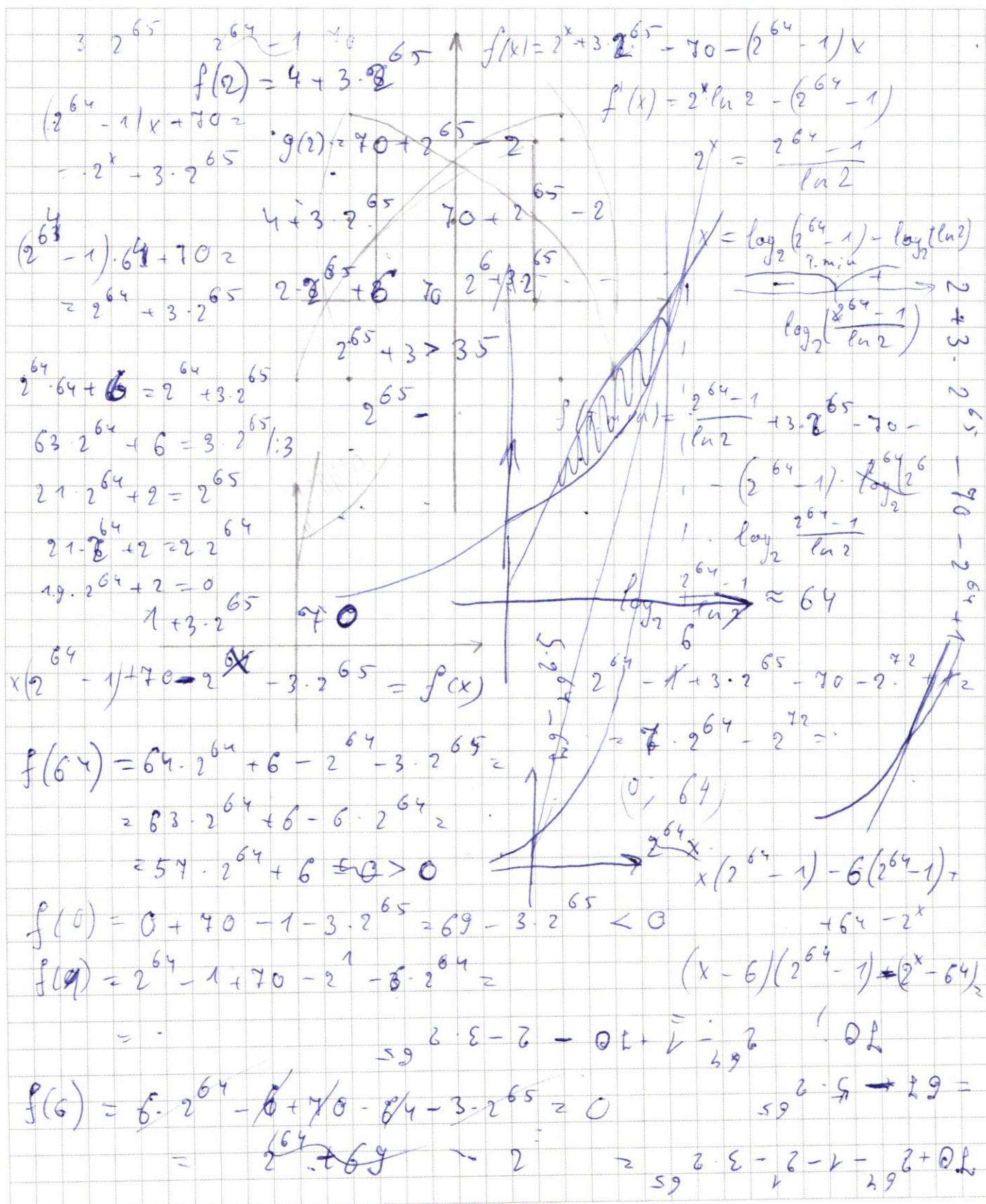
- ⑤ Первое уравнение системы задает на координатной плоскости квадрат со стороной 6, центр которого находится в точке $P(0; 3)$ — точке пересечения

прямые $y = x + 3$ и $y = 3 - x$. Второе уравнение системы задает окружности с центрами $O_1(4; 3)$, $O_2(-4; -3)$, $O_3(-4; 3)$, $O_4(4; -3)$. Радиусы всех этих окружностей одинаковы и равны $\sqrt{a}$.



Заметим, что при $\sqrt{a} = 1$ (т.е. $a = 1$) окружности с центрами O_1 и O_3 касаются сторон квадрата в двух различных точках, а две другие не имеют с квадратом общих точек. При дальнейшем увеличении радиусов окружности будут иметь ^{еще} еще 2 точки пересечения. Из этого значения параметра только $a = 1$.
 Ответ: $a = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1 \quad x^{-\lg x} = 1 \quad x=1$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x + 2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{5\lg x} = y^{\lg y x} \cdot \lg x = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$5\lg x = \lg y x \cdot \lg x + 2\lg x + 2\lg y$$

$$y^{5\lg x} = y^{\lg x^2 + \lg y^2} \cdot y^{\lg y x + \lg x}$$

$$3\lg x = \lg y x \cdot \lg x + 2\lg y$$

$$3\lg^2 x - \lg y - \lg x + 2\lg y \lg x$$

$$5\lg x = 2\lg$$

$$5\lg x = 2\lg x + 2\lg y + \frac{\lg x}{\lg y} \cdot \lg x$$

$$\lg x^3 =$$

$$3\lg y \cdot \lg x = \lg^2 x + 2\lg^2 y$$

$$\lg^2 y - 3\lg y - \lg x + \lg^2 x$$

$$3\lg x \cdot \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3\lg x \cdot \lg y + 2\lg^2 y$$

$$X = 9\lg^2 x - 4\lg^2 x = 5\lg^2 x$$

$$\lg y = \frac{3 \pm \sqrt{5} \lg x}{2}$$

$$x^2 - 2x(y+4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$2\lg^2 y - 3\lg x \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$X = 9\lg^2 x - 8\lg^2 x = \lg^2 x$$

$$\lg y = \frac{3\lg x \pm \lg x}{4} = \frac{1}{2} \lg x$$

$$x^2 - 2x(y+4) - 3y(y+4) = 0$$

$$\Delta = (y+4)^2 + 3y(y+4) = y^2 + 8y + 16 + 3y^2 + 12y = 4y^2 - 4y + 16 =$$

$$2x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x = 4(y^2 - y + 4) > 0$$

$$2x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} - 1$$

$$2(1 + 3 \cdot 2^{64}) \leq$$

$$2 + 6 \cdot 2^{64} \leq 69 + 2^{64}$$

$$1 - 2 - 2 + 12 > 0 \quad 5 \cdot 2^{64} \leq 67 \quad b - 1 + a + 12 \quad x - 2 = 0$$

$$n([a; b]) = n([a; b-1]) + 1 = b - a$$

$$x^2 - 2x\sqrt{x} - 4x - 3x + 12\sqrt{x}$$

$$t^4 - 2t^3 - 7t^2 + 12t = 0$$

$$n([a, b]) = b - a + 1 \quad n([a+1, b]) = b - a + 1 + 1 = b - a + 2$$