

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

"5" не содержится в разложении на простые множители ни одной цифры, кроме собственно "5", поэтому в числе, которое произведение цифр которого равно 3375 должно содержаться три цифры "5".

"3" содержится в разложении цифр 3, 6 и 9, однако в разложении "6" есть 2, которой нет в разложении 3375, поэтому в восьмизначном числе с произведением цифр 3375 могут быть цифры 3 и 9 (и.е. или 3 три тройки, или тройка и девятка).

"4", "2", "7", "8" не могут быть в числе с произведением цифр 3375, т.к. в их разложении есть множители, которых нет в разложении числа 3375.

Получается, что число может состоять из следующих наборов цифр:

5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1 или
Кол-во возможных перестановок:

$$\frac{8!}{3!1!1!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 2 = 1120$$

5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1

Кол-во возможных перестановок:

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$1120 + 560 = 1620 + 60 = 1680$$

Ответ: 1680.

~ 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(2 \sin 4x - \sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)(2 \sin 4x - 2 \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)) = 0$$



$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ 2 \sin 4x - 2 \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin 4x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos \frac{7x - \frac{\pi}{4} + 4x}{2} \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

~ 3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2):

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4xy - 12y^2 + 12y - 4x = 0$$

$$(x - 3y)^2 + 4y(x - 3y) - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x - 3y + 4y - 4) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$



$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Подставим в уравнение (1) $x = 3y$:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$(3^{-1}y^4)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\lg(3^{-1}y^4)^{\lg 3y} = \lg(y^{2 \lg 3y^2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg 3y \cdot \lg(3^{-1}y^4) = 2 \lg 3y^2 \cdot \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y)(4 \lg y - \lg 3) = 2(\lg 3 + 2 \lg y) \lg y$$

Пусть $\lg y = t$; $\lg 3 = m$

$$(t+m)(4t-m) = 2(m+2t)t$$

$$4t^2 - tm + 4tm - m^2 = 2tm + 4t^2$$

$$-m^2 + 3tm - 2tm = 0$$

$$-m^2 + tm = 0$$

$$m^2 - tm = 0$$

$$m(m-t) = 0$$

$$\begin{cases} m=0 \\ m=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg 3 = 0 \text{ (ложно)} \\ \lg y = \lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3$$

$$x = 3y = 3 \cdot 3 = 9$$

Подставим в уравнение (1) $x = 4 - y$

По СЗЗ $x > 0$, тогда $y < 4$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)y} \quad (3)$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = 2 \lg(4-y)y \lg(y^{2 \lg(4-y)y})$$

$$\lg(4-y) \lg((4-y)^{-1}y^5) = 2 \lg(4-y)y \cdot \lg y$$

$$\lg(4-y)(\lg 5 \lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg y \cdot (\lg(4-y) + \lg y)$$

Пусть $\lg(4-y) = u$; $\lg y = v$

$$u(5v - u) = 2v(u + v)$$

$$5uv - u^2 = 2vu + 2v^2$$

$$u^2 - 3vu + 2v^2 = 0$$

Докажем, что $v \neq 0$. Предположим $v = 0$, тогда $y = 1$, подставим это значение в уравнение (3), тогда получим следующее:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2 \lg 3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \text{ (ложно), получаем, что } y = 1 \text{ не удовлетворяет данному уравнению (3), значит } y \neq 1,$$

тогда $V \neq 0 \Leftrightarrow V^2 \neq 0$.

$$u^2 - 3Vu + 2V^2 = 0 \quad | : V^2 \neq 0$$

$$\left(\frac{u}{V}\right)^2 - 3\left(\frac{u}{V}\right) + 2 = 0$$

Пусть $\frac{u}{V} = z$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

По м. Буле

$$z_1 = 1 \quad \text{или} \quad z_2 = 2$$

$$\frac{u}{V} = 1$$

$$\frac{u}{V} = 2$$

$$u = V$$

$$u = 2V$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2$$

$$4-y = y$$

$$4-y = y^2$$

$$2y = 4$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = 2$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 4 - y = 4 - 2 = 2$$

$$y = -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \quad (\text{не входит в } D(3))$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

Проверим условие $y < 4$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} < 4$$

$$\sqrt{17} < 8+1$$

$$\sqrt{17} < 9$$

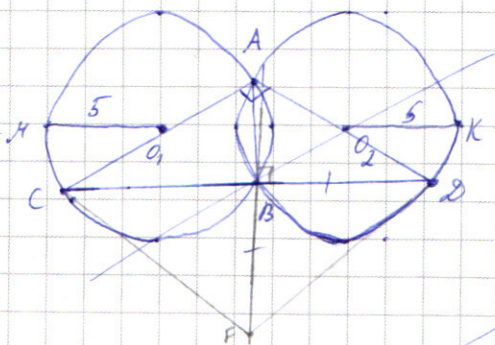
$$17 < 81$$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} < 4 \quad \checkmark$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{8+1-\sqrt{17}}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(x; y) = (2; 2); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right); (0; 3)$.

нб.



м. O_1, O_2 - центры данных окружностей, $O_1K = O_2K = 5$

$$\angle C \angle D = 90^\circ$$

по Δ отрезки AB и BF лежат на одной прямой $\Rightarrow AB \perp CF \Rightarrow \angle B = 90^\circ$ (прямоугольный Δ ABF вписан в окружность)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1)

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

Раскроем модули

$$I. y-3-x+y-3+x=6$$

$$y=6$$

$$II. y-3-x-y+3-x=6$$

$$x=-3$$

$$III. -y+3+x+y-3+x=6$$

$$x=3$$

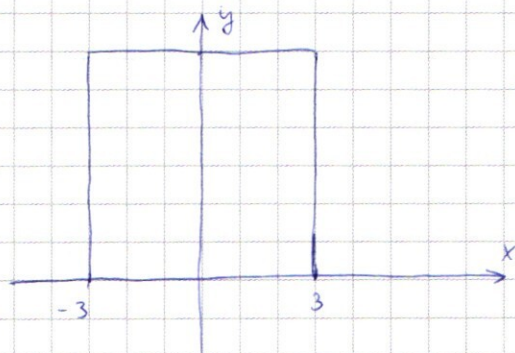
$$IV. \cancel{+y-3-x-y+3-x=6}$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y=0$$

$$y=0$$

Это уравнение задаёт фигуру:

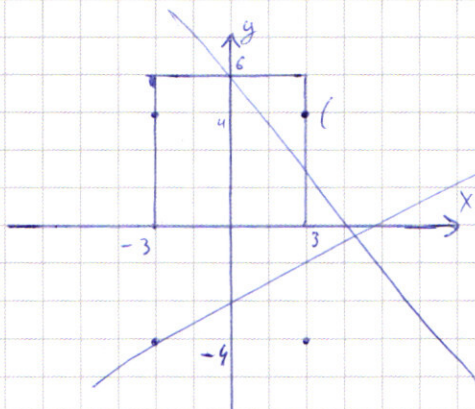


Рассмотрим уравнение (2):

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$$

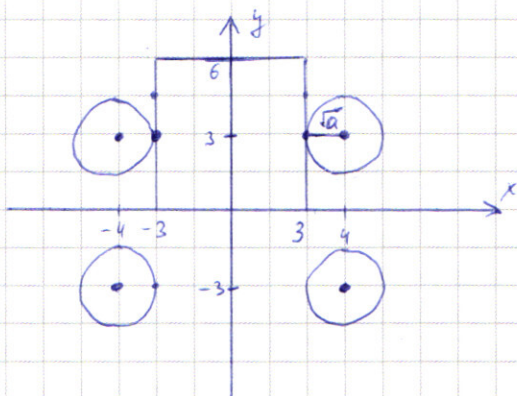
Уравнение задаёт 4 окружности с радиусом 3
и центрами $(4; 3)$; $(-4; 3)$; $(4; -3)$; $(-4; -3)$

Тогда два решения возможны в случаях



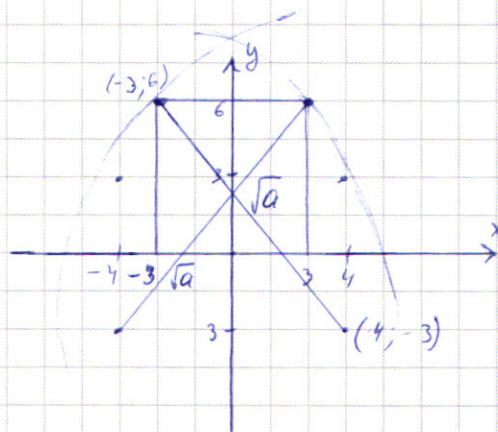
при $\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

I.



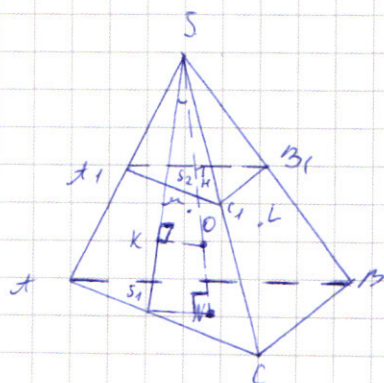
при $\sqrt{a} = 1, \text{ т.е. } \Leftrightarrow a = 1$

II.



при $a^2 =$
 $\sqrt{a} = \sqrt{(4+3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{49+81} =$
 $= \sqrt{50180} = \sqrt{1300} \Rightarrow$

Ответ: при $a = 1$ или $a = 130$. $\Leftrightarrow a = 130$



~ 4.

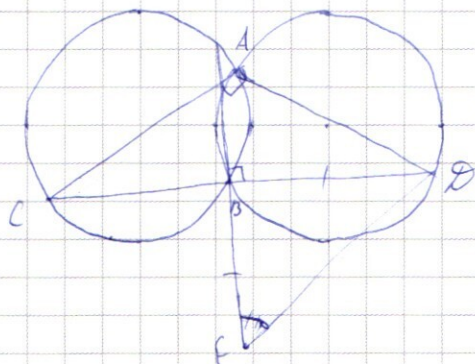
$S_1 = 1$ $S_2 = 4$ $\angle KSO = ?$

$SH \perp (A_1B_1C_1)$ $SN \perp (ABC)$

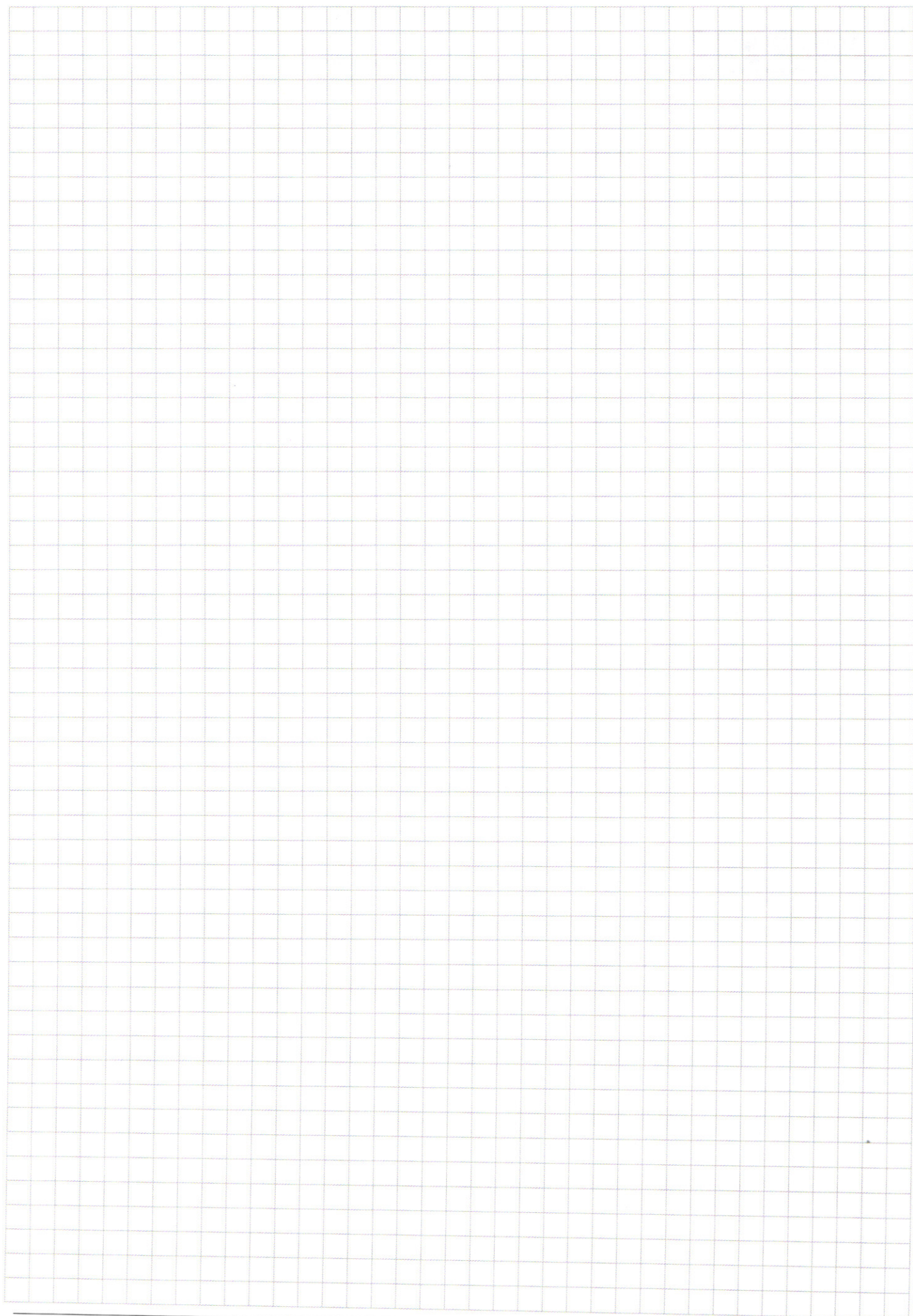
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (т.к. сходственные стороны пропорциональны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = 2 \Rightarrow A_1C_1$ - средняя линия (по среднему)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle BDF$ - прямоугольный равнобедренный $\Rightarrow \angle BFD = 45^\circ$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3375} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{25} \\ 125 \\ \underline{125} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \overline{) 125} \\ \underline{60} \\ 65 \\ \underline{60} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8! \\ 3! \cdot 3! \cdot 2! \end{array} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{6} = 560$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$125 \cdot 27$$

$$\text{Answer: } 560$$

$$56 \cdot 2 = 100 + 12 = 112$$

~2.

$$\cos - (\sin 3x \cos 11x - \cos 11x) + \sin 3x \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$- \sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{3x - 11x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{14x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{-8x}{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{14x}{2} \sin \frac{8x}{2} - 2 \sin \frac{8x}{2} \cos \frac{14x}{2} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 4x \cos 7x + \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$\cos 14x = \cos(11x + 3x) = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + 8 \cos 3x - \cos 11x = \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x + \sin 3x - \sin 11x$$

$$(x-3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

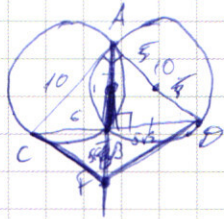
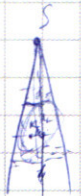
$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4xy - 12y^2 + 12y - 4x = 0$$

$$(x-3y)^2 + 4y(x-3y) - 4(x-3y) = 0 \quad (x-3y)(x-3y+4y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$y^{3 \lg 3y - 2 \lg y} = (3y)^{\lg 3y}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} &= y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= 0 \\ (x-y)^2 - 4(x+y-3y) &= 0 \\ y^{5 \lg x} &= x^{\lg x} \\ y^{2 \lg xy} &= x^{\lg x} \\ y^{5 \lg x - 2 \lg xy - 2 \lg y} &= x^{\lg x} \\ y^{3 \lg x - 2 \lg y} &= x^{\lg x} \\ (x-y)^2 - 4(x+y-4) &= 0 \end{aligned}$$



$$AF = AD$$

$$10\sqrt{2} \quad 10 \quad 10$$

$$\frac{10 \cdot 10}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$y=0$$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$x = -6$$

$$-x+3+y - x+3-y = 6$$

$$2x = 6$$

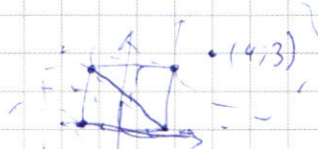
$$x = 3$$

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^{\lg 5}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3}$$

$$-2(\sin 7x \sin 4x + \cos 7x \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x$$



$$\sqrt{2}(1 - 2\cos \sin^2 7x)$$

$$\sqrt{2}(\cos 7x - \sin^2 7x) =$$

$$y = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{\lg 3} = 1$$

$$= \sqrt{2}(\cos 7x - \sin^2 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x) + 2 \sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x + 2 \sin 4x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2}(\sin 7x - \cos 7x) = 2 \sin 4x$$

$$2$$

$$-2 \cos \frac{4x+7x-\frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{7x-\frac{\pi}{4}-4x}{2} = 0$$

$$\cos\left(\frac{11x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{y^4}{3y}\right)^{\lg 3y}$$

$$= y^{2 \lg 3y^2} = y^{\lg 9y^4} = y^{\lg 9 + \lg y^4} =$$

$$\left(\frac{1}{3} y^4\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$x > 0$$

$$4-y > 0$$

$$y < 4$$

$$3^{-\lg 3y} \cdot y^{4 \lg 3y} = y^{\lg 9y^4}$$

$$\lg 3y \lg y \cdot 3^{-1} \cdot y^4 = \lg 9y^4$$

$$\lg(3^{-1} \cdot y^4) \lg 3y = 2 \lg 3y^2 \cdot \lg 9y$$

$$(-\lg 3 + 4 \lg y) \lg$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$\frac{11}{2}x = \frac{5}{8}\pi + \pi m$$

$$\frac{11}{2}x = \frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8}\pi$$

$$11x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m$$

$$x = \frac{5}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi m$$