

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Разложим число 16875 на простые множители:

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

↓ произведение цифр
1) чтобы $\sqrt[8]{}$ восьмизначного числа

~~16875~~ было равно

16875, надо, чтобы

число $\sqrt[8]{}$ содержало 4 пятерки, 3 тройки,

одну 1. (т.к. $5^4 \cdot 3^3 = 16875$, а

свободно еще одно место, то

на нем должна стоять 1, чтобы

произведение не изменилось)

2) Найдем количество различных перестановок
четырех 5, трех 3 и одной 1.

Сначала ставим пятерки, изначально

свободно 8 мест, значит их можно

поставить $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ способами, но т.к.

пятерки между собой не отличаются,

то нужно поделить на кол-во одинаковых

расстановок их пятерок, т.е. на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Теперь ставим тройки, их можно поставить 4·3·2 способами, т.к. осталось 4 места, но тройки между собой не отличаются, значит, нужно ещё поделить на кол-во одинаковых расстановок троек, т.е. на 3!. Единицу можно поставить на последнее место 1 способом. Итого:

$$\begin{aligned} \text{кол-во чисел} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280 \end{aligned}$$

Ответ: 280

N2

$$\underbrace{\cos 7x + \cos 3x}_{2 \cdot \cos \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2}} - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = \underbrace{\sin 7x + \sin 3x}_{2 \cdot \sin \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2}}$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\sqrt{2} \cdot \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(1) \begin{cases} \cos 2x \cdot \sqrt{2} = \cos 5x + \sin 5x \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим сначала ур-ие (1):

$$\begin{aligned}\cos 5x + \sin 5x &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$(1): \cos 2x \cdot \sqrt{2} = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 2x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x$$

⇓

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \end{cases}$$

Теперь решим ур-ие

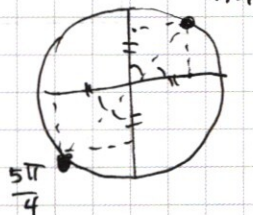
$$\cos 5x = \sin 5x$$

⇓

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\left[x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \right]$$

(2):



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \end{cases}$$

→ Ответ:

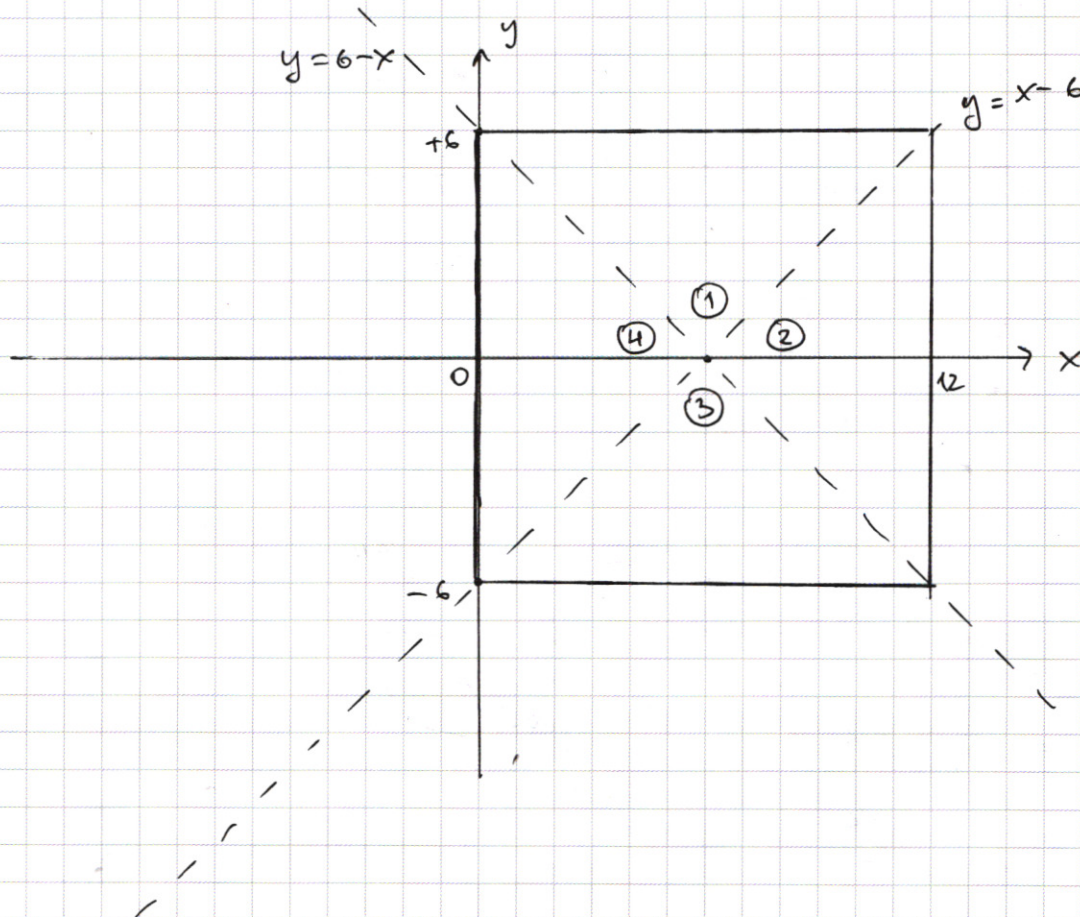
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \end{cases}$$

N5

$$\begin{aligned} (1) & |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (2) & (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a \end{aligned}$$

a - ? (2 решения)

~~Нарисуем~~ Нарисуем для начала графики (по ур-иям):



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Раскроем модуль для каждой из 4х областей:
(область отделим
цифровой линией)

$$\textcircled{1} \begin{cases} y > 6-x \\ y > x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6+y > 0 \\ x-6-y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1}: \begin{aligned} & -x+6+y+x-6+y=12 \\ & \text{ур-ие} \quad [y=6] \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y > 6-x \\ y \leq x-6 \end{cases} = \begin{cases} x-6+y > 0 \\ x-6-y > 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1}: \begin{aligned} & x-6+y+x-6-y=12 \\ & \text{ур-ие} \quad 2x=24 \\ & [x=12] \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y \leq 6-x \\ y \leq x-6 \end{cases} = \begin{cases} x-6+y \leq 0 \\ x-6-y > 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1}: \begin{aligned} & \text{уравнение} \\ & -x+6-y+x-6-y=12 \\ & [y=-6] \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} y \leq 6-x \\ y > x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6+y \leq 0 \\ x-6-y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{1}: \begin{aligned} & \text{ур-ие} \quad -x+6-y-x+6+y=12 \\ & -2x=0 \\ & [x=0] \end{aligned}$$

||

(1) ур-ие на графике представляется
квадратом

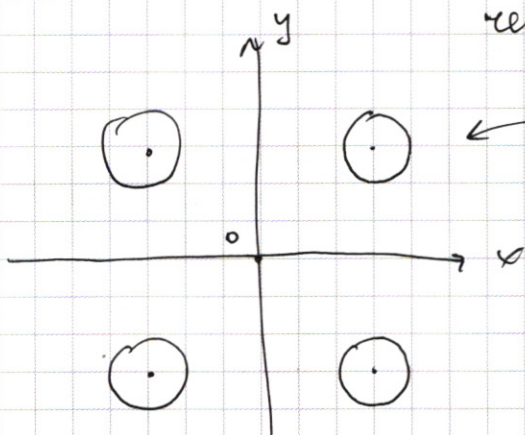
Теперь рассмотрим (2)е уравнение:

График этого уравнения симметричен

относительно оси Oy и относительно точки начала координат

$\Rightarrow$ график при $y \geq 0$ и $x \geq 0$ просто будет

отражаться в остальных четвертях,
например, если график в ~~первой~~ первой
четверти будет таким,



то в остальных
четвертях он будет
симметричен, т.к.

~~если~~ если есть
точка (x, y) , то есть

и точки $(-x, -y)$, $(-x, y)$, $(x, -y)$.



т.к. $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

раскрывается как $(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$, то в этой
четверти это ~~или~~ либо окружность, либо часть
окружности с центром в точке $(6, 8)$ и
радиусом $\sqrt{a}$.

Следовательно, 2 решения будет,
когда будет 2 пересечения графиков
этого и этого уравнений.

Нарисуем график этого уравнения, отметим
центр окружности второго и будем
увеличивать радиус, чтобы пометить, при
каком радиусе $(\sqrt{a})$ 2 пересечения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого:

2 решения при $a = 4$ и $a = 100$

Ответ: $\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$

№3

$$(1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(2) 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(1): \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(y)}$$

$$\frac{x^4 \cdot \lg y}{y^2 \cdot \lg y} = -x^{\lg(-x)} \cdot (-x^{\lg y})$$

$$(2) 2(y-2)^2 + (x-2)^2 - xy = 12$$

$$2y^2 - y(x+8) - (x^2 + 4x) = 0$$

$$D = (x+8)^2 + 4 \cdot 2(x^2 + 4x) =$$

$$= x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm 3x+8}{4} \quad \begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

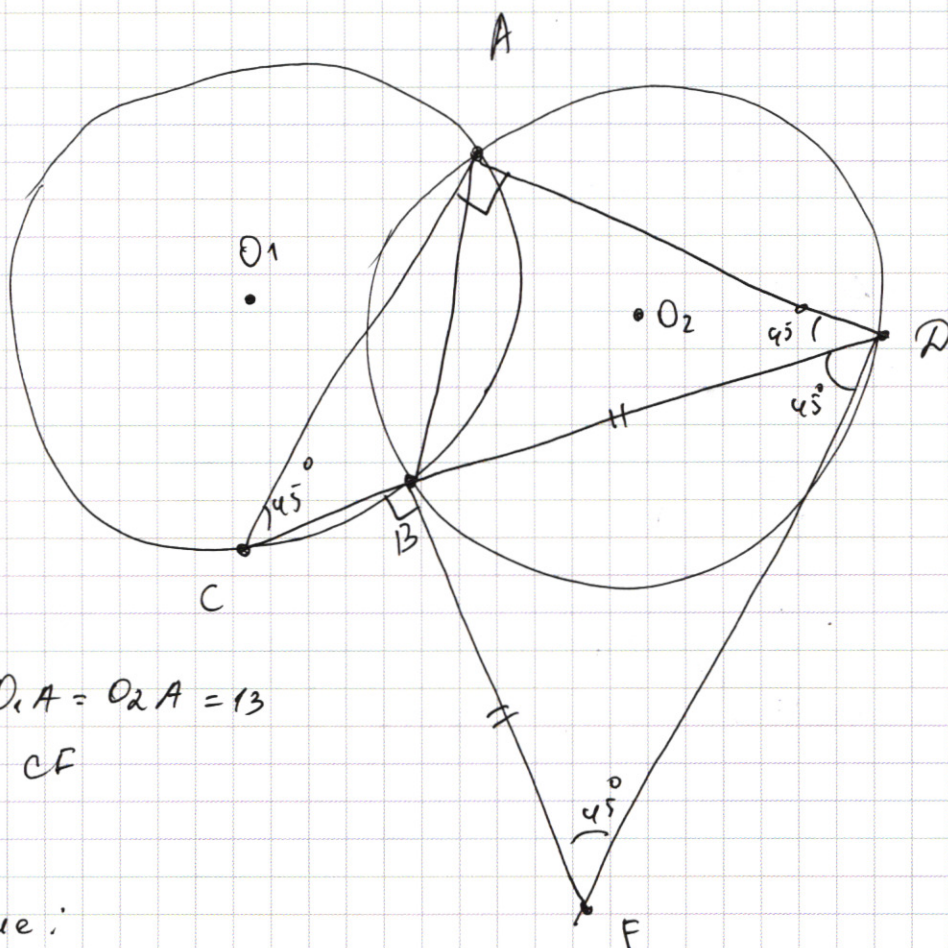
 $\boxed{N3}$ (продолжение)

$$(1) \begin{cases} y = x + 4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$(2): \left(\frac{x^4 \cdot 4}{x^2} \right) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = (-x) \lg\left(-x \left(-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$(4x^2) \lg\left(-\frac{x}{2}\right) = (-x) \lg\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

N 6



Дано: $O_1A = O_2A = 13$

Найти: CF

Решение:

1) Т.к. окружности одинаковые, то углы опр. на одинаковой дуге хорды равны $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$

2) $\angle BDF = \angle DFB = \frac{180^\circ - \angle DBF}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

~~или~~

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

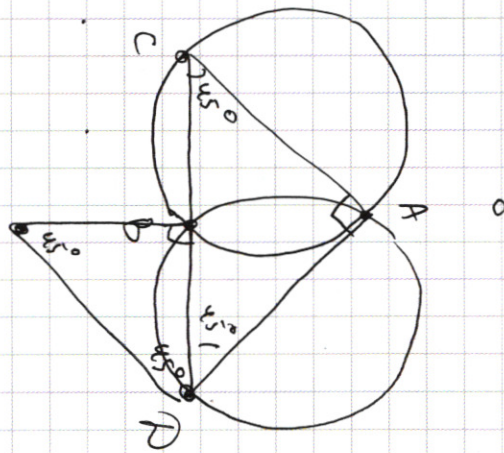
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \end{cases}$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

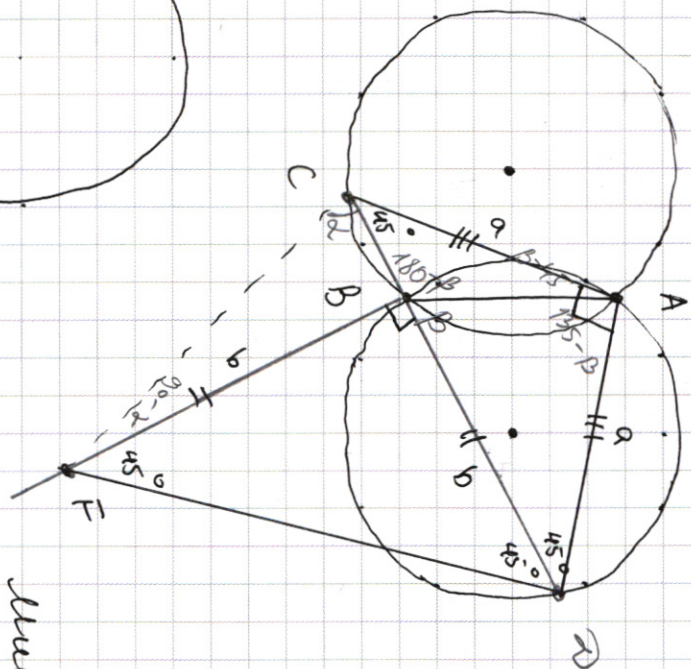
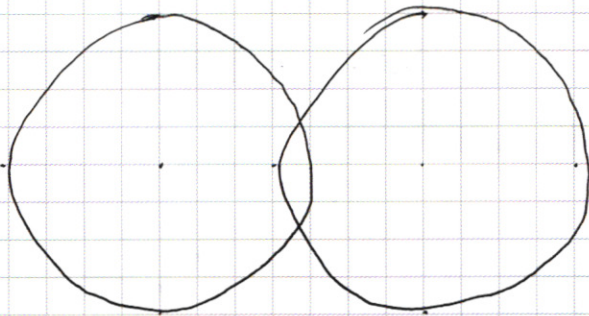
$$\operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$



$$\begin{array}{r} v + b + x \\ v + b + x \end{array}$$



$$r = 13$$

$$\sin p = \frac{a}{r} \quad \cos p = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}$$

$$\frac{a}{b} = n$$

$$\sin(p_{\text{res}} - p) =$$

$$\frac{p}{p - ms} = 2$$

$$\frac{\sin 45^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = 26$$

$\frac{20}{6} = 3 \text{ R } 2$

$$2b = \frac{\sqrt{2}a - \sqrt{2} \sqrt{4b^2 - a^2}}{\frac{\sqrt{2}}{4b} (a - \sqrt{4b^2 - a^2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

625
27
4375
1250
16875

$$16875 = 5^4 \cdot 3$$

$$16875 = 1 \cdot 3^3 \cdot 5^4$$

N1 - 280

~~180~~ ~~170~~ ~~160~~ ~~150~~ ~~140~~ ~~130~~ ~~120~~ ~~110~~ ~~100~~ ~~90~~ ~~80~~ ~~70~~ ~~60~~ ~~50~~ ~~40~~ ~~30~~ ~~20~~ ~~10~~

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

280

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} \cdot 1$$

~~$\sin 7x \cdot \sin 3x = 2 \cos x$~~

~~$\cos x \cdot \cos 3x = 2 \sin x$~~

~~$\sin 2x + \sin 3x = 2 \cos x \cdot \cos 3x$~~

~~$\cos 2x \cdot \cos 3x$~~

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

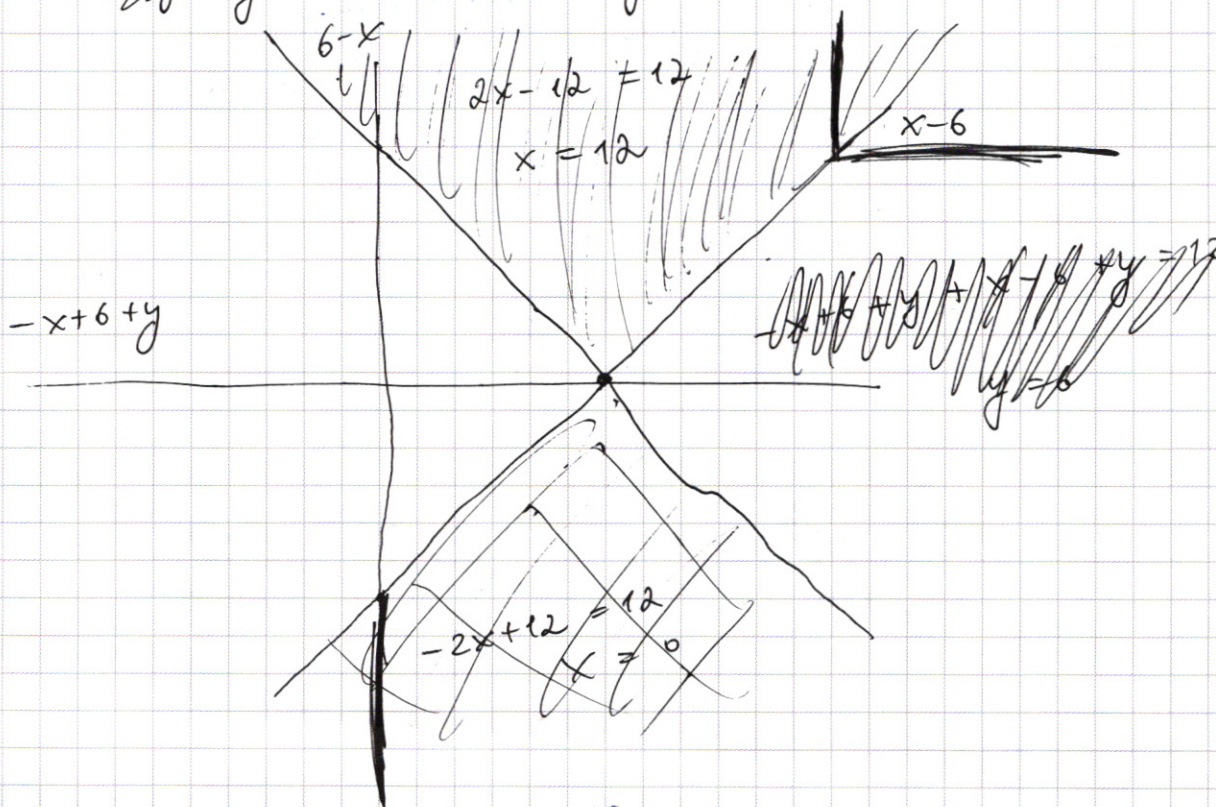
$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9$$

$$x-6-y \geq 0$$

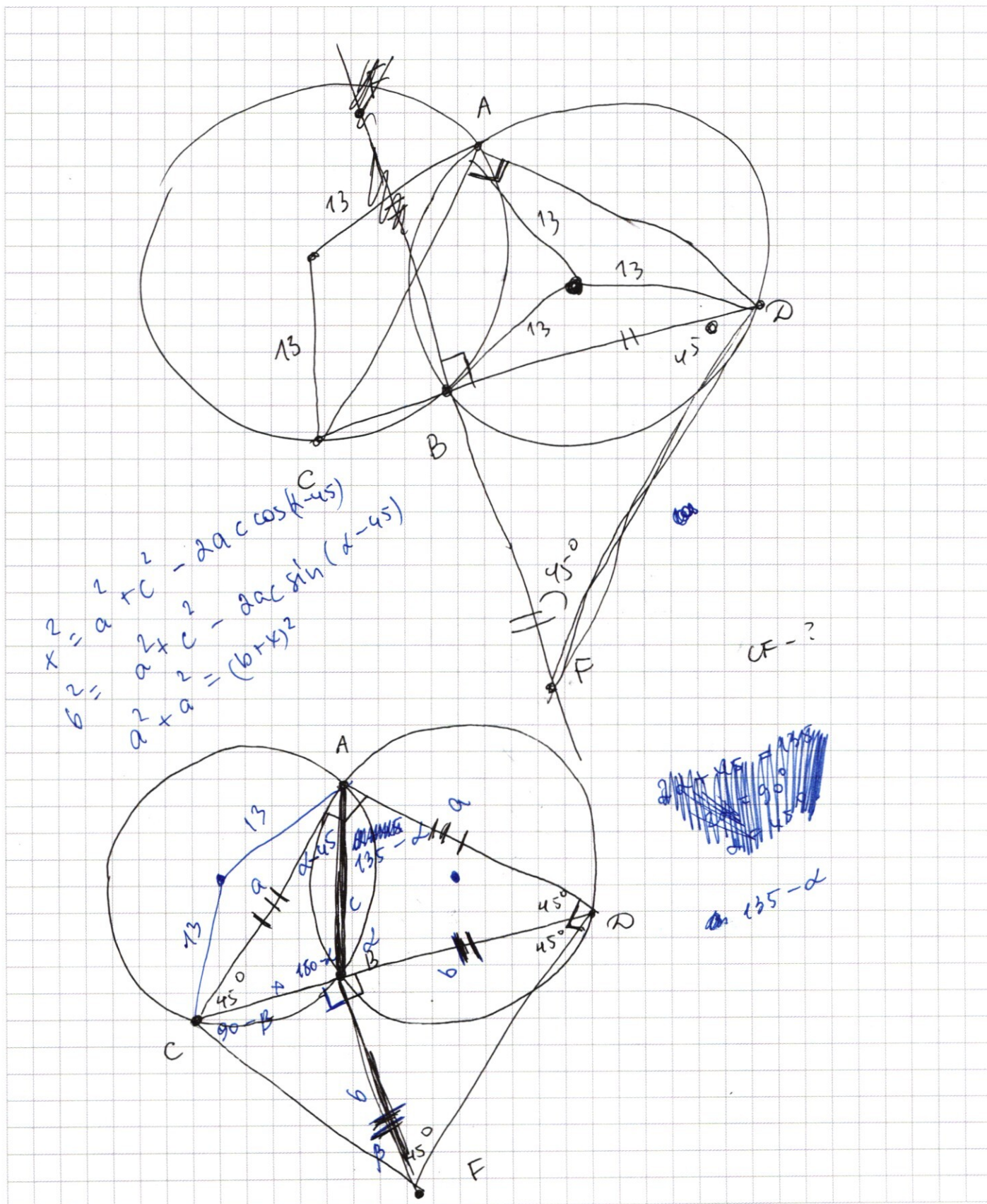
$$x-6+y \geq 0$$

~~$y \leq x-6$~~

$$y \geq 6-x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

решение

$$\begin{cases} x-6+y > 0 \\ x-6-y \leq 0 \\ y-6+x > 0 \end{cases}$$

1) +
 $x-6-y > 0$

$$y \leq x-6$$

$$\begin{cases} -x+6+y > 0 \\ y > x-6 \end{cases}$$

2) +
 $x-6+y > 0$

$$y > 6-x$$

$$\begin{cases} x-6+y \leq 0 \\ y \leq 6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 6-x \\ y > x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6+y - x+6+y = 12 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq 6-x \\ x-6+y \leq 0 \\ x-6-y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+6+y > 0 \\ -x+6-y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \end{cases}$$

$$x-6+y > 0$$

$$x-6+y \leq 0$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{cases} 2x-12 = 12 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

$$x^2 + y^2 = a$$

$$a = 100$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 10^2$$

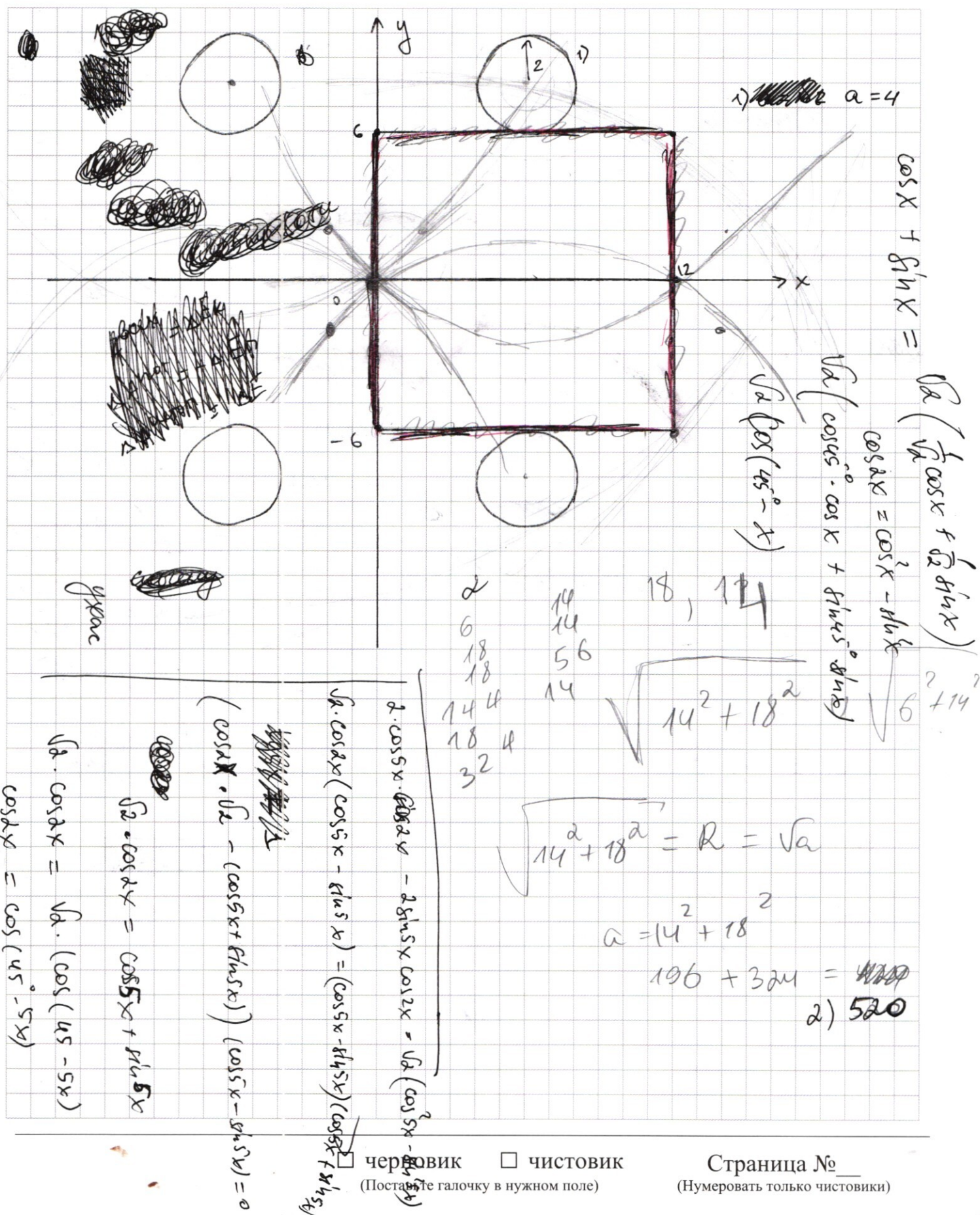
$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y - x^2 - 4x - xy = 0$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$$

$$280$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - (2 \sin 5x \cdot \cos 2x) = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

~~Summa~~

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$\cos 7x$

$$\sin x \pm \sin y$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y$$

$$-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 0 - \cos 0 = 0$$

$$\cos 90^\circ - \cos 90^\circ$$

$$\sin 0 + \sin 0 = 0$$

$$\cos 0 + \cos 0 = 2$$

~~sin 2 cos~~

~~sin x + sin y~~

~~sin x - sin y~~

$$= -2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

~~sin x + sin y~~

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 0 - \cos 90^\circ = 1$$

$$\cos 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

$$\cos x \pm \cos y$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y$$

$$-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\cos 30^\circ + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

$$\cos 0 + \cos 0 = 2$$

$$\sin 0 + \cos 0 = 1$$