

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Нужно взять только числа, в записи которых есть
подборы из чисел: 3, 3, 3, 5, 5, 5 или 9, 3, 5, 5, 5. Остальные
цифры - единицы.

1 способ подбор:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

2 подбор:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

$$\text{Итого: } 1120 + 560 = 1680 \text{ чисел}$$

Ответ: 1680

N3

023: Из $\lg x$ получаем что $x > 0$. Учитывая это и $\lg x$ получаем,
что $y > 0$.

$$x^2 - (2y + 4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$x_1 = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = 4 - y$$

$$x_2 = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \Leftrightarrow \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \Leftrightarrow$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y} \Leftrightarrow$$

$$10^{3 \lg y \cdot \lg x} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{2 \lg^2 y} \Leftrightarrow$$

$$3 \lg y \cdot \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y \Leftrightarrow$$

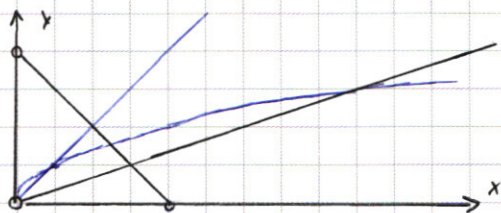
$$\# : \begin{cases} x=y \\ \log_y^2 x - 3 \log_y x + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$x: D = 9 - 8 = 1$$

$$\begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = 2 \end{cases}$$

$$\# \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x=y \\ x=y^2 \\ x+1, y+1 \end{cases}$$

Построим графики функций



Найдем 3 решения:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x=y \\ x=4-y \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y=2}} \\ \underline{\underline{x=2}}$$

$$\textcircled{2} y^2 = 3y$$

$$y=0 \text{ не удов. ОДЗ}$$

$$\underline{\underline{y=3}} \quad \underline{\underline{x=9}}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} y^2 = 4-y \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$D = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

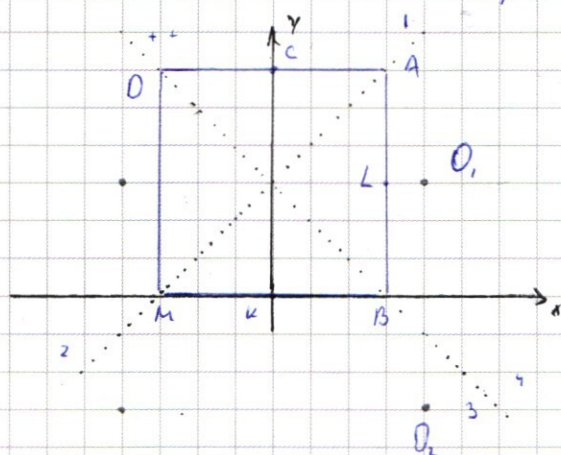
$$y_2 < 0$$

$$\text{Ответ: } (2; 2) \cup (9; 3) \cup \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

~~Первое уравнение~~ Модули в первом уравнении разбивают плоскость на 4 части прямыми $y = x+3$ и $y = -x+3$



1: $2y = 12$
 $y = 6$

2: $-2x = 6$
 $x = -3$

3: $-2y = 0$
 $y = 0$

4: $2x = 6$
 $x = 3$

во втором уравнении получим 4 окружности с центрами $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, -3)$ и радиусами $\sqrt{a}$

Обозначим точки L, B, C, D, O_1, O_2, K на чертеже. Интуитивно очевидно относительно оси y .

$O_2 B = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, при $a < 10$ две нижние окружности не пересекают квадрат

$O_1 L = 1 < 10 \Rightarrow a = 1$ — единственное решение

$O_1 D = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$O_1 C = \sqrt{16+9} = 5$

$\Rightarrow$ при $a \in [1; 58]$, $a \neq 25$ две верхние окружности пересекают квадрат в 4 точках

$a = 25$: верхние окружности пересекают квадрат в точках K и C , но нижние окружности пересекают его в точках L и точках AB, DM , т.е. 4 решения.

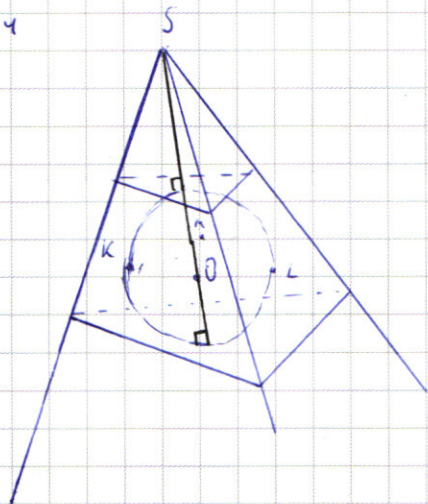
$O_2 D = \sqrt{49+61} = \sqrt{110}$ $\Rightarrow$ при $a \in (10; 110)$ две нижние окружности пересекают квадрат не менее, чем в 3 точках.

$a = 130$: вершины окружности не пересекают квадрат т.к. $a > 58$
 ни одна окружность не проходит через точки A и D - 2 решения.

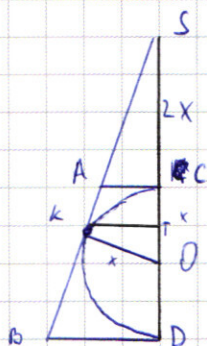
При $a > 130$ окружности не пересекают квадрат

Ответ: $a = 1$; $a = 130$

N 4



Построим сечение (плоскость его перпендикулярна) KSO



т.к. S вершина сечения = $\frac{1}{4}$ S пирамиды

но треугольники подобны
 с катет. $\frac{1}{2}$, но если вершине
 сечения проходит через
 середину CD, то есть
 AC - средняя линия

Пусть $SK = 2x$

Тогда $CO = x \Rightarrow OK = x$

Тогда $\sin \angle KSO = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \arcsin(\frac{1}{3})$

$SK = 2\sqrt{2}x$

$$\frac{SC}{SK} = \frac{SA}{SO} = \frac{AC}{KO} \Rightarrow$$

~~$AC = \frac{2x}{3}$~~

$$\frac{2x}{2\sqrt{2}x} = \frac{SA}{3x}$$

$$SA = \frac{3x}{\sqrt{2}}$$

$\triangle SKT \sim \triangle SAC$ (KT || SO)

$$\frac{AC}{KT} = \frac{SA}{SK}$$

$$KT = AC \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3} AC$$

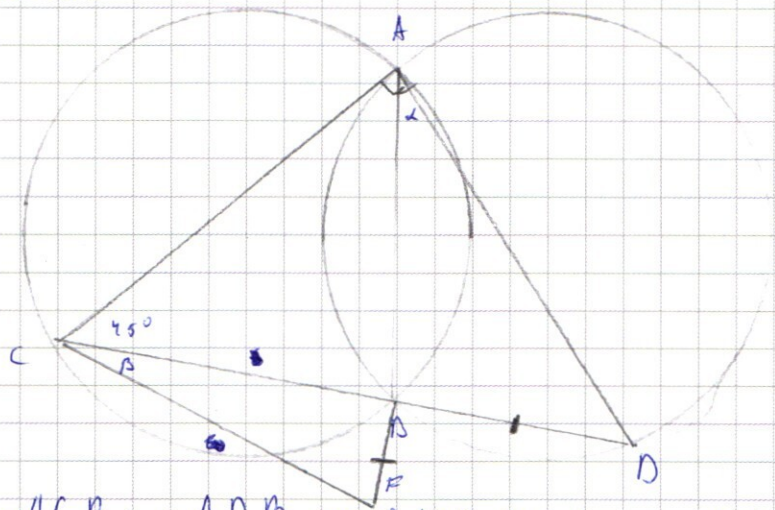
$$KT = \frac{4}{3} AC$$

$$S_{сеч. KLT} = \frac{16}{9} \cdot 1 = \frac{16}{9}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin(\frac{1}{3})$; $S = \frac{16}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 задание:



$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ т.к. опираются на одну дугу. $\angle CAB = 90^\circ - \angle ADB$

$$CD = x$$

$$BD = y$$

$$\frac{x-y}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{y}{\sin \alpha} = 10 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Первое выражение равно 10 из первой окружности, так как радиус равен} \\ \text{10 из второй окр.} \end{array} \right)$$

$$CB = x - y = 10 \cos \alpha \quad BD = y = 10 \sin \alpha$$

~~***~~

$$CB^2 + BD^2 = CB^2 + BF^2 = 100 \cos^2 \alpha + 100 \sin^2 \alpha = 100 = CF^2$$

$$CF = 10$$

2 задание: $CF = 10 \quad BC = 6 \quad BF = 8 \Rightarrow BD = 8 \quad CD = 14$

$$AC = 7\sqrt{2}$$

$$\sin B = \frac{4}{5} \quad \cos B = \frac{3}{5}$$

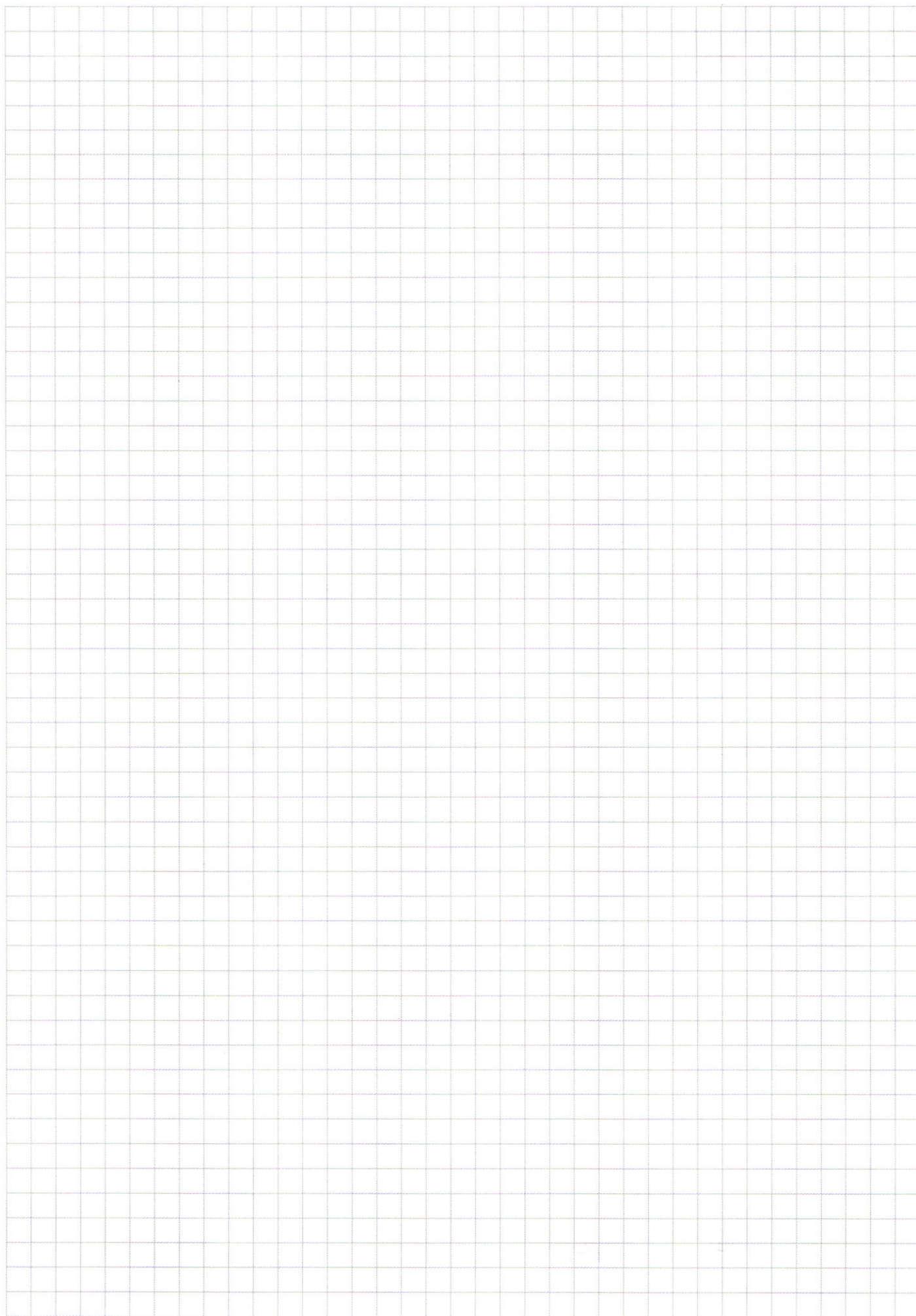
~~sin(45+B)~~

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + B\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = AC \cdot CF \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + B\right)}{2}$$

$$S = 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{1}{2} = 49$$

Ответ: $CF = 10$; $S_{ACF} = 49$.



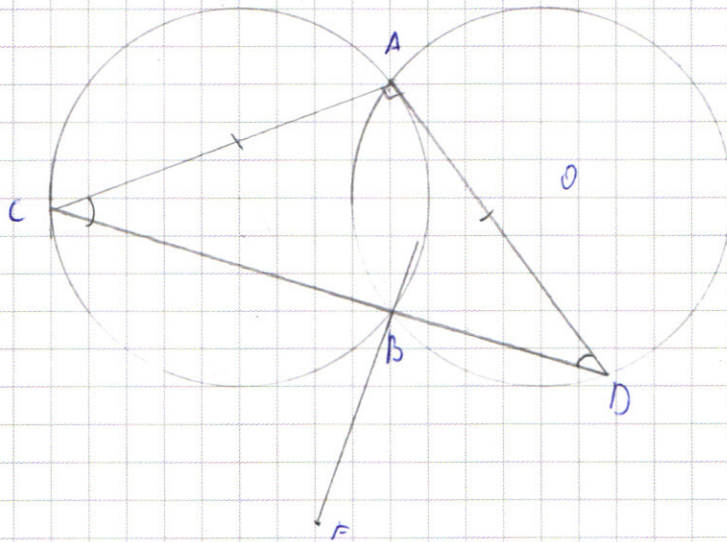
☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \cos 4x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 4x\right) = \sin\left(\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)\right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) - \sin\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin\frac{\pi}{4} - 11x\right)$$

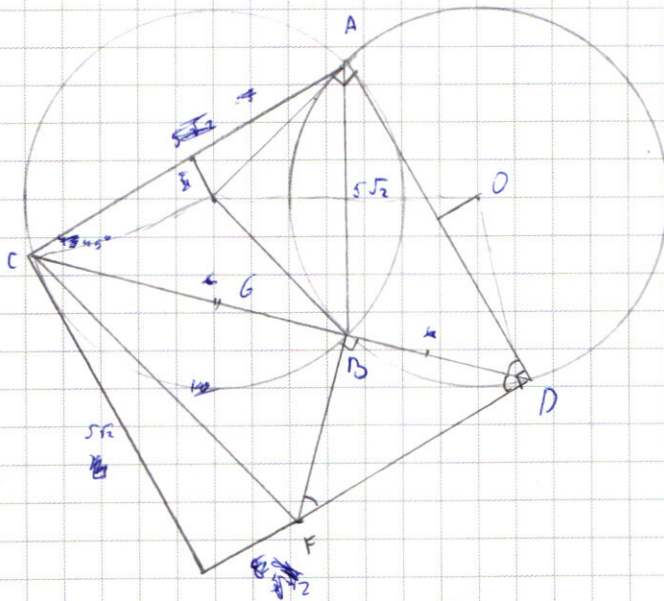
N	6
---	---



$$AB =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5\sqrt{2} \quad | \Rightarrow$$

ОАВ - прямая.



$5\sqrt{2}$

5

5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $3375 =$

$$9 \cdot 375 = 3^3 \cdot 125 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$9, 3, 5, 5, 5$$

$$3, 3, 3, 5, 5, 5$$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 27 \\ \hline 845 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\cos 11x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) =$$

$$2 \cos \left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (\cos 3x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 11x\right)) =$$

$$= 2 \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 160 \cdot 2 = 1120$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

1680

N2

$$\cos 11x - \cos 3x =$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x = 2 \sin 7x \cos 7x$$

$$= 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$= 2 \sin 4x \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$2 \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos \left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin \left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 4x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sin \left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 14x$$

~~2 \cos 14x~~

$$\sin 11x - \sin 3x =$$

$$2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\sin 7x + \cos 7x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{2 \lg xy} = y^{2 \lg y x} \cdot y^{2 \lg y} = (10^{\lg y})^{2 \lg y} = 10^{2 \lg^2 y}$$

$$\frac{y^5}{x}$$

$$x^{\lg x} = (10^{\lg x})^{\lg x} = 10^{\lg^2 x}$$

$$y^{2 \lg x} =$$

$$y^{2 \lg x} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$\frac{y^{2 \lg x}}{10^{2 \lg^2 x}} = y^{2 \lg x} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$y^{2 \lg x} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{2 \lg^2 y} = 10^{\lg^2 x + 2 \lg^2 y}$$

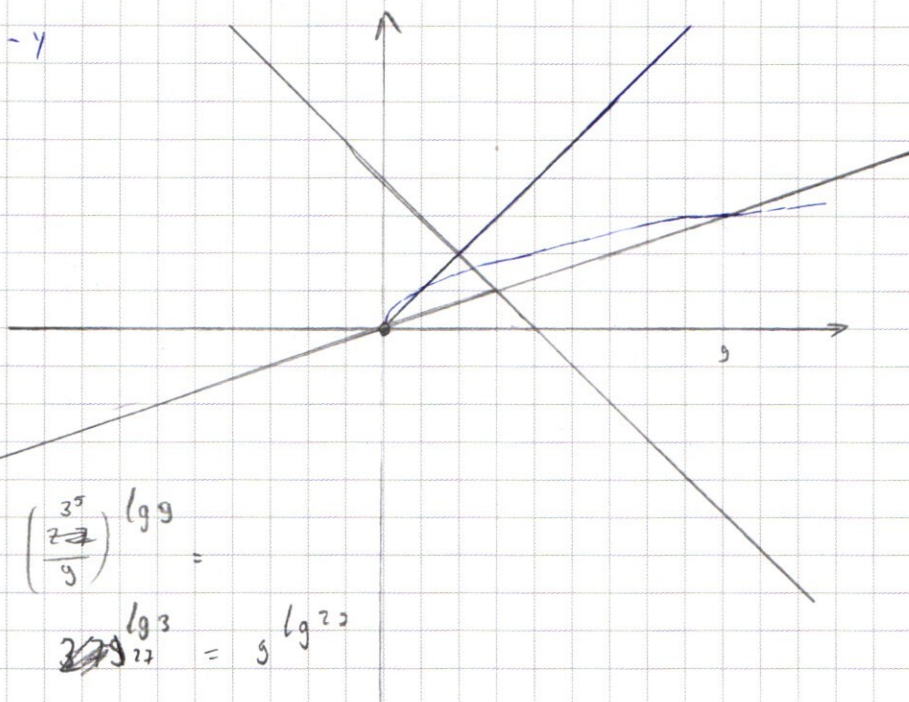
$$D = 4y^2 + 12y + 16 = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

$$16y^2 - 32y + 16 =$$

$$(4y - 4)^2$$

$$x_1 = \frac{2x + 4 + 4y - 4}{2} = 3y$$

$$x = 4 - y$$



№4

$$\left(\frac{3^5}{2^2}\right)^{\lg 9} =$$

$$3^{\lg 3} = 9^{\lg 2}$$

$$y^{4 \lg x} = x^{\lg x} y^{2 \lg y}$$

$$10^{4 \lg x \lg x} = 10^{\lg^2 x + 2 \lg^2 y}$$

$$\lg^2 x - 4 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$(\lg x - 2 \lg y)^2 - 2 \lg y = 0$$

$$\log_y^2 x - 4 \log_y x + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$t = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$t = 2 - \sqrt{2}$$

$$x = y^{2 + \sqrt{2}}$$

$$x = y^{2 - \sqrt{2}}$$

$$3y = y^{2 + \sqrt{2}}$$

$$3 = y^{1 + \sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt[1 + \sqrt{2}]{3}$$

$$y - y = y^{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$10^{3 \lg x \lg x} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$3 \lg x \lg y = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\log_y^2 x - 3 \log_y x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$\log_y x = \frac{3 \pm 1}{2} = 2$$

$$x = y^2 \quad x > 0 \quad y > 0$$

$$\log_y x = 1$$

$$x = y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10^{3 \lg y \lg x} = 10^{2 \lg^2 x \lg^2 y}$$

$$3 \lg y \lg x = 2 \lg^2 x \lg^2 y$$

$$2 \lg x \lg y = 3$$

$$\lg x \lg y = \frac{3}{2}$$

$$10^{2 \lg x \lg y} = 10^3$$

$$\lg(x+y) = \frac{3}{2}$$

$$x+y = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$y = 10^{\frac{3}{2}} - x = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{3}x = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{4} \cdot 10^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{10^{\frac{3}{2}}}{4}$$

$$\lg x = a$$

$$\lg y = b$$

$$\sqrt{1000} = 31$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} y^{\lg y}$$

$$10^{3 \lg y \lg x} = 10^{\lg^2 x + \lg^2 y}$$

$$3ab = a^2 + b^2$$

$$a^2 - 3ab + b^2$$

$$\log_y x + 1 = 3 \log_y x$$

$$\log_y x = 3 \log_y x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

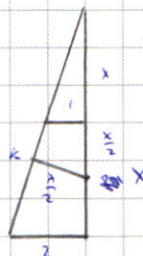
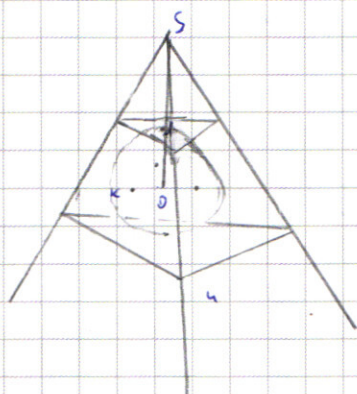
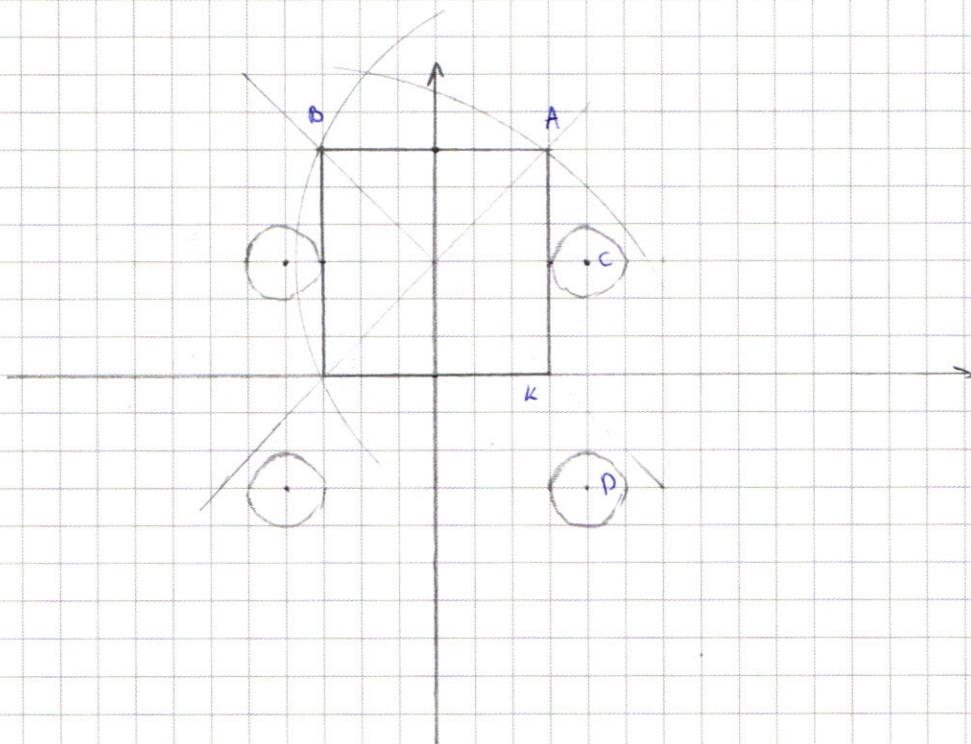
$$\log x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = y^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\log y = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = y^{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

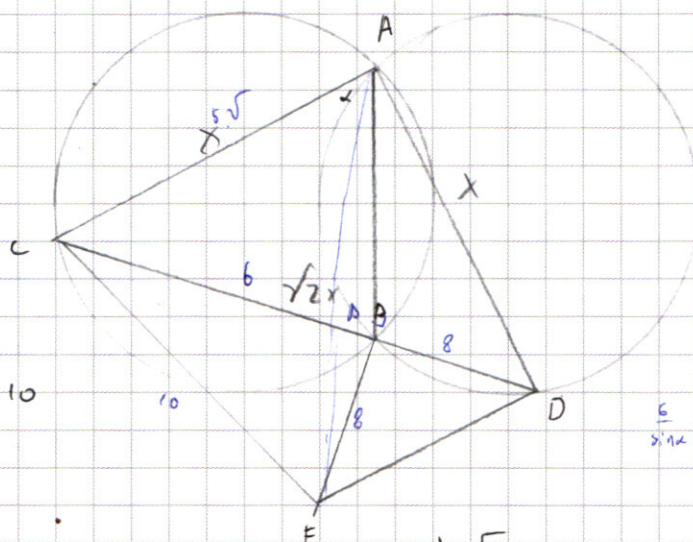
$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$



$$\frac{1}{2} (9x^2 - x^2) = \sqrt{2} x$$

$$\frac{\sqrt{2} x}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} x$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{2} x$$



$$\sin \alpha = \frac{10}{12}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \alpha}$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \alpha}$$

$$\frac{x\sqrt{2} - y}{\sin \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha} = 10$$

$$x\sqrt{2} - y$$

$$2x - 2xy + y^2 = y^2$$

$$y = 10 \cos \alpha$$

$$\frac{x\sqrt{2} - 10 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 10$$

$$x\sqrt{2} - 10 \cos \alpha = 10 \sin \alpha$$

$$x\sqrt{2} = 10 \cos \alpha + 10 \sin \alpha$$

$$x = 10 \cos \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 4x =$$

$$\sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x$$

$$\cos 4x$$

$$1 + 1 + 2 \cos 3x \cos 3x = 2$$

$$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \cos 3x = \sin 11x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x - \sin 3x$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x = \sin 11x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \sin \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \sin x \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) \right)$$

$$2 \cos 4x \sin 4x = \sin 11x + \sin 3x = \cos 4x$$

$$\sin 11x + \sin 3x = \cos 4x$$

$$\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$(\sin 11x + \sin 3x)^2 = \cos 2x$$

$$4 \sin^2 2x \cos^2 4x =$$

