

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1/5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & ① \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = a & ② \end{cases}$$

① Пусть первый модуль a , а второй b , тогда наше ур-е примет вид след. системы:

I) $\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ y = 3 \end{cases}$ II) $\begin{cases} a > 0, b < 0 \\ x = -3 \end{cases}$ III) $\begin{cases} a < 0, b > 0 \\ x = 3 \\ 0 = 6 \text{ (нет решений)} \end{cases}$

IV) $\begin{cases} a < 0, b < 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Построим этот график (границы a - b определяются для пересек. прямых $y = x+3$ и $y = 3-x$).

Тогда график этого ур-я - квадрат с вершинами в точках $(-3, 0), (3, 0), (3, 6), (-3, 6)$.

2) График этого ур-я - окруж-ти с $R = \sqrt{a}$ для $a > 0$ - это 4 точки, для $a < 0$ - пустое множество.

Координаты центров заданы ур-ми $\begin{cases} |x|=4 \\ |y|=3 \end{cases}$, тогда 4 центра это точки $(4;3), (-4;-3), (-4;3), (4;-3)$.

При $a=0$ ни одна из 4 точек не лежит на квадрате, решение нет. Постепенно увеличиваем a . Две верхние ок-ти коснулись кв-ла, а нижние нет. Тогда для решения, что удовлетворяет условию, $a > 2$, тогда для нижних ~~квадрата~~^{ок-ти} не пересекут границ от центра вершины. В этом случае у каждой ок-ти будет по две сечения, а две верхние не пересекут кв-л-а решения (случай n). Дальше ок-ти не будут пересекать кв-л.

m) Сторона квадрата касается ок-ти, тогда она перпен. радиусу, проведенному к ней. Т.е. она парал. оси Ox или Oy , $R \parallel Ox$ или $R \perp Oy$. Тогда $|x_0| - R(0, \text{стор. кв.}) = R$. $R(0, \text{стор. кв.}) = 3$ (задается ур-ном $x = -3$ или $x = 3$), тогда $R = 1$ $a = R^2 = 1$.

n) $R = \sqrt{x_0^2 - x_0^2} = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2}$, где x_0, y_0 - координаты самой удаленной вершины. $R =$ для ок-ти с $x_0 = -4, y_0 = -3$, это вер. $(3;6)$.

$$R = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130} \quad a = R^2 = 130.$$

Ответ $\{1; 130\}$.

По формулам разности синусов и косинусов а также формулы двойного угла:

$$-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \cos 7x \sin(-4x) = 2 \sin 7x \cos 7x$$

$$\sin 7x \sin 4x + \cos 7x \sin 4x + \sin 7x \cos 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = 2(\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad 1)$$

$$+ 2 \sin 4x = \sin 7x - \cos 7x \quad 2)$$

$$1) \tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \sin 4x = 2 \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

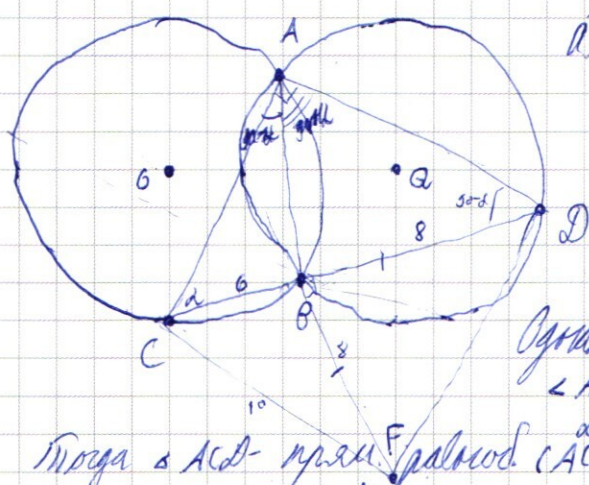
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -4x + \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}, n \in \mathbb{Z}.$



а) Пусть $\angle$ между OC -ми O , а второй - Q
 $\triangle ABC$ - впис., тогда $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = R$

$$AB = 2 \sin \angle ACB = 2 \sin \alpha$$

$$\text{из } \triangle ABD \text{ аналог. } AB = 2 \sin \angle ADB$$

Сумма углов $\triangle ACD$ - прям. $\alpha + \angle ADB = 90^\circ$
 $\angle ADB = 90^\circ - \alpha$, то $\sin \angle ADB = \cos \alpha$, $\sin \alpha = \cos \alpha$,

тогда $\triangle ACD$ - прям. равноб. ($AC = AD$) $\alpha = 45^\circ$ $AB = 2R = 5\sqrt{2}$

б) Пусть $\angle BAC = \beta$, тогда $\angle DAB = 90^\circ - \beta$. Аналогично $BC = 2R \sin \beta$,
 $BD = 2R \cos \beta$

в) $BF \perp DC$, то $CF^2 = BC^2 + BF^2 = PC^2 + PD^2 = 4R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 4R^2$
 $CF = 2R = 10$

д) по теор. Пиф. $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8 = BD$

1) $DC = BC + BD = 14$ $AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} = AD$ (см. в. теор. Пиф. прям. и равноб.)

$$\begin{aligned} 3) \sin \angle ACF &= \sin (45^\circ + \angle BCF) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{BF}{CF} + \frac{BC}{CF} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{10} + \frac{6}{10} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$4) S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = 49\sqrt{2}$$

Ответ: а) 10; б) $49\sqrt{2}$.

✓1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$, тогда есть несколько вариантов:

1) В числе три "5", три "3" и две "1".

В этом случае кол-во вариантов равно $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 560$

сберется кол-во вариантов, если две из цифр были разные (читает (8!)) и делим на кол-во перестановок одинаковых цифр.

2) В числе три "5", одна "3", одна "9" и три "1".

В таком случае кол-во вариантов равно $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 1120$

сберем числ вариантов, если две из цифр были разные, и делим на кол-во перест. одинаковых цифр.

Суммарное кол-во вариантов: $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680.

✓3

$$\int \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$2) x^2 - x(2y+4) + 3y(4-y) = 0$$

По теор. Виетта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2y + 4 \\ x_1 x_2 = 3y(4-y) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 - y \quad (m) \\ x_2 = 3y \quad (n) \end{cases}$$

$$1) \lg x = a, \lg y = b \quad x = 10^a, y = 10^b \quad \lg xy = \lg x + \lg y = a + b$$

$$\frac{(10^{5b})^a}{10^{a^2}} = (10^6)^{2(a+b)}$$

$$\frac{5ab}{10} = 10^{2a^2b + 2a^2b^2}$$

$$5ab = 2a^3b + 2a^2b^2$$

[$\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}$ для корня при подстановке не подходит]

$$2a^2 + 2ab - 5 = 0$$

$$m) 1) x = 3y, \text{ то } a = \lg x = \lg 3y = \lg 3 + \lg y = b + \lg 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{x}{3}, \text{ то } b = \lg y = \lg \frac{x}{3} = a - \lg 3$$

$$2a^2 + 2a^2 - 2a \lg 3 - 5 = 0$$

$$4a^2 - 2a \lg 3 - 5 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \lg^2 3 + 20$$

$$a = \frac{\lg 3 \pm \sqrt{\lg^2 3 + 20}}{4}$$

$$x = 10^{\frac{\lg 3 \pm \sqrt{\lg^2 3 + 20}}{4}}$$

$$y = \frac{1}{3} 10^{\frac{\lg 3 \pm \sqrt{\lg^2 3 + 20}}{4}}$$

$$m) x - y = y^{-2} \\ y^3 - 4y^2 + 1 = 0$$

$$m) y - y = y^2 \\ \begin{cases} y^2 \\ y^2 \end{cases} \text{ корней нет}$$

$$1) 3y = \frac{1}{y^2} \\ \begin{cases} y = \sqrt[3]{3} \\ x = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

$$3y = y^2 \\ \begin{cases} y = 0 - \text{не под.} \\ y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{3}); (\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \sqrt[3]{3})$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (3; 9)$$

$$\left(\frac{10^{56}}{10^{a^2}}\right)^a = (10^6)^{2(a+6)}$$

$$10^{56a} = 10^{2ab + 26^2 + a^2}$$

$$a^2 - 3ab + 26^2 = 0$$

$$D_a = 9b^2 - 4 \cdot 26^2 = (26)^2$$

$$a = \frac{-36 \pm 56}{4} = -26; \frac{6}{2}$$

$$\lg x = \lg y^{+2} \text{ или}$$

$$x = y^{+2}$$

$$16 - 8y + y^2 = \frac{1}{y}$$

$$y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lg x^2 = \lg y^{+1}$$

$$x^2 = y^{+1}$$

$$y^3 - y^2 + 8y - 16 = 0$$

$$\begin{cases} 9y^2 = 4 \\ y = 0 \text{ (не под. по арг.)} \\ y = 2 \\ x = 27 \end{cases}$$

$$3y = y$$

$$y = 0 \text{ (не под.)}$$

$$\begin{cases} 9y^2 = \frac{1}{y} \\ y = \sqrt[3]{3} \\ x = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

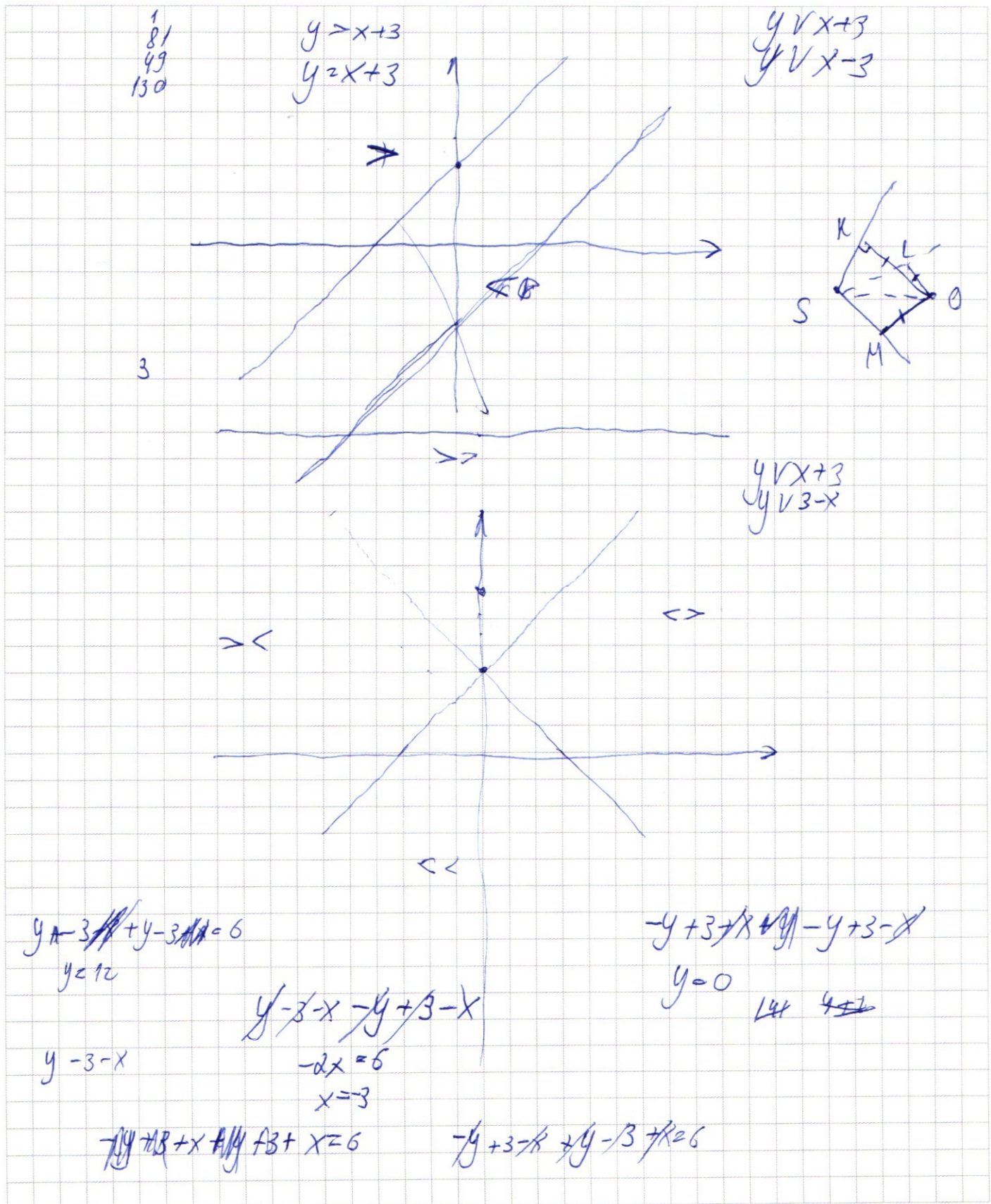
N7

При данных условиях выполняется:

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

Нетрудно подобрать x , при которых выполняется равенство ($x=6$, $x=70$). Тогда $x \in [7; 69]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha - \beta = y$$

$$\cos \alpha + \cos \beta$$

$$\cos \alpha \sin \beta$$

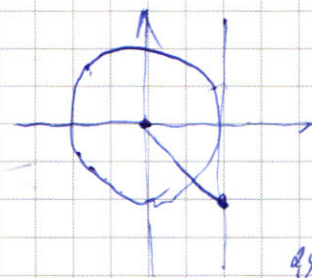
$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

⊗

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) =$$



$$y+4$$

$$x^2 - 2x(y+4) - 3y(y-4) = 0$$

$$a \log_a b = b$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = y - 4 \end{cases}$$



$$3y = 4$$

$$\frac{14}{10} \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{y}{3} \right)^{\lg 3y} = y^{\lg 3y^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{14 \cdot 10 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$20 + 2^{64} - x > 2^x \cdot 3 \cdot 2^{63}$$

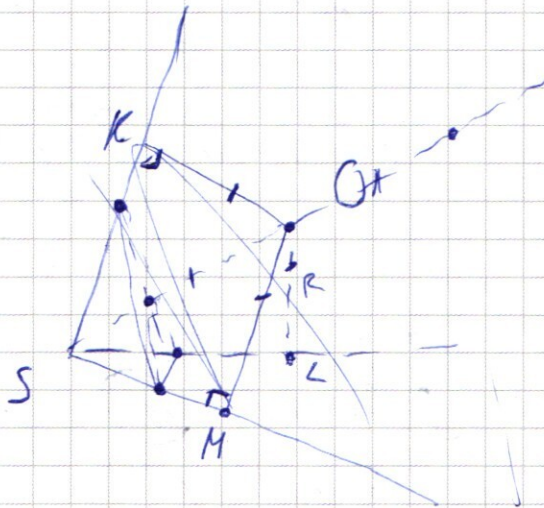
$$\begin{aligned} \lg x &= a \\ x &= 10^a \\ \frac{10^{56}}{10^{a^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{y^{\lg x^5}}{x^{\lg x}} = y^{\lg x^5} \cdot y^{\lg y^2}$$

$$y^{\lg x^3} \cdot x^{\lg y}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



53.3°

8!

- 6 АММА
- 5 МААМ
- 4 ММАА
- 3 ААММ
- 2 АМММ

1 МАМА

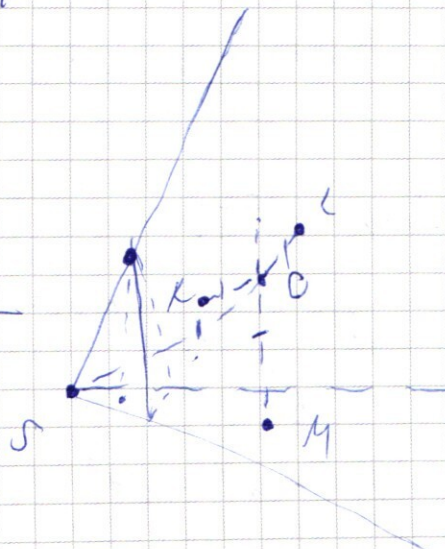
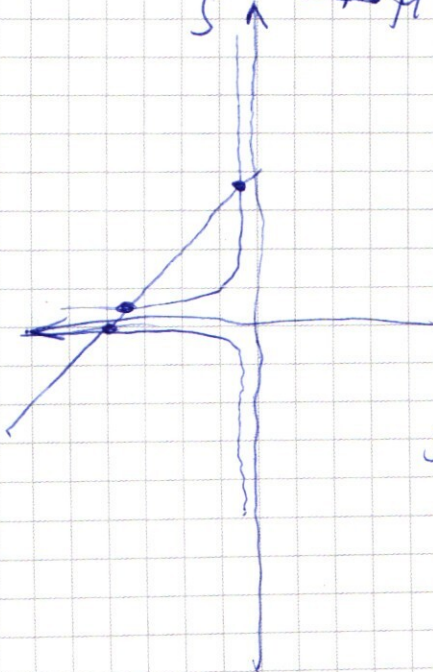
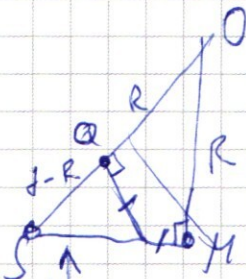
$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

МОРЕ
4!

$$\begin{array}{r} 125 \\ 27 \\ \hline 875 \\ + 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

7.8.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 1120 \\ \hline 156 \\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$



$$x^{\lg x} = x^a \quad a = \lg x$$

$$10^a = x$$

$$x^a = (10^a)^a = 10^{a^2}$$

$$10^{x^2}$$

$$y^{2 \lg y}$$

$$10^6 = y$$

$$y^{26} = 10^{26^2}$$

$$y^{\lg x^5} = y^{\lg x^3} \cdot y^{\lg x^2} = y^{\lg x^3} \cdot y^{\lg x^2} \cdot y^{\lg x^2} \cdot y^{\lg x^2} \cdot y^{\lg x^2}$$

$$y^{\lg x^5} = x^{\lg x}$$

$$x =$$

$$\frac{2y^2}{3y^2 - 8y}$$

$$y = 0$$

$$y = \frac{3}{8}$$

$$y^{\lg x^3} = 10^{\lg^2 x \cdot 10^{\lg^2 y}} = 10^{\lg^2 x \cdot 10^{2 \lg^2 y}}$$

$$2 \lg^2 y + \lg^2 x = 2 \lg y \cdot \lg x^3 = \lg x^3 \cdot \lg y = 3 \lg x \cdot \lg y$$

$$\lg x = a$$

$$x = 10^a$$

$$\lg y = b$$

$$y = 10^b$$

$$a^{\lg a} = c$$

$$\lg a = c \quad a = 10^c$$

$$a^{\lg a} = (10^c)^c = 10^{c^2}$$

$$a^{n \lg a} = (10^c)^{nc} = 10^{nc^2}$$

$$\frac{y^{\lg x^5}}{10^{x^2}} = 10^{2y^2} \cdot 10^{x^2} = 10^{2(x^2 + y^2)}$$

$$y^{\lg x^5} = 10^{3x^2 + 2y^2}$$

$$\lg x^5 = 3x^2 + 2y^2 = 5 \lg x \cdot \lg y$$

$$2y^2 = 5 \lg(y+3) = 5(\lg y + \lg 3) \lg y$$

$$\frac{10^{5ab}}{10^{a^2}} = 10^{5ab - a^2}$$

$$10^{5ab} = 10^{a^2 b(a+b)}$$

$$5ab = a^3 b + a^2 b^2$$

$$a = 0 \quad 5 = a^2 + ab$$

$$b = 0 \quad a^2 + ab - 5 = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1$$

$$\frac{1}{x} = 10 \quad x = \frac{1}{10}$$

$$\lg 3y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$y^5 = 10 \quad y = 10^{\frac{1}{5}}$$

$$b^2 = 10$$

$$2ab + 2b^2 - ad^2$$

$$\lg x = \lg y^{-2} \quad x \neq y^2 = 1$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 4 \\ 64 \\ 81 \\ 64 \\ 17 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 33 \\ 67 \\ 135 \\ 273 \\ 3 \end{array}$$

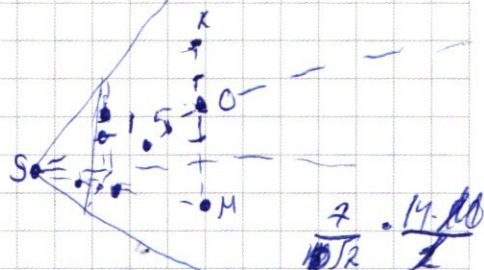
abcde

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$53.3^3 \quad \begin{array}{r} 81 \\ 49 \\ 130 \end{array}$$

$$-\sin 4x \cos 5x$$

$$\frac{1}{2} \sin 4(3x) + 11x$$



$$\left(\frac{45}{x}\right)^2 = y^2$$

$$(x-2)^2 + 4$$

$$(2x-1)^2 - 3x^2$$

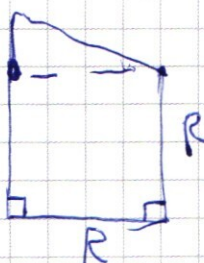
$$\sin(4x+7x) \sin(4x+7x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{10\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$x^2 - 2xy$$

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$



$$x = y + 2 + 2y - 2 = 3y$$

$$xz = y + 2 - 2y + 2 = 4 - y$$

$$\frac{y+103y}{3}$$

$$\lg x = a$$

$$\frac{45}{x} = \frac{45}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{45}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{45}{x^3}$$

$$y \lg y^2$$

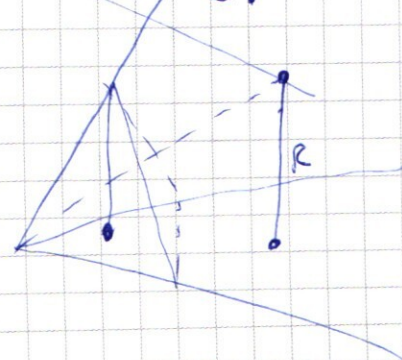
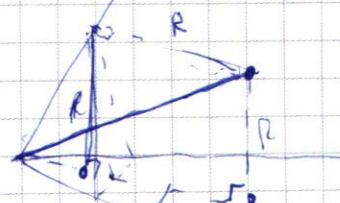
$$\lg y^2 = a$$

$$y^a = 10^a = y^2$$

$$y^2 = 10^a$$

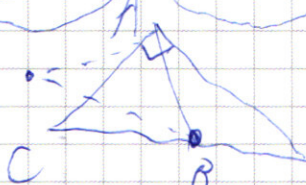
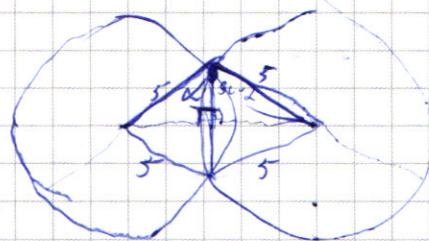
$$y^9 = (10^{\frac{a}{2}})^9$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 64 + 64 \\ 70 - 6 + 6 \cdot 264 \end{array}$$

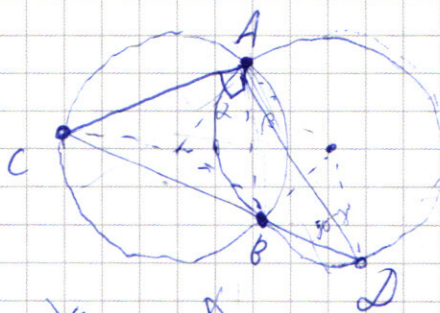


$$f'(x) = 2^{6x} - 1 - 2^x \ln 2$$

мысли

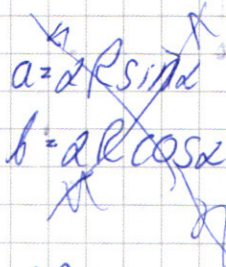


$$AB = R \sin \alpha_2$$
$$= R \cos \alpha$$
$$\text{tg } \alpha =$$



$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$



$$32 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 25 \cdot 2^{64} - 5$$

$x = 6$

$$64 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 3 \cdot 2^{65} - 6$$

$x = 7$

$$128 + 6 \cdot 2^{64} < 70 + 7 \cdot 2^{65}$$

$$x=4$$