

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

1) $y=0, x \in \mathbb{R}$
2) $x=3, y \in \mathbb{R}$
3) $y=6, x \in \mathbb{R}$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

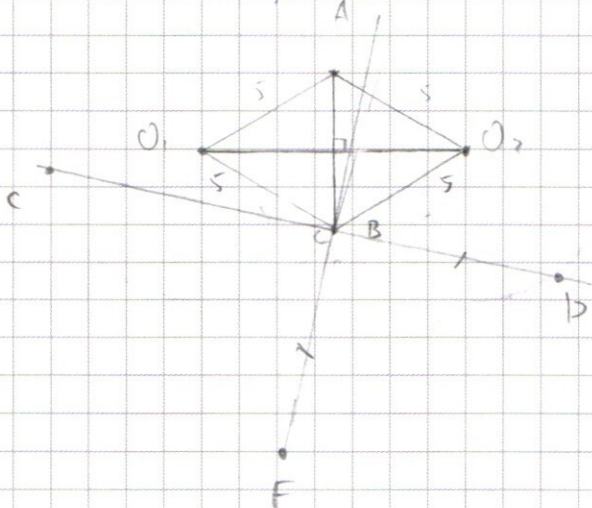
$$\begin{aligned} |y-3-x| + |y-3+x| &= 6 \\ \sqrt{((x)-4)^2 + ((y)-3)^2} &= a^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y-3-x| + |y-3+x| &= 6 \\ |-x| + |x| &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -1+x-1-x &= 6 \\ -2 &= 6 \\ x &= -3 \\ y-3 &= -3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad 1-x+1+x &= 6 \\ 2 &= 6 \\ x &= 3 \quad y-3=3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \cancel{1-x-1-x} \quad -1+x+1+x=6 \quad x=3$$

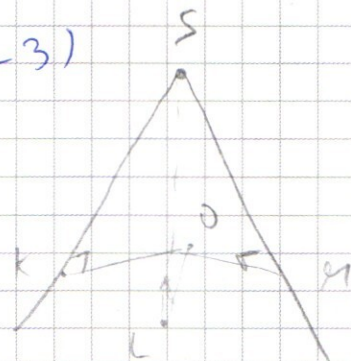


$$\text{I. } (4; 3)$$

$$\text{II. } (-4; 3)$$

$$\text{III. } (-4; -3)$$

$$\text{IV. } (4; -3)$$



$$\text{II и IV: } a=3 - \textcircled{1}, \quad a>3 - \textcircled{2}$$

IV:

$$\begin{aligned} y &\geq 2^x + 3 \cdot 2^{65} & y' &= 2^x \ln 2 \\ y &\leq 70 + 2^{64} \cdot x - x & y' &= (2^{64} - 1) \end{aligned}$$

~~ура~~

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= -\sqrt{2} \cos 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x \\ \sqrt{2} \sin 4x \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x + \cos^2 7x - \sin^2 7x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 7x (\cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x) + \sin 7x (\sqrt{2} \sin 4x - \sin 7x) &= 0 \\ a \cos 7x + b \sin 7x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \sin 7x &= -a \cos 7x & \lg 3y - 2 \lg 3y^2 \\ \tan 7x &= -\frac{a}{b} & y \\ 7x &= \arctan y \end{aligned}$$

$$\cos^2 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x + \sin^2 7x - \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x = 2 \sin 4x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = -\sin 7x + \cos 7x$$

$$\int y^x dx = x^y y - y^x \lg y$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$a^{\log_a a} =$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{8 - \sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$x = y + 2 \pm \sqrt{y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y} =$$

$$= y + 2 \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4}$$

$$= y + 2 \pm \sqrt{4(y-1)^2} = y + 2 \pm 2(y-1)$$

$$\log_a c = b$$

$$y^{\lg 3y - 2 \lg 3y - 2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$a^b = c$$

$$y^{\log_{10} 3} = 3^{\log_{10} y}$$

$$y^{2 \lg 3y - 2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$2 \lg 3 = \lg 3y \lg y 3$$

$$\lg 3y - \lg y = \lg 3$$

$$(y^{\lg 3})^2 = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg 3}$$

$$2 \lg 3 = (\lg 3 + \lg y) \frac{\lg 3}{\lg y}$$

$$2 \lg 3 = \lg 3y \lg y 3$$

$$2 \lg 3 = \frac{\lg 3y}{\lg y} \frac{\lg 3}{\lg y} = \frac{\lg 3 (\lg 3 + \lg y)}{\lg y} \quad 1 = 2 \lg^2 y + \lg y$$

$$3 \lg y (y - y) - 2 \lg y = \frac{3 \lg y}{y}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$a = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

3375 5	$3375 = 5^3 \cdot 3^3$	$\overline{abcdefgh} : \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 560.$
675 5		$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140.$
135 5	I $1^2 \cdot 5^3 \cdot 3^3$	$\frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840.$
27 3	II $1^3 \cdot 5^3 \cdot 9 \cdot 3$	
9 3		
3 3		
1		

$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}$

N2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$
 $-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x \quad | \cdot (-1)$
 $2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\sqrt{2} \sin 4x \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x \sin 4x - (\cos^2 7x + \sin^2 7x) = 0$
 $\sin 7x (\sqrt{2} \sin 4x + \sin 7x) + \cos 7x (\sqrt{2} \sin 4x - \cos 7x) = 0.$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 175 \\ \hline 277 \\ \hline 875 \\ \hline 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x.$$

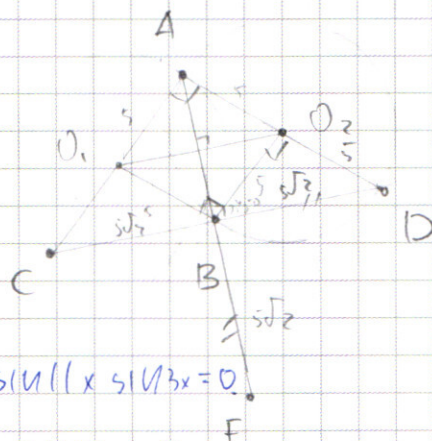
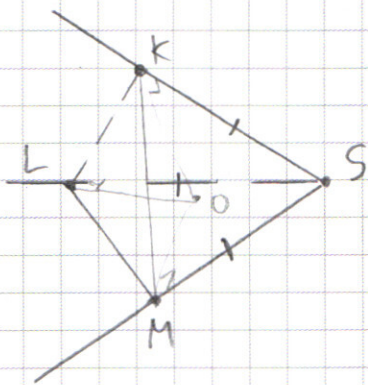
$$-2 \sin \frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \sin 4x = \cos 4x.$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x =$$

N3. $\int \left(\frac{y^5}{x} \right)^{2x} = y^{2y} x^y$ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$

$$y^{2y} x^y = x^y \cdot y^{2y} = x^y y^{2y}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y &= 0 \\ (x-y)^2 - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned}$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x = 0.$$

$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x + \sin 11x (\sqrt{2} \sin 3x - 1) + \sin 3x = 0.$$

$$-\sqrt{2} \sin (11x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin (3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x, \quad \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\sin (3x - \frac{\pi}{4}) - \sin (11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$$

$$2 \sin (7x - \frac{\pi}{4}) \cos (7x) = \cos 4x \quad 2 \cos^2 2x - 1.$$

$$2 \cos^2 7x - 2 \sin (7x - \frac{\pi}{4}) \cos 7x - 1 = 0.$$

$$\cos 7x = \frac{\sin (7x - \frac{\pi}{4}) \pm \sqrt{\sin^2 (7x - \frac{\pi}{4}) + 2}}{2}$$

$$y^{\log x} = x^{\log x} \cdot y^{\log x + \log y} \quad 8n+4=$$

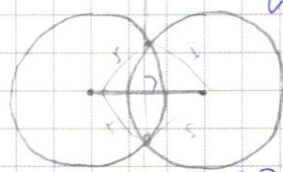
$$(y^{\log x})^5 = (y^{\log x})^2 \cdot y^{\log y} \cdot x^{\log x} \cdot \left(\frac{1}{y^{\log x}}\right)^2$$

$$y^{\log x} = y^{\log y} \cdot x^{\log x} \quad 224 \quad 5 \quad 44$$

$$4+2244 \quad 36 \quad 176$$

$$8n+4 \equiv 0 \quad 36 \quad 176$$

$$y^{\log x} = y^{\log y} \cdot x^{\log x} \quad 8n+4=36 \quad 8n=32 \quad n=8$$



$$8n+4=36$$

$$72l+4$$

$$n=9l$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2}$$

$$176 \mid 3 \quad a^{\log a} = C$$

$$-16 \mid 2 \quad a^{\log a} = C$$

$$\log a = \log_a C$$

$$\log_{10} a = \log_a C$$

$$\frac{1}{\log_{10} a} = \log_a C$$

$$1 = \log_a C$$

$$\log_a C = \log_a a$$

$$\log_a C = \frac{1}{\log_{10} a} \quad n=9l+4$$

$$1 = \log_{10} \log_a C$$

$$\log_a C = \frac{1}{\log_{10} a}$$

$$C = a^{\frac{1}{\log_{10} a}}$$

$$a^{\log_{10} 10} = 10.$$

$$\log_a b = c$$

$$a^c = b.$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$a^c = \log_a b$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$(x=1) \begin{cases} y > 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} - 1 \end{cases}$$

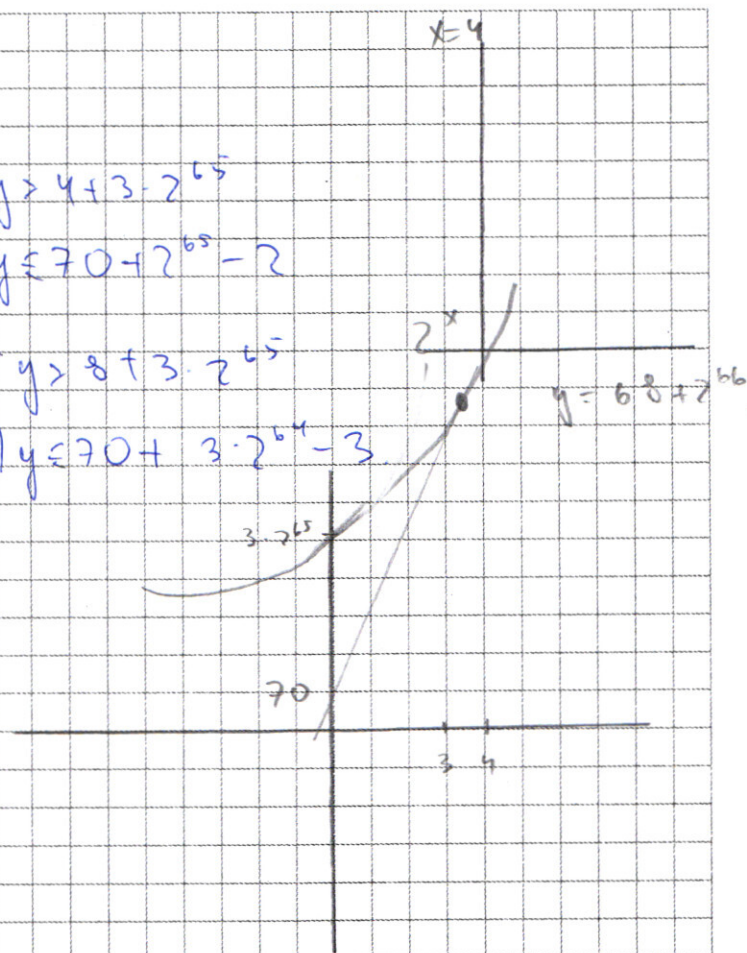
$$(x=2) \begin{cases} y > 4 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{65} - 2 \end{cases}$$

$$(x=4) \begin{cases} y > 16 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{66} - 2 \end{cases}$$

$$(x=3) \begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 3 \end{cases}$$

или

$$y \geq 70 + 2^{66} - 2$$



$$(x=64) \begin{cases} y > 2^{64} + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{70} - 1 \end{cases} \quad \text{X}$$

$$x = 1024$$

$$(y=1024) \begin{cases} y > 2^{1024} + 3 \cdot 2^{65} \\ y < 70 + 2^{74} - 1024 \end{cases} \quad \text{V}$$

$$(x=5)$$

$$\begin{cases} y > 7^5 + 3 \cdot 2^{65} \\ y < 70 + 5 \cdot 2^{64} \end{cases} \quad \text{V}$$

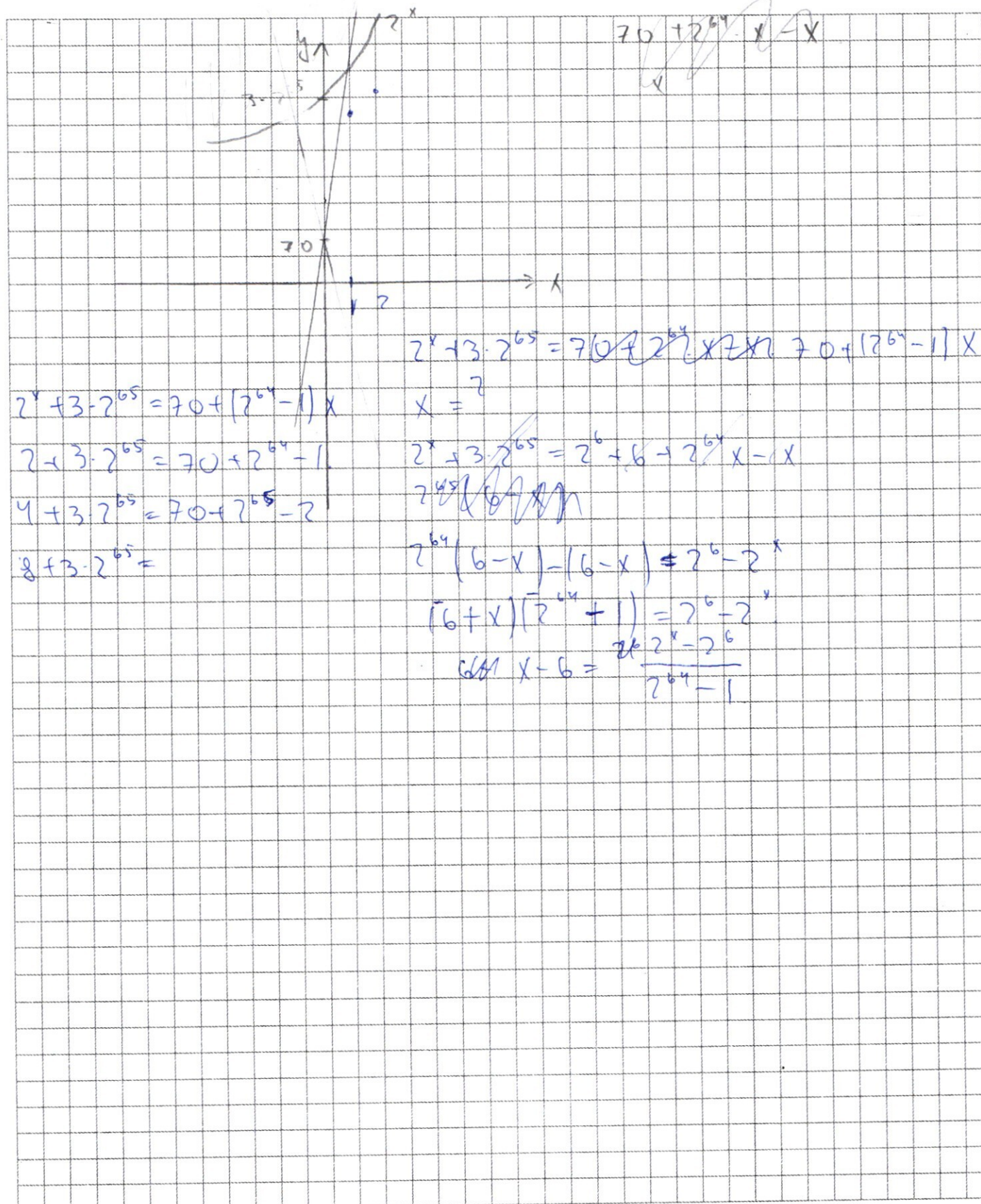
$$(y=512) \begin{cases} y > 2^{512} + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{73} \end{cases} \quad \text{V}$$

$$y=80 \quad \begin{cases} 2^{80} \\ 80 \cdot 2^{64} \end{cases} \quad \text{V}$$

$$(y=128) \quad y > 2^{128} +$$

$$(y=100) \begin{cases} y > 2^{100} + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 100 \cdot 2^{64} \end{cases} \quad \text{V}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N1) $3375 = 3^3 \cdot 5^3$

В восьмизначном числе могут быть такие цифры как:

1) 3, 3, 3, 5, 5 и 2, 1. Чисел такого вида:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 10 = 560.$$

2) 1, 9, 1, 3, 3, 5 и ~~3, 1~~ 3, 1. Их всего:

$$\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 20 = 1120.$$

В итоге: $560 + 1120 = 1680$.

Ответ: 1680

(N2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x. \iff$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \iff$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

Предположим, что $\sin 7x + \cos 7x \neq 0$:

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \iff -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x)$$

$$2 \sin 4x = 2 \sin (7x - \frac{\pi}{4}) \iff \sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4}) = 0. \iff$$

$$2 \cos (\frac{1}{2}(3x + \frac{\pi}{4})) \cdot 2 \sin (\frac{1}{2}(-3x + \frac{\pi}{4})) \cos (\frac{1}{2}(11x - \frac{\pi}{4})) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 & \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k \\ 11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} & (1) \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} & (2) \end{cases} \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Однако: $\sin 7x + \cos 7x \neq 0$.

$$\sqrt{2} \sin (7x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$x \neq -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \quad (*)$$

$k \in \mathbb{Z}$

Посмотрим, пересекаются ли множества (1) и (*), (2) и (*).

$$(1) u(k): \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi u}{3} = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \quad | \cdot \frac{28}{\pi} ; \quad \frac{28}{12} + \frac{56u}{3} = -1 + 4k \quad | \cdot 12 ;$$

$$28 + 224u = -12 + 36k$$

$$k = \frac{40 + 224u}{36} = \frac{36 + 4 + 216u + 8u}{36} = 1 + 6u + \frac{8u+4}{36}$$

Чтобы сохранить целочисленность: $u = 9l + 4, l \in \mathbb{Z}$.

Пересечением мн-в (1) и (*) является $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi u}{3}$,

$$u \neq 9l + 4, u, l \in \mathbb{Z}.$$

$$(7) u(k): \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi u}{11} = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} ; \quad \frac{140}{44} + \frac{56u}{11} = -1 + 4k ;$$

$$140 + 224u = -44 + 176k$$

$$k = \frac{184 + 224u}{176} = \frac{176 + 8 + 176u + 48u}{176} = 1 + u + \frac{48u+8}{176} = 1 + u + \frac{6u+1}{22}$$

~~число~~ $\frac{6u+1}{22} \notin \mathbb{Z}$, т.к. числ. нечетный, в отличие от знаменателя. Мн-ва не пересекаются.

При $\sin 7x + \cos 7x = 0$ ур-ие выполняется.

$$\tan 7x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi u}{7}, u \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi u}{7}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi u}{11}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi d}{3}, d \neq 9l + 4$$

$$u, d, l \in \mathbb{Z}.$$

$$(N3) \int \left(\frac{y^5}{x}\right)^{p_y x} = y^{2p_y x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Решим второе ур-е относительно x .

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x = y+2 \pm \sqrt{y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y} = y+2 \pm \sqrt{4(y^2 - 2y + 1)} = y+2 \pm 2|y-1| =$$

$$= y+2 \pm (2y-2) \text{ (раскрытие модуля приведет к тому же результату)}$$

$$\begin{cases} x = y+2+2y-2 \\ x = y+2-2y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases}$$

Обратимся к первому ур-ю системы:

$$\begin{cases} \int \left(\frac{y^5}{x}\right)^{p_y x} = y^{2p_y x y} \\ x = 3y \end{cases} \quad \text{--- имеет смысл при } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \int \left(\frac{y^5}{x}\right)^{p_y x} = y^{2p_y x y} \\ x = -y+4 \end{cases} \quad (2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$, $y^{5\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2}$,
 $y^{5\lg 3y - \lg 3y - 2\lg 3y^2} = 3^{\lg 3y}$, $y^{2\lg 3y} = 3^{\lg 3y}$, $2\lg 3 = \lg 3y \log_y 3$ ($y \neq 1$)
 $2\lg 3 = (\lg 3 + \lg y) \frac{\lg 3}{\lg y}$; $2 = \frac{\lg 3 + \lg y}{\lg y}$; $1 = \frac{\lg 3}{\lg y}$; $y = 3$.
 $x = 3y = 9$. $(9, 3)$

2) $\left(\frac{y^5}{-y+4}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2\lg(-y^2+4y)}$, $y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg(y(4-y))}$
 $y^{5\lg(4-y) - 2\lg y - 2\lg(y(4-y))} = (4-y)^{\lg(4-y)}$
 $3\lg(4-y) - 2\lg y = \lg(4-y) \log_y(4-y)$; $3\lg(4-y) - 2\lg y = \lg(4-y) \frac{\lg(4-y)}{\lg y}$

Заменим: $\lg(4-y) = a$, $\lg y = b$

$3ab - 2b^2 = a^2$; $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$a = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{2} = \frac{3b \pm b}{2} = \begin{cases} 2b \\ b \end{cases}$

$\begin{cases} \lg(4-y) = 2\lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{cases} \quad \begin{cases} 4-y = y^2 \\ 4-y = y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad (y > 0)$

$y = 2$; $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$

Ответ: $(9, 3)$; $(2, 2)$; $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

WS $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$
 $|(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

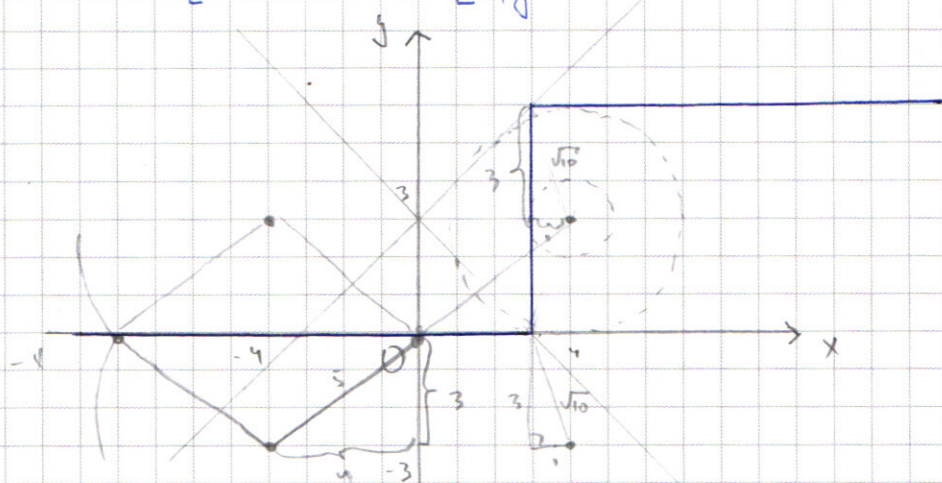
Рассмотрим первое ур-е, при этом $t = y - 3$.

$|t-x| + |t+x| = 6$

$$\begin{cases} -t+x-t-x=6 \\ t \leq -x \\ -t+x+t+x=6 \\ -x \leq t \leq x \\ t-x+t+x=6 \\ t \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -3 \\ t \leq -x \\ x = 3 \\ -3 \leq t \leq 3 \\ t = 3 \\ t \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y \leq 3-x \\ x = 3 \\ 0 \leq y \leq 6 \\ y = 6 \\ y \geq x+3 \end{cases}$$



Второе уравнение задает четыре окр-ти с координатами $(4; 3)$; $(4; -3)$; $(-4; 3)$; $(-4; -3)$, каждая из к-рых ограничена ~~линейными~~ лучами Ox , Oy , $O-x$, $O-y$.

Центр окр-ти в I кв. касается ломаной. Окр-ть пересечет её в двух точках (система имеет ^{два} решения) при $a \in (1; 3)$.

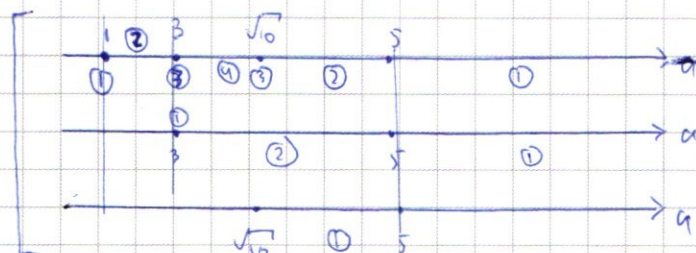
При $a=1$ произойдет касание, при $a=3$ окр-ти в II и III кв. коснутся ломаной.

Рассмотрим по отдельности окр-ти:

- ① При $a=1$ — 1 точка
 При $a \in (1; 3)$ — 2 точки
 При $a=3$ — 3 точки
 При $a \in (3; \sqrt{10})$ — 4 точки
 При $a=\sqrt{10}$ — 3 точки
 При $a \in (\sqrt{10}; 5]$ — 2 точки
 При $a > 5$ — 1 точка.

- ② и ③ При $a=3$ — 1 точка
 При $a \in (3; 5]$ — 2 точки
 При $a > 5$ — 1 точка.
 ④ ~~При $a=\sqrt{10}$ — 1 точка~~
 При $a \in [\sqrt{10}; 5]$ — 1 точка

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Т.о. два решения
будут при $a \in (1; 3) \cup$
 $V(5; +\infty)$

Ответ: $a \in (1; 3) \cup V(5; +\infty)$.

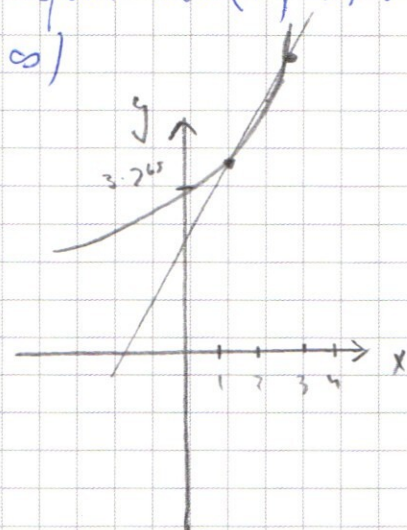
(W7) $\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} - \text{экспонента} \\ y \leq 70 + x(2^{64} - 1) - \text{прямая} \end{cases}$

(X=1) $\begin{cases} y > 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64} - 1 \end{cases}$ прямая ниже

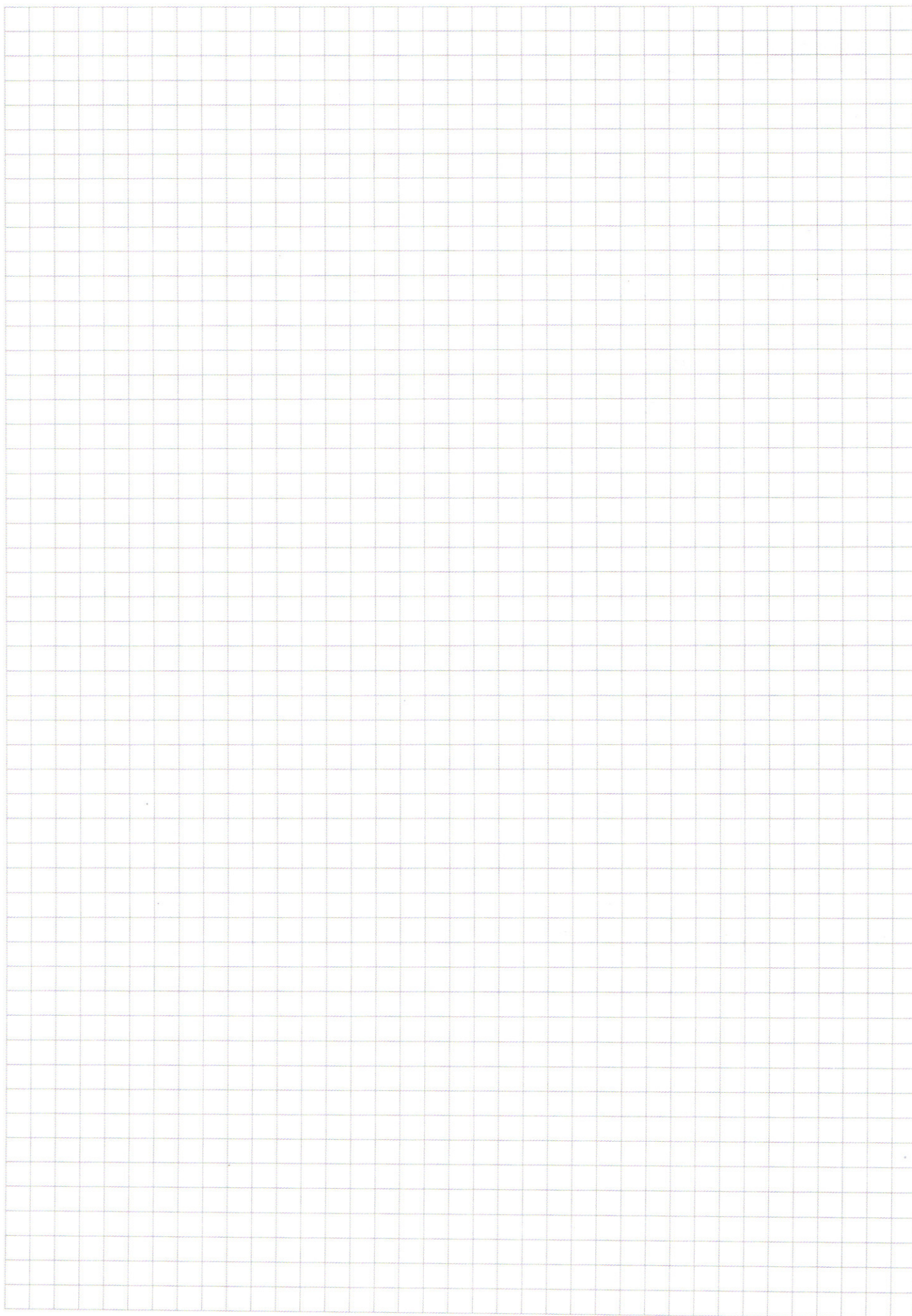
(X=2) $\begin{cases} y > 4 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{65} - 2 \end{cases}$ экспонента выше

(X=3) $\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 3 \end{cases}$ экспонента выше

(X=4) $\begin{cases} y > 16 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{66} - 4 \end{cases}$ прямая выше



Ф-ции пересекаются в точке $3 < x < 4$, т.е. мин-во
целых чисел начинается с $x=4$, $y=70+2^{66}-4$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)