МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$

Значит в нашем числе должно быть либо 3 тройки и 3 пятерки (остальные цифры 1), либо 1 девятка, 1 тройка и 3 пятерки. ($3^3, 5^2, 5^3 > 9$, значит они не могут являться цифрами).

В первом случае:

Выберем 6 мест из 8 в числе, куда мы поставим наши цифры, оставшиеся 2 будут 1. (порядок мест не важен). В выбранных местах у нас есть 6! перестановок чисел, но каждых чисел (3 и 5) есть по 3, а их порядок не важен. Тогда итоговое число сочетаний:

$$C_8^6 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{\frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

Во втором случае:

Аналогично выберем 6 мест и посчитаем перестановки:

$$C_8^6 \cdot \frac{6!}{3!} = 560 \cdot 6 = 3360$$

Ответ: $560 + 3360 = \boxed{3920}$

№2

$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x + 2\sin(-4x) \cancel{\sin} \cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2(\sin 4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\cos 7x + \cancel{\cos}\sin 7x = 0 \Rightarrow \cancel{\sin 7x = -\cos 7x}$

$\frac{2}{\sqrt{2}} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, \ n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, \ n \in Z$

Сократим на $(\sin 7x + \cos 7x)$

$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x - \sin 7x)$

$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$

$\sin 4x \cancel{\ } + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(1,5x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(5,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

1) $1,5x + \frac{\pi}{8} = \pi k, \ k \in Z$

$\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{8} + \pi k, \ k \in Z$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in Z$

2) $5,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi r, \ r \in Z$

$\frac{11}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi r, \ r \in Z$

$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi r}{11}, \ r \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, \ n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in Z$

$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi r}{11}, \ r \in Z$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Пусть $\lg x = a$, $\lg y = b$, тогда $x = 10^a$, $y = 10^b$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x, y > 0$

(1) $\frac{10^{5b \cdot a}}{10^{a^2}} = 10^{2b \cdot a} \cdot 10^{2b^2}$

$10^{5ab - a^2} = 10^{2b(a+b)}$

$\Updownarrow$

$5ab - a^2 = 2b(a+b)$

$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ – решаем относительно a

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \frac{3b \pm b}{2} = b; 2b$

1) $a = b \Rightarrow \lg x = \lg y \Rightarrow x = y$

Тогда:

(2) $x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ – не подходит по ОДЗ

$x = 2$ – корень $y = 2$

2) $a = 2b \Rightarrow \lg x = 2\lg y \Rightarrow x = y^2$

Тогда:

(2) $y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$

Заметим, что $y = 3$ – корень

Значит по теореме Безу многочлен делится на $y-3$.

~~Тогда~~ $y^3 - 2y^2 - 7y + 12 \mid y - 3$

$$\begin{array}{l|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y-3 \\ \hline y^3 - 3y^2 & y^2 + y - 4 \\ \hline \quad y^2 - 7y + 12 & \\ \quad y^2 - 3y & \\ \hline \quad\quad -4y + 12 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Получим:

$y(y-3)(y^2+y-4)=0$

Корни:

$y=0$ – не подходит по ОДЗ

$y=3 \Rightarrow x=9$

$y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$ – не подходит по ОДЗ

$y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}>0$ (т.к. $\sqrt{17}>\sqrt{16}=4$, $4-1=3>0$)

$x=\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}>0$

Ответ: $(2;2)$; $(9;3)$; $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

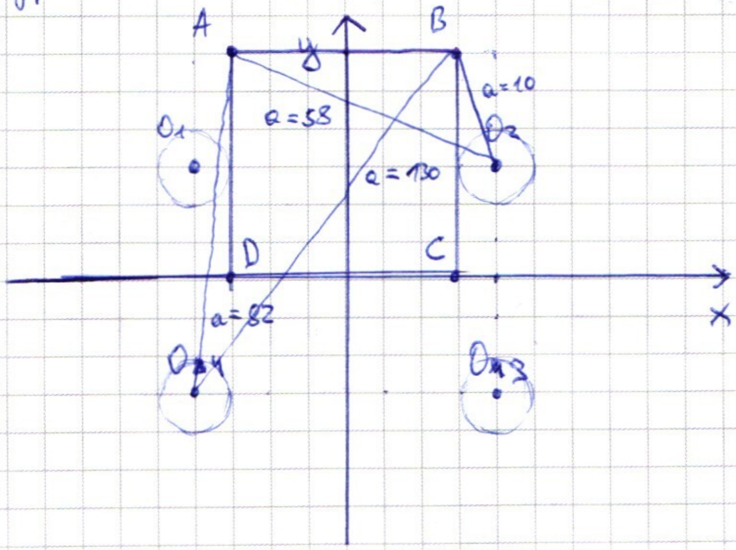
$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \quad (2) \end{cases}$$

Построим графики функций (1) и (2).

(2) – 4 окружности с координатами центров в $(4;3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$; $(4;-3)$

и радусом $\sqrt{a}$

(1) – квадрат со стороной 6 и центром в $(3;3)$



1) Очевидно, что при $a \le 0$ решений не будет (~~вершины~~ центры окружностей не лежат на сторонах квадрата)

2) При $a = 1$ окружности O_1, O_2 касаются сторон AD, BC квадрата, решений 2.

3) При $a \in (1; 10)$ $(O_1D = O_1A = O_2B = O_2C = \sqrt{3^2+1^2} = 10)$ окружности O_1 и O_2 будут ~~касаться сторон квадрата~~ пересекать стороны квадрата и решений более 2.

4) При $a = 10$ ~~стороны квадрата~~ все окружности будут пересекать какие-то из вершин квадрата, корней > 2

5) При $a = (AO_3)^2 = 3^2 + 7^2 = 58$ окружности O_1, O_2 будут пересекать вершины квадрата, корней > 2

6) При $a = \cancel{64}\ 9^2 + 1^2 = 82 = (O_3B)^2$ окружности O_1 и O_2 не будут пересекать/касаться квадрата, O_3 и O_4 будут пересекать стороны и вершины A, B квадрата.

7) При $a = (AO_3)^2 = (7^2 + 9^2) = 130$ только O_3 и O_4 будут пересекать A, B, решений 2

8) При $a > 130$ ни одна из окружностей не пересекает квадрат.

Ответ: $a = 1;\ 130$

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$2^x = a \quad x = \log_2 a$

$$a + 3 \cdot 2^{65} \geq 70 + (2^{64} - 1)\log_2 a$$

$$a + \cancel{3}\, 2^{64}(6 - \log_2 a) \geq 70 - \log_2 a$$

При $a \in (0; 64]$ решения есть

$a = 64$

$64 \geq 70 - 6 \Rightarrow \cancel{x \in (0;}$

$x \in [1; 6]$

~~$x = 2$~~

~~$y > 4 + 3 \cdot 2^{65}$~~

При $x = 2$:

$y > 4 + 3 \cdot 2^{65}$

$y \leq 70 + 2^{65} - 2$

Решений: $2^{65}(3 - 1) - 64$

При $x = 3$:

$x = 1$

$y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$

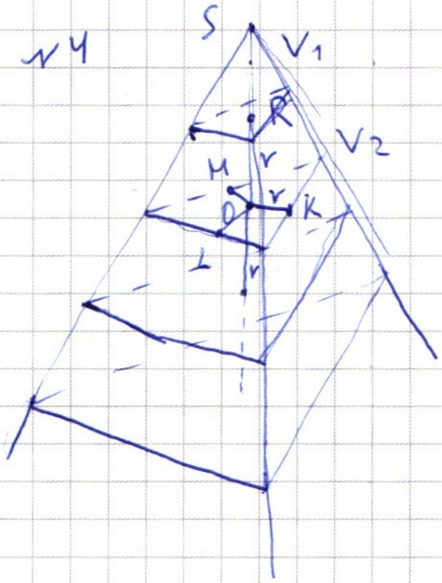
$y \leq 70 + 2^{64} - 1$

$2 + 3 \cdot 2^{65} - 69 - 2^{64} =$

$= 2^{64}(6 - 1) - 67$ – решений

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Обозначим пересечение SO с верхней плоскостью за R, тогда заметим, что объем верхней пирамиды (ограниченной 3х гранным углом и верхней плоскостью) равен $V_1 = \frac{1}{3} \cdot SR \cdot 1$.

Объем пирамиды, ограниченной нижней плоскостью, равен $V_2 = \frac{1}{3}(SR + 2r) \cdot 4$ (где r – радиус сферы).

Так как обе пирамиды имеют одинаковый 3х гранный угол, ~~то их и~~ и параллельные основания, то их можно считать подобными, значит $\frac{SR}{SR+2r} = \sqrt{\frac{1}{4}}$ $SR = 2r$

Значит $tg \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$

Пирамиду, основанием которой является сечение угла плоскостью KLM, аналогично можно считать подобной двум другим.

Значит $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{2r}{3r}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{9}{4}$

Ответ: $S = \frac{9}{4}$; $\angle KSO = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$

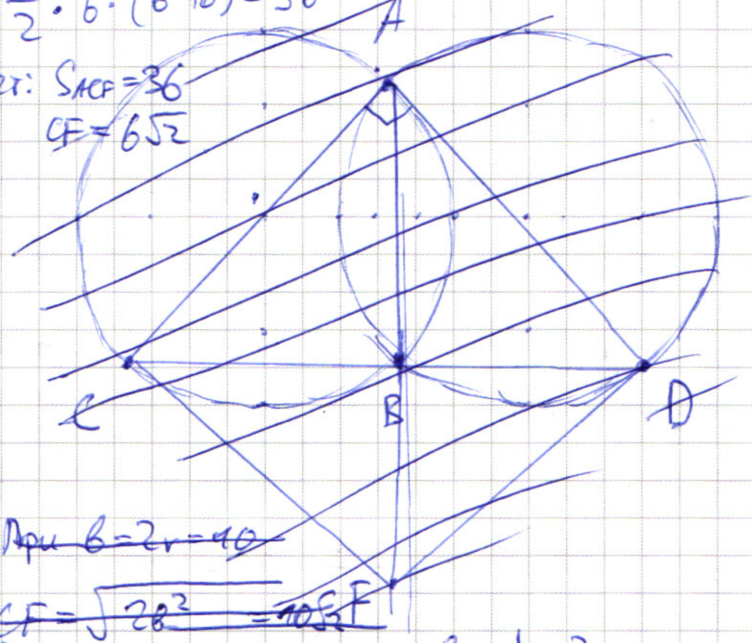
№ 6

6) $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6+6) = 36$

Ответ: ~~$S_{ACF} = 36$~~

~~$CF = 6\sqrt{2}$~~



5) ~~При $b = 2r = 10$~~

~~$CF = \sqrt{2b^2} = 10\sqrt{2}$~~

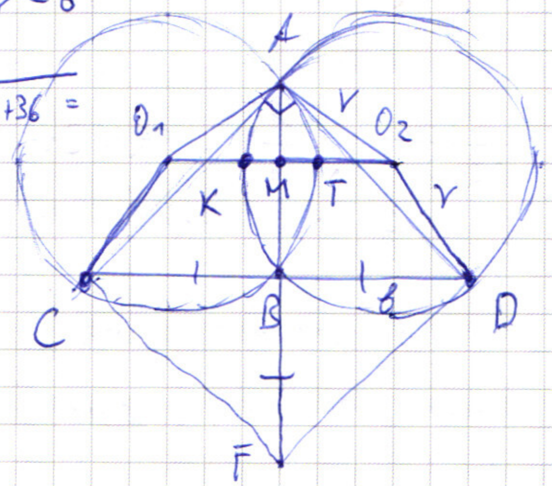
$b = 2r$ – не подходит, $b < d = 2r$

$b = 1{,}2r = 6$

$\Downarrow$

$CF = \sqrt{36+36} =$

$= 6\sqrt{2}$



2) Пусть $BD = b = BC$

(Рисунок симметричен относительно AB)

Тогда $AB^2 + BD^2 = AD^2$ (из $\triangle ABD$)

Пусть $AD = y \Rightarrow AB = 2a$, $BD = b$

$4a^2 + b^2 = y^2$ А из $\triangle CAD$: $2y^2 = 4b^2$ $y^2 = 2b^2$

Вверх ↑

3) $4a^2 + b^2 = 2b^2$

$a^2 = \frac{b^2}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{b^2}{4} + (r-x)^2 = r^2$

Заметим, что $2(r+x) = CD = 2b$

$\Downarrow$

$r + x = b$

$x = b - r$

$b^2 + 4(r - b + r)^2 = 4r^2$

$b^2 + 16r^2 - 16br + 4b^2 = 4r^2$

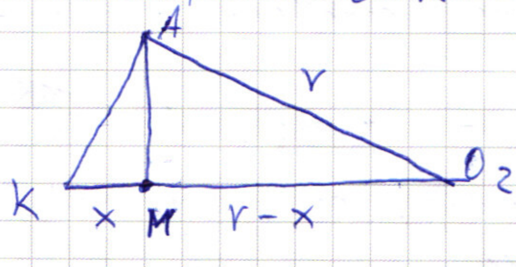
$5b^2 - 16br + 12r^2 = 0$

$D = 16r^2$

$b = \frac{16r \pm 4r}{10} = 2r; 1{,}2r$

1) Заметим, что $O_1O_2 \perp AB$.

Рассмотрим $\triangle O_2AK$:



$AO_2 = O_2K = r$

$AM = a$

Тогда: ~~…~~ $a^2 + (r-x)^2 = r^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

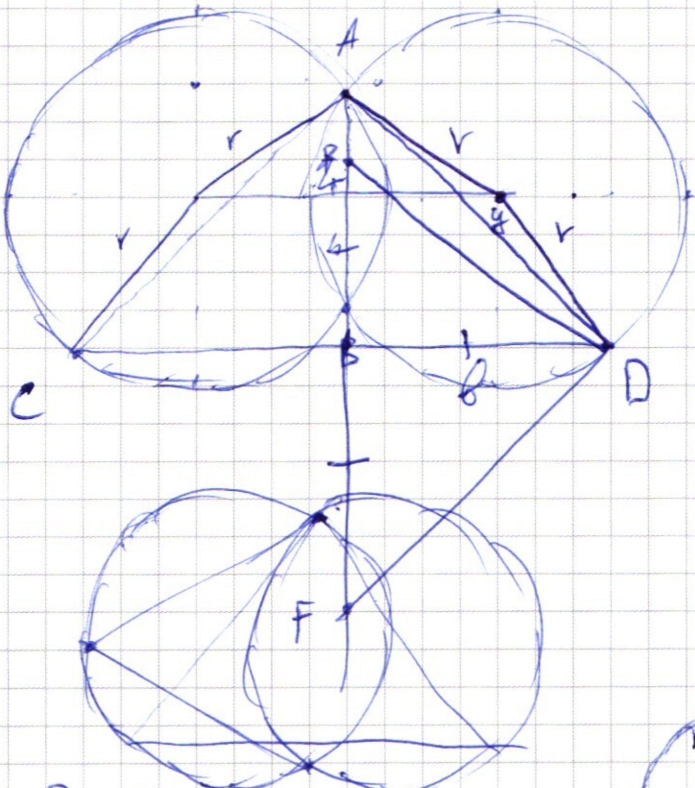
б)

$1{,}44r +$

$a - \frac{b}{2}$

256

16



$b = 1{,}2r$

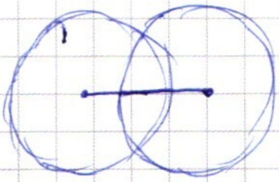
$a = \frac{b}{2} = 0{,}6r$

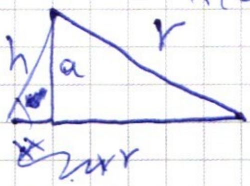
$a^2 + (r-x)^2 = r^2$

$a^2 = r^2 - (r-x)^2 =$

$= (r - r + x)(r + r - x) =$

$= x(2r - x)$





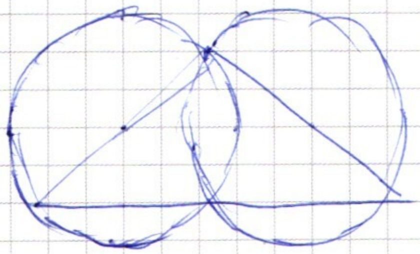
$4a^2 + b^2 = y^2$

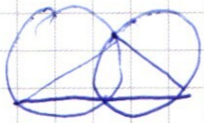
$2y^2 = 4b^2$

$y^2 = 2b^2$

$4a^2 + b^2 = 2b^2$

$4a^2 = b^2$

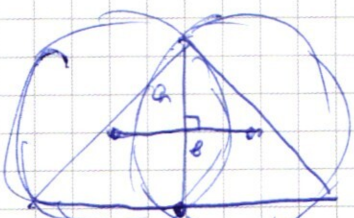


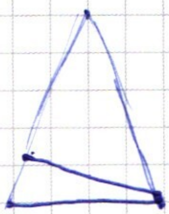


$b^2 + \overset{4a^2}{} 16r^2 - 16br + 4b^2 = 4r^2$

$a^2 + b^2 = r^2$

$a^2 = \frac{b^2}{4}$





$r + r + 2x = 2b$

$r + x = b$

$x = b - r$

$\frac{b^2}{4} + (r-x)^2 = r^2$

$b^2 + 4(r - b + r)^2 = 4r^2$

$b^2 + 4(2r - b)^2 = 4r^2$

$5b^2 - 16br + 12r^2 = 0$

$D = 16r^2$

$b = \frac{16r \pm 4r}{10} = 2r; 1{,}2r$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 14x$

$2\sin(-4x)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 11x - 3x}{2}\right) = 2\cos 14x$

$-2\sin 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 2\cos 14x$

$-\sin 4x \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cancel{2}\cos 14x$

$-\sin 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\sin}\cos 7x - \sin 7x) = \cos 14x$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x - \cos 7x) = 2\cos 14x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - \sin^2 x + \cos^2 x - 1 =$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x - \cos 7x) = 2(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\cos 7x = -\sin 7x$ — корень $\left(x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n ?\right)$

$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x - \sin 7x)$ $\quad$ $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$

$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

sin решено

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3) $\{ y$

$\lg x \neq 1$

$10^{\lg x} = \cancel{x}$

$\lg x = a \quad \lg y = b$

$x = 10^a \quad y = 10^b$

$$\frac{10^{5b \cdot a}}{10^{a^2}} = 10^{2ab} \cdot 10^{2b^2}$$

$$10^{5ab - a^2} = 10^{2b(a+b)}$$

$$5ab - a^2 = 2b(a+b)$$

$\Downarrow$

$b(5a - 2a - 2b) = a^2$

$5ab - 2ab - 2b^2 = a^2$

$\cancel{a^2 + 2ab + 2b^2 +}$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$x^2 - 2xy - 3y^2$

$3y(-y+4)$

$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$

$(x-y)^2 - 4(y^2 - 3y + x) = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 \mid y-3$

$y^3 - 3y^2 \qquad y^2 + y - 4$

$y^2 - 7y + 12$

$y^2 - 3y$

$-4y + 12$

$-4y + 12$

0

$\cancel{y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y \mid y-3}$

$\cancel{y^4 - 3y^3 \qquad y^3}$

$\cancel{y^3 - 7y^2 + 12y}$

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 \mid y-3$

$y^3 - 3y^2 \qquad y^2 + y$

$y^2 - 7y + 12$

$y^2 - 3y$

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} = b;\ 2b$$

1) $a = b$

$\lg x = \lg y$?

$x = y$

$y(y-3)($

$9 - 21$

-21
9
12

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \quad x^2 - 2xy - 4x + 3y(4-y)$

$81 - 54 - 63 + 36 = 0$

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$1 + 2 - 7 - 12$

$(x$

$16 - 16 - 28 + 28$

$16 + 16 - 28 - 24$

2) $a = 2b$

$\lg x = 2\lg y$

$x = y^2$

$+\ 81 \quad 36 \quad 117$

$-\ 117 \quad 63 \quad 54$

$y = 3$

$y = 0$

$y = ?$

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$-4x^2 - 4x + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$4x^2 - 8x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0 \qquad x = 0; 2$

$y = 0; 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) _ _ _ _ _ _ _ _

$3375 = \cancel{15} \, 5^3 \cdot 3^3$

$3375 : 25 = 135$

$135 : 5 = 27$

$C_8^6 \cdot$ перестановки 3 и 5

$$\frac{C_8^6 \cdot C_6^3}{3! \cdot 3!} = \frac{\frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!}}{3! \cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot 2} =$$

$$= \frac{7\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}}{3\cdot 3\cdot \cancel{3\cdot 2}} = \frac{7\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 3} =$$

$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 6!$

$$\frac{6!}{6\cdot 6} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{6\cdot 3\cdot 2}} = 20$$

$$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 20 = 560$$

2) $tgx = \log_{10} x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x \sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = -2\sin 4x \cos 7x$

~~$\sin 7x \sin 4x$~~ $\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14x$

$\cos 14x = 2\cos^2 7x - 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos\alpha - \cos\beta$

$\alpha+\beta = a$
$\alpha-\beta = b$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \cancel{\cos\alpha\ \beta}\cos\frac{a+b}{2}$
$\cos\beta = \cos\frac{a-b}{2}$

$\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\frac{b}{2} =$

$= -2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{\sin 3x}$
$\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a-b}{2} =$
$= \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2} -$
$- \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2} =$
$= 2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}$

$-2\sin 7x \sin 4x$ $\cancel{+}$ $-$
$\cancel{+}$ $2\sin 4x\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\to -2\sin 7x\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos^2 7x - \sqrt{2}$
$+ 2\sin 4x\cos 7x$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin 7x + \cos 7x - ?$

$-2\sin 7x\sin 4x = 2\cos 7x(\sqrt{2}\cos 7x + \sin 4x)$

$\sqrt{2}\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14x$

$-2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\sin 4x\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos 14x$ $\quad -\sqrt{2}$

$\begin{cases} 8x = \cancel{...}\ \alpha-\beta \\ 14x+\frac{\pi}{2} = \ \alpha+\beta \end{cases}$ $\quad 2\alpha = 22x + \frac{\pi}{2}$
$\alpha = 11x + \frac{\pi}{4}$
$\beta = 3x + \frac{\pi}{4}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$
$(x-y)^2 - 4(y^2 + x - 3y) = 0$

$-\cancel{2}\sin 4x\sin(7x+\frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$\sin(11x+\frac{\pi}{4}) + \sin(3x+\frac{\pi}{4}) = -\cos 14x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$

$y^{\lg x} = a \quad x^{\lg x} = b$ $\quad \frac{a^5}{b} = \cancel{y^{2\lg x}}\ \cancel{2+1}$ $\quad a^2 + y^{2\lg y} \quad y^{\lg y}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

1) $y-3-x \geq 0$ $y-3+x \geq 0$

$y \geq x+3$ $y \geq 3-x$

$y \geq 3$

$y-3-x+y-3+x=6$

$2y = 12$ $y=6$

2) $y \geq x+3$

$y < 3-x$

~~$y > x+3$~~

$y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$

~~$-3;6$~~

~~$|6-3+3|+|6-3-3|=6$~~

$6+$

3) $y < x+3$

$y < 3-x$

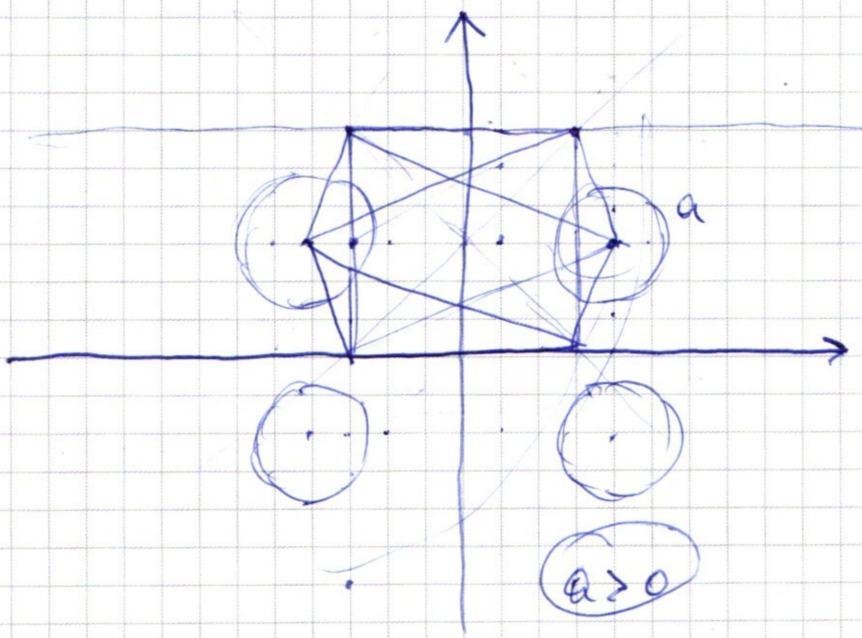
$-y+3+x-y+3-x=6$

$-2y+6=6$

$y=0$

4) $-y+3+x+y-3+x=6$

$2x=3$



Ровно 2 решения когда 2 окружности касаются $(a=1)$

Если $a^2 > \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58}$, то верхние окружности не касаются (прямоуг внутри)

Если $a^2 = \sqrt{58}$ – решений 4 (в углах)

Аналогично $a^2 = 10$

Если $a^2 > \sqrt{58}$

$87+49 = \begin{array}{r} 81 \\ +49 \\ \hline 130 \end{array}$

7) $y > 2^x + 3\cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64}-1)x$

$y > 2^x(3\cdot 2^{65-x}+1)$

$y \le 70 + (2^{64}-1)x$

3322 2323
3223 2332
3232, 2233

$\frac{C_4^2 \cdot}{2!\cdot 2!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$

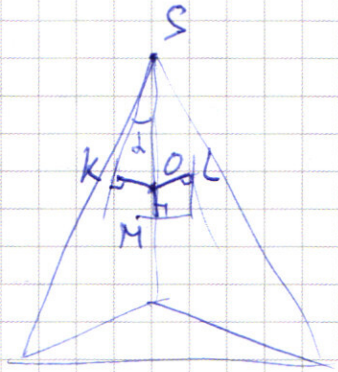
$5^3\cdot 3^3$

$\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}$

$\frac{C_8^6\cdot 6!}{3!\cdot 3!} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 6!}{3!\cdot 3!} = \frac{8!}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 4\cdot 7\cdot 5\cdot 4$

560

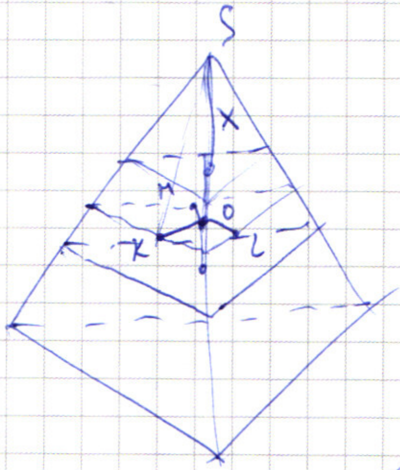
4)



$S = pr$

$(2{,}5)^2$?

$\left(\frac{1+4}{2}\right)^2$?



~~$\frac{1}{3}(2r+x)\cdot 4 =$~~

$\frac{1}{3}(2r+x)\cdot 4 - \frac{1}{3}(x)\cdot 1$

$\triangle$ Подобны $\Rightarrow$ стороны относятся

$S = pr$

$\frac{x}{x+2r} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)}$

$2x = x+2r$

$x = 2r$