

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

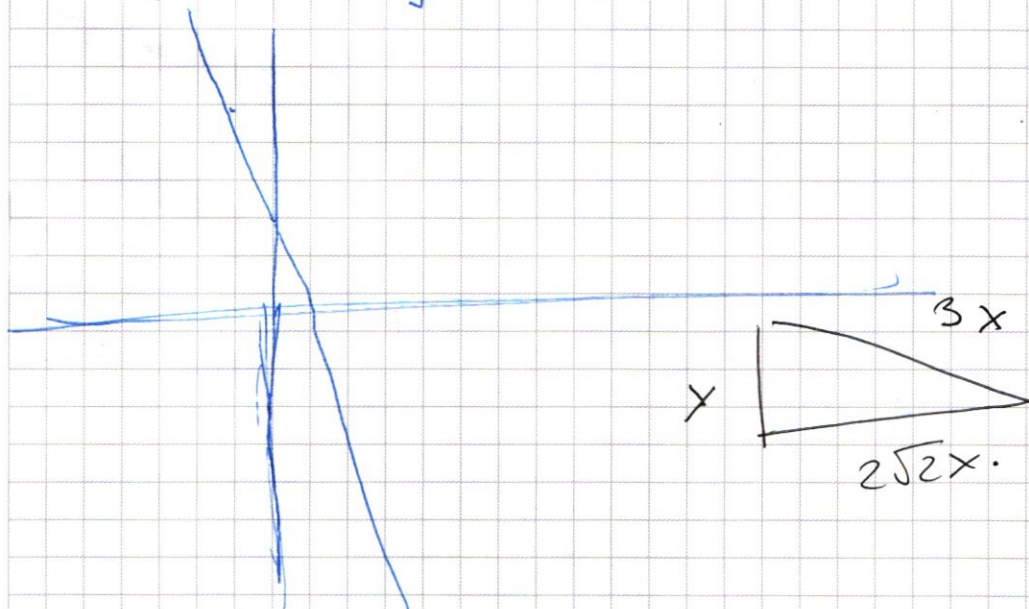
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$



$$C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 = 560$$

$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 2, C_4 = 2, C_5 = 7$

$$(1) \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases}$$

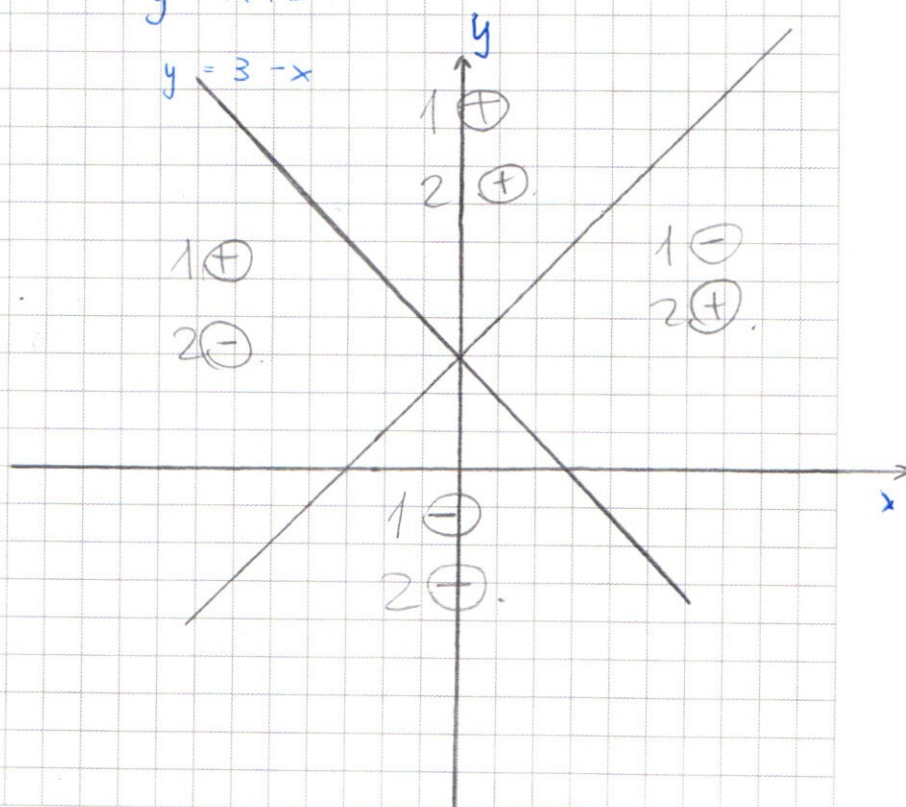
$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$y = x + 3$$

$$y = 3 - x$$



черновик

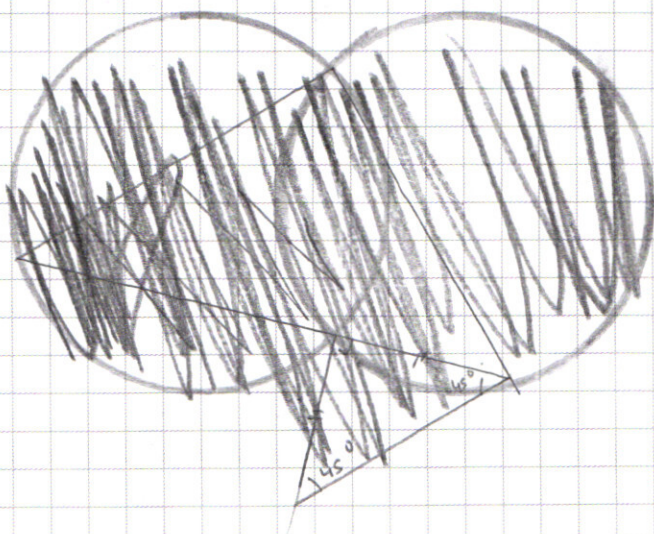
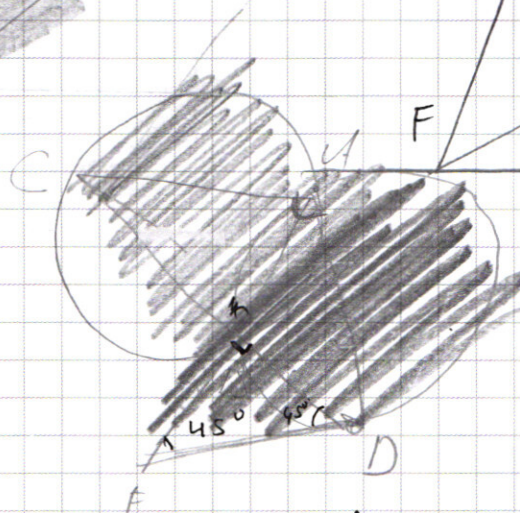
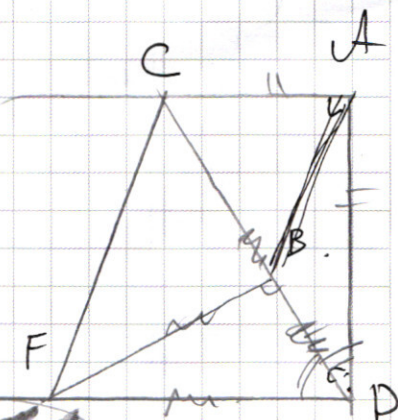
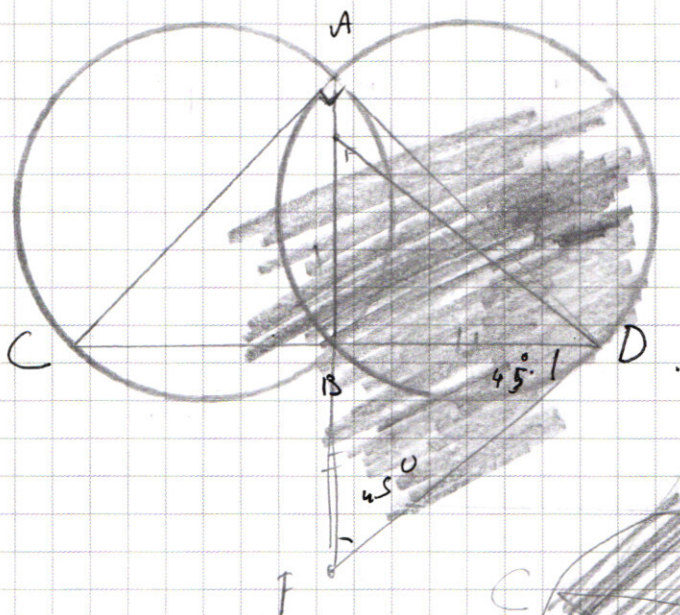


чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)



$$\left(\frac{3^5}{3^2}\right)^{\lg 9} = 3^6 \lg 3^3$$

$$3^6 \lg 3 = 3^6 \lg 3$$

$$81 - 54 - 36 - 27 + 26 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \end{array}$$

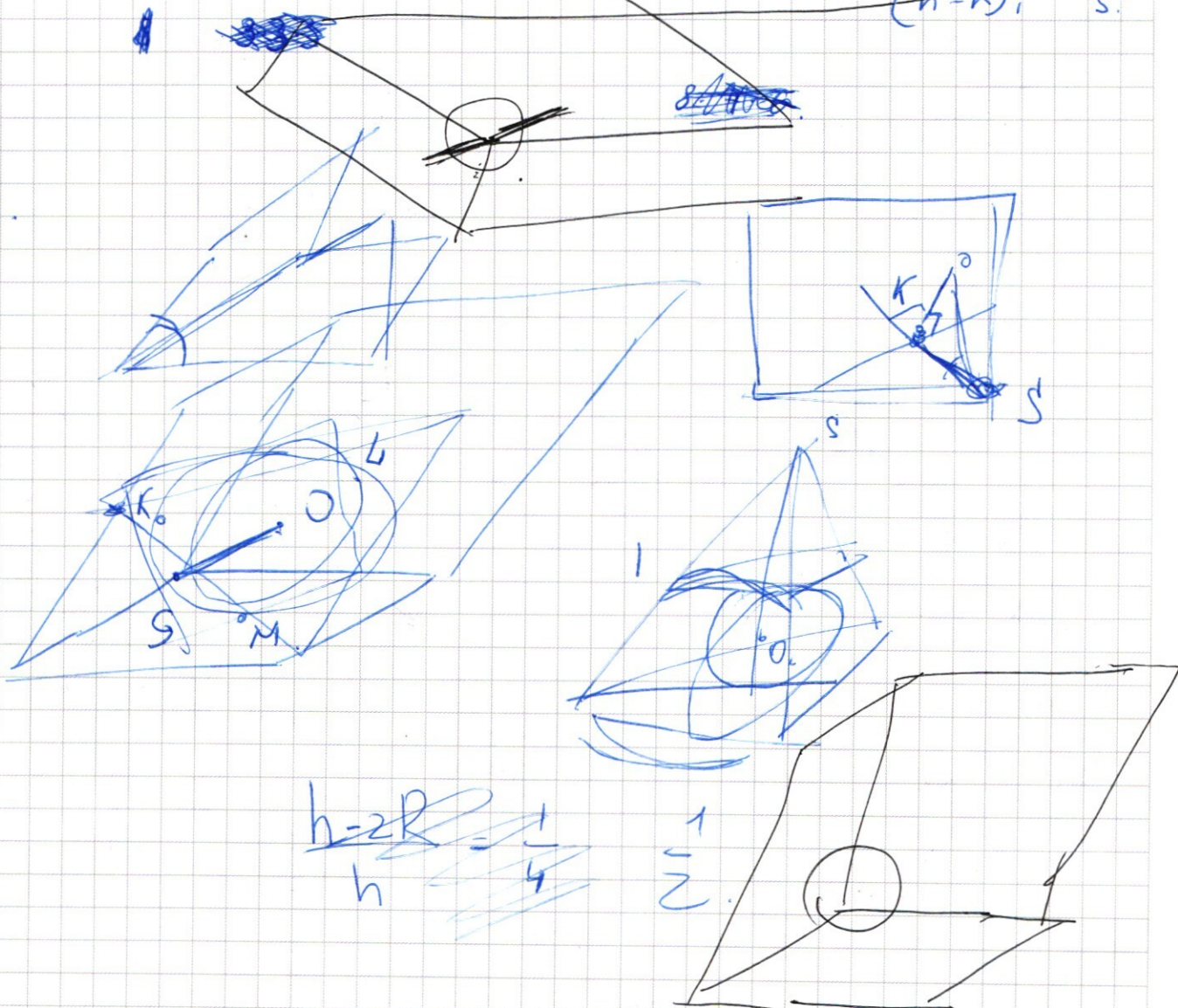
$$\boxed{1680}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 27 \end{array}$$


$$3^3 \cdot 5^2 = 3375$$

$$C_n^k = C_n^8 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{5!} =$$

④



33355511

33555113.

33555131

33555311

$$D = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$y = \frac{10 \pm 8}{6} = 3; \frac{1}{3}.$$

3)

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x}.$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 5y^2 + 12y = 0.$$

$$x > 0$$

$$y > 0.$$

$$y^{5 \lg x} - y^{2 \lg x y} \cdot 10 = 0.$$

$$x(x-4) - 5y(y-4) - 2xy = 0.$$

$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} - 10) = 0. \quad y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y} \cdot 10 = 0.$$

$$y^{3 \lg x} = 10$$

$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} - 10 y^{2 \lg y}) = 0.$$

$$y^{3 \lg x} = 100 = (x^{\lg x})^3 = x^{3 \lg x}.$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}$$

$$4 - 8 - 8 - 12 + 24 = 0.$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{17} = \frac{2}{41}$$

$$\frac{28}{31} = \frac{28}{41}$$

$$x \text{ и } y \cdot 2$$

$$\frac{280}{3136}$$

$$\frac{8}{61.2} = \frac{7.4}{28}$$

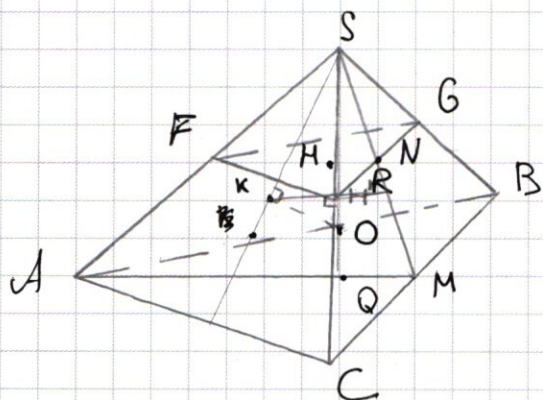
$$56 \quad 56$$

$$\frac{51.1}{8} = \frac{6.7.8}{2.1} = 78 = 56$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④

1) фигуру, образованную тремя прямыми углами и двумя плоскостями можно представить как треугольную пирамиду.



2) т.к. $o_{\text{де}} \perp \text{нл-ту}$ $\perp SO$

70 ОМУ 11 (но сб-бу 1 нн-св)

3) ~~3)~~ $FR \parallel AC \Rightarrow \angle SFR = \angle SAC;$

$$\left. \begin{aligned} \angle SFR &= \angle SAC \\ \angle S - \delta_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta SFR \approx \Delta SAC \Rightarrow$$

$$\frac{FR}{AC} = \frac{SF}{AS} = \frac{SR}{SC} = k$$

аналогично рассмотрим ΔSCB и ΔSRG ; ΔSGF и ΔSBA получим.

$$\frac{FR}{AC} = \frac{SF}{AS} = \frac{FG}{AB} = \frac{SG}{SB} = \frac{RG}{CB} = \frac{SR}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\triangle FRC \sim \triangle ACB, \text{ а тогда}$$

$$\frac{S_{FRG}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$k = \frac{1}{2}$$

4) Γ_H - т непер $SO_n(FGR)$; Γ_Q - т непер $SO_n(ABC)$

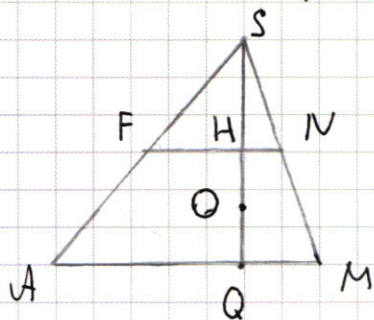
Рассм Δ SFH и Δ SAQ:

SB-оду

$$\Delta SHF \rightarrow \Delta SQA - n/y$$

$$\left. \begin{array}{l} SF - o\delta y \\ \Delta SHF \text{ (red)}; \Delta SQA = n/y \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta SFH \approx \Delta SAQ \Rightarrow \frac{SH}{SQ} = \frac{SF}{AS} = \frac{1}{2}$$

5) Рассм ~~с~~ $S \Delta Q: M$



т.к сфера касается π
 $\parallel$ $\pi\pi$ -ей, то $OH = OQ = R$
 из подобия ΔSFH и ΔSAQ :

$$\frac{SQ - 2R}{SQ} = \frac{1}{2}$$

$$2SQ - 4R = SQ \Rightarrow SQ = 4R, \text{ тогда } SA = 3R.$$

6) $\sin \angle KSO = \frac{1}{3}$

т.к O лежит на биссекторе трехгр.
 (т.к O равноуд от 3 плоскостей, то SO - бисс).
 уга, то $\angle KSO < 90^\circ \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$.

7) по Пифагора $SK = 2\sqrt{2} \cdot R$, тогда $\cos \angle KSO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

~~$SH = SK \cdot \cos \angle KSO = 2\sqrt{2}R \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3}R$~~ $SH' = \frac{2\sqrt{2}R}{\cos \angle KSO} = 3R, 2\sqrt{2}R \cdot \cos \angle KSO = \frac{8}{3}R.$

8) ~~из подобия~~. т.к SO - бисс $\perp$ SM, SN, SK

3 взаимн, то $\left. \begin{array}{l} SO - \text{бисс} \\ SM = SN = SK \end{array} \right\} \Rightarrow \angle KSO = \angle MSO = \angle NSO \Rightarrow$

H' - точка перес $3 \perp$ из M, N, K .

9) $(MNC) \parallel (FNG)$ т.к. $MNC \perp SO$ по пр-ку $\Rightarrow$

$$\frac{S_{MNC}}{S_{FNG}} = \frac{1^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R : 2R\right)^2} = \left(\frac{2\sqrt{2}R}{6R}\right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{8}{3 \cdot 3}\right)^2 =$$

$$S_{MNC} = \frac{64}{81}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$; $S_{MNC} = \frac{64}{81}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \textcircled{3} \left(\frac{y}{x} \right)^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} x > 0 & \text{н.и.б.} \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{10} = y^{2 \lg x} \cdot 100$$

~~$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} - 1000) = y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} - x^{3 \lg x}) = 0$$~~

~~$$y^{2 \lg x} > 0 \Rightarrow y^{3 \lg x} = x^{3 \lg x}$$~~

~~$$x = y^2$$~~

$$\begin{cases} x = y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

вернемся к системе.

$$(10^{\lg y})^{3 \lg x} = (10^{\lg y})^{2 \lg y} \cdot (10^{\lg x})^{\lg x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ 1-2y-4-3y^2+12y=0 \\ x=y \\ y^2-2y^2-4y^2-3y^2+12y=0 \\ x>0 \\ y>0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ 3y^2-10y+3=0 \\ x=y \\ 4y^2-8y=0 \\ x>0 \\ y>0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=y^2 \\ y^4-2y^3-4y^2-3y^2+12y=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ x=1 \\ y=\frac{1}{3} \\ x=0 \\ y=0 \\ x=2 \\ y=2 \\ x>0 \\ y>0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ x=0 \\ y=3 \\ x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Ответ: ~~$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$~~ ; $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$.

①
$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Таким образом мы получаем, что в восьмизначном числе ~~может~~ ^{могут} быть использованы лишь ~~только~~ цифры 5, 3, 1, причем "1" - дватри;

"5" - трижды; "3" - трижды

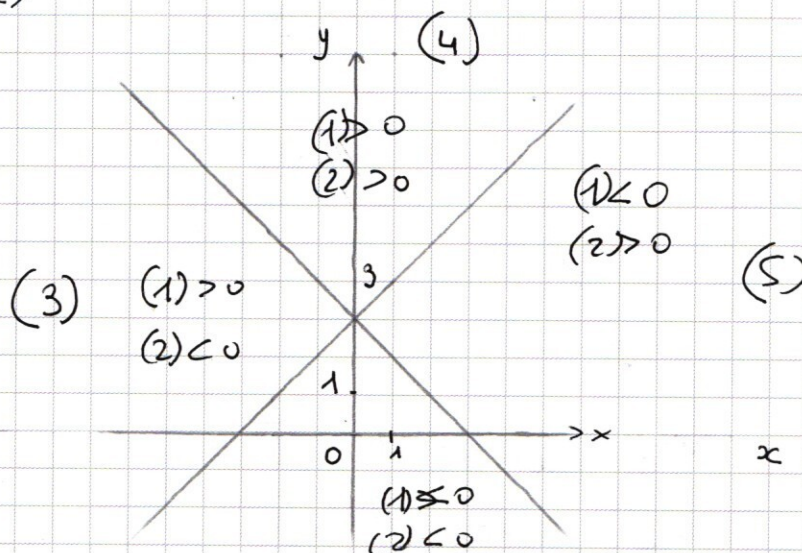
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$y-3-x=0 \quad (1)$$

$$y-3+x=0 \quad (2)$$



$$\begin{cases} -y+3+x - y+3-x = 6. & \text{обл (6)} \\ -y+3+x + y-3+x = 6. & \text{обл (5)} \\ y-3-x + y-3+x = 6. & \text{обл (4)} \\ y-3-x - y+3-x = 6. & \text{обл (3)} \end{cases} \begin{cases} -2y+6=6. \\ 2x=6. \\ 2y-6=6. \\ -2x=6. \end{cases}$$

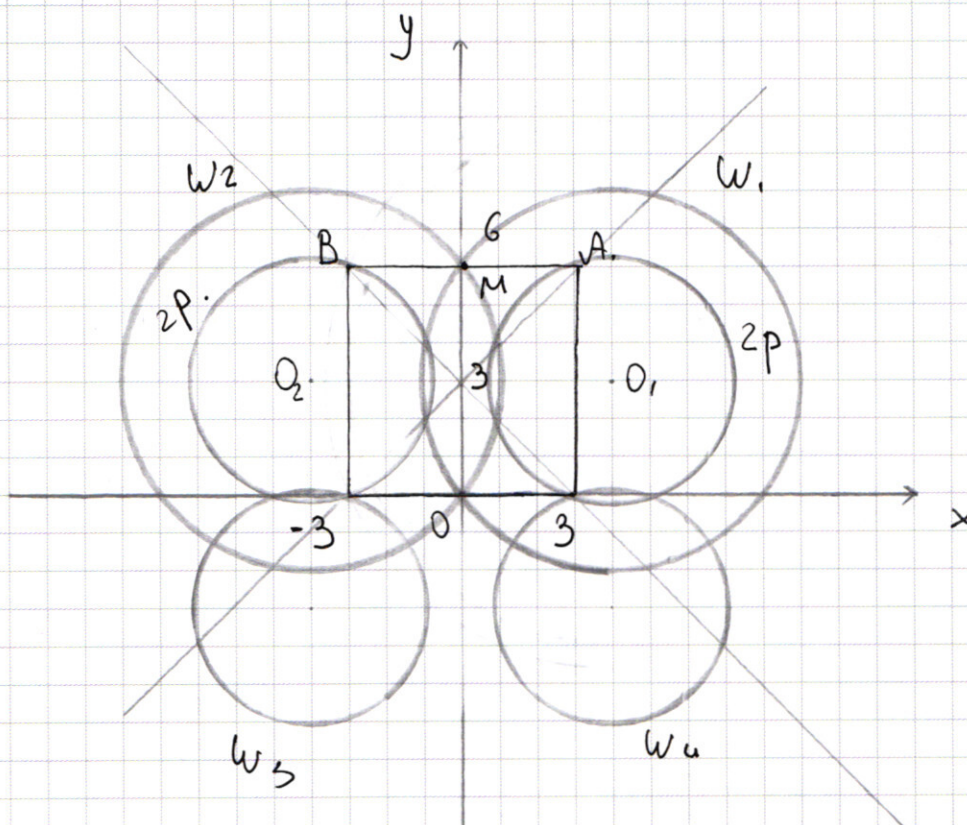
$$y = 0$$

$$x = 3$$

$$y = 6$$

$$x = -3$$

$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$ - ур-ие 4 окр с рад $\sqrt{a}$ и
центрами $(4; 3)$; $(-4; 3)$; $(-4; -3)$; $(4; -3)$



Решения	W_1	летат	в	I
	W_2	летат	во	II
	W_3	летат	в	III
	W_4	летат	в	IV

тогда 2 решения будут давать только u_1 и u_2 .

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(6-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{10}$$

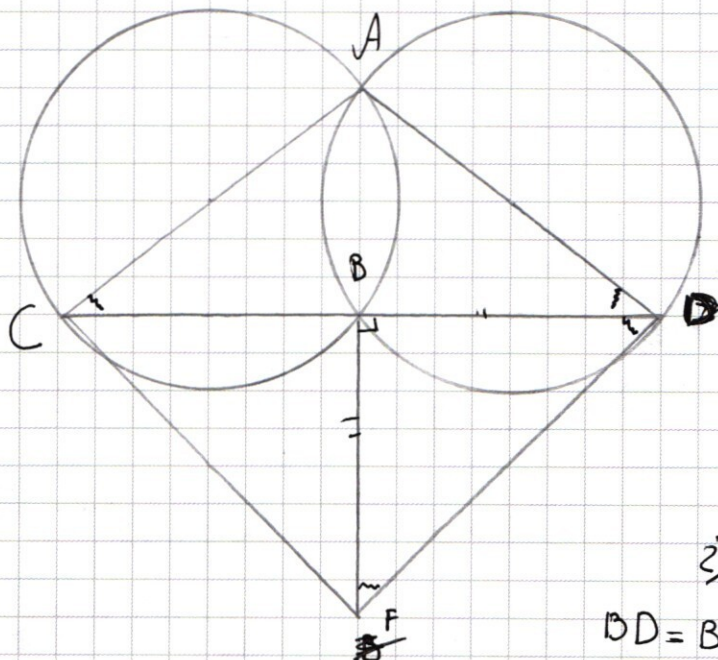
$$|\vec{OM}| = \sqrt{(0-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{23}$$

6 сугу сунм $O_2B = O_1A$; $O_1M = O_2M$.

Ответ: При $a \in [\sqrt{10}; \sqrt{23}]$ 2 реш

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥



а) 1) так окружности
равны, то

$\angle ACB = \angle ADB$ (как
откр на равную
дугу) $\Rightarrow$

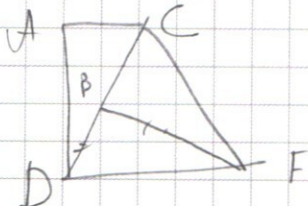
$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$$

2) $BF \perp CD$ по усл-ию;

$$BD = BF \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ \Rightarrow$$

$\angle ADF = 90^\circ \Rightarrow DF \parallel AC \Rightarrow ACFD$ - трап.

~~по Пифагора.~~



N1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$, тогда в наших искомым
восьмизначных числах будет 3 "3"; 3 "5";
2 "1". либо 2 "3"; 3 "5"; 1 "1" и 1 "9"
тогда всего чисел.

$$N = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел.

N2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

~~$$-2 \sin \frac{11-3}{2}x \cdot \sin \frac{11+3}{2}x - 2 \sin \frac{11-3}{2}x \cdot \cos \frac{11+3}{2}x =$$~~

$$-2 \sin \frac{11-3}{2}x \cdot \sin \frac{11+3}{2}x - 2 \sin \frac{11-3}{2}x \cdot \cos \frac{11+3}{2}x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x.$$

$$-2 \sin 4x (\sin 14x - \cos 14x) + \sqrt{2} \cdot \cos 14x = 0$$

~~$$\sin^2 7x - \cos^2 7x + (\cos 7x + \sin 7x) \sqrt{2} \cdot \sin 4x = 0.$$~~

$$\cos^2 7x - \sin^2 7x + (\cos 7x + \sin 7x) \sqrt{2} \cdot \sin 4x = 0.$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \cdot \sin 4x) = 0.$$

$$(1) \cos 7x + \sin 7x = 0.$$

т.к. ~~cos~~ $\cos x \geq 0$ не увл. реш, то.

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0.$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0.$$

$$-2 \sin\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - 7x + 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - 7x - 4x}{2}\right) = 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{1}}{4} - 3x = 2\sqrt{1}n \\ \frac{\sqrt{1}}{4} - 11x = \sqrt{1} + 2\sqrt{1}n \end{array} \right.$$

$$\frac{\sqrt{1}}{4} - 11x = \sqrt{1} + 2\sqrt{1}n$$

$$x = -\frac{\sqrt{1}}{28} + \frac{\sqrt{1}n}{7}$$

$$-3x = -\frac{\sqrt{1}}{4} + 2\sqrt{1}n$$

$$-11x = \frac{5\sqrt{1}}{4} + 2\sqrt{1}n$$

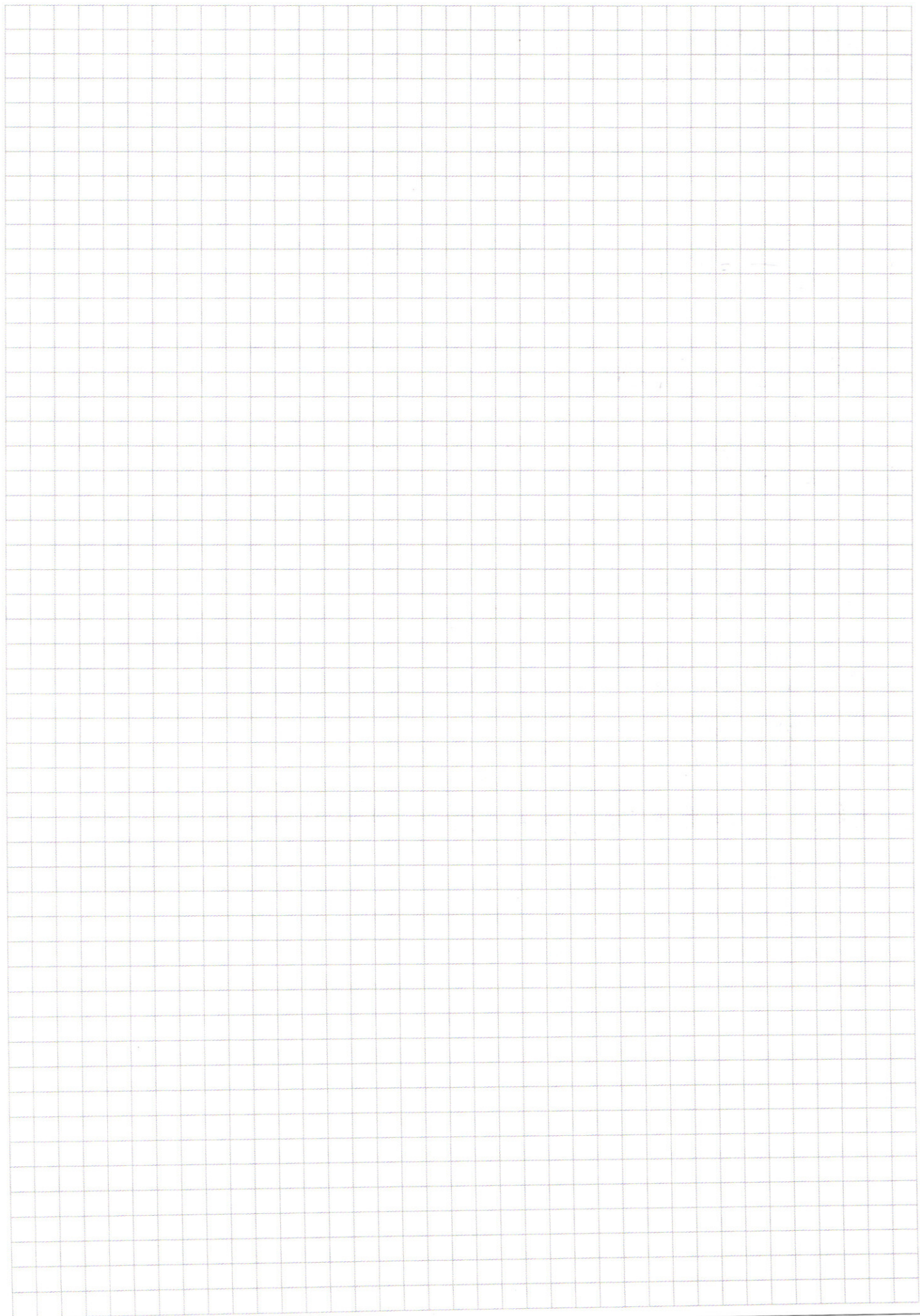
$$x = -\frac{\sqrt{1}}{28} + \frac{\sqrt{1}n}{7}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{1}}{12} + \frac{2\sqrt{1}n}{3} \\ x = \frac{5\sqrt{1}}{44} + \frac{2\sqrt{1}n}{11} \\ x = \frac{\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{1}n}{7} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{5\sqrt{1}}{44} + \frac{2\sqrt{1}n}{11}$$

$$x = \frac{\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{1}n}{7}$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{1}n}{7}$; $x = \frac{5\sqrt{1}}{44} + \frac{2\sqrt{1}n}{11}$; $x = \frac{\sqrt{1}}{12} + \frac{2\sqrt{1}n}{3}$
 $n \in \mathbb{Z}$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)