

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{OD } \begin{cases} x \neq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4$$

$$x_1 = y + 2 + 2y - 2 = 3y \quad \text{подставляем в 1.}$$

$$x_2 = y + 2 - 2y + 2 = -y + 4$$

или

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

применим логарифмы по $\lg$

$$(\lg 3y)(\lg \frac{y^4}{3}) = 2 \lg 3y^2 \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y)(4 \lg y - \lg 3) = 2(\lg 3 + 2 \lg y) \lg y \quad \text{так как } x > 0, y > 0$$

$$4t = \lg y$$

$$4z = \lg 3$$

$$(z+t)(4t-z) = 2(z+2t)t$$

$$4tz - z^2 + 4t^2 - tz = 2tz + 4t^2$$

$$t+z = z^2 \quad z \neq 0$$

$$t = z \quad t = \lg y = \lg 3 \quad y = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$2) \text{ подставляем } x = -y + 4 \text{ в 1.}$$

$$\left(\frac{y^5}{(-y+4)}\right)^{\lg(-y+4)} = y^{2 \lg(-y+4)y}$$

$$\text{применим логарифмы по } \lg \Rightarrow \lg(-y+4) \lg\left(\frac{y^5}{-y+4}\right) = 2 \lg(-y+4)y \lg y$$

$$\lg(-y+4) \lg y - \lg(-y+4) = 2(\lg(-y+4) + \lg y) \lg y$$

$$u a = \lg y$$

$$u b = \lg(-y+u)$$

$$b(5a-b) = 2(b+a)a$$

$$505ab - b^2 = 2ab + a^2$$

$$3ab - b^2 = 2a^2 \quad / a^2$$

$$3\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$u \frac{b}{a} = w$$

$$-w^2 + 3w - 2 = 0$$

$$w^2 - 3w + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$w_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$w_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow b = wa$$

$$\lg(-y+u) = 2\lg y$$

$$-y+u = y^2$$

$$y^2 + y - u = 0$$

$$D = 1 + 4u = \sqrt{17}$$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{17}}{2} + u > 0$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} + u > 0$$

$$\text{Ответ } (9; 3) \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2} + u \right) \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2} + u \right)$$

$$\text{Ответ } (9; 3) \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2} + u \right) \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2} + u \right)$$

$$\lg(-y+u) = -1\lg y$$

$$-y+u = \frac{1}{y}$$

$$-y^2 + uy + 1 = 0$$

$$y^2 - uy + 1 = 0$$

$$D = u^2 - 4 = 8$$

$$y_1 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{2} + u = 2 - \sqrt{2}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow -2 + \sqrt{2} + u = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ } (9; 3) \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2} + u \right) \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2} + u \right)$$

$$5) \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$1) |y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\text{рассуждая геометрически пр-ми. } y = x+3 \text{ на 4 области.}$$

$$y = -x+3$$

$$1) \text{ для } y-3-x + y-3+x = 6$$

$$y = 6$$

$$3) \text{ для } -y+3+x - y+3-x = 6$$

$$y = 0$$

$$2) \text{ для } y-3-x - y+3-x = 6$$

$$x = -3$$

$$4) \text{ для } -y+3+x + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\sqrt{81+49} = \sqrt{130}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4 \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$1) \quad x > 0 \quad y > 0$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a \quad \text{ок-ть с центром } (4; 3) \text{ и } R = \sqrt{a}$$

$$2) \quad x > 0 \quad y < 0$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = a \quad \text{ок-ть с центром } (4; -3) \text{ и } R = \sqrt{a}$$

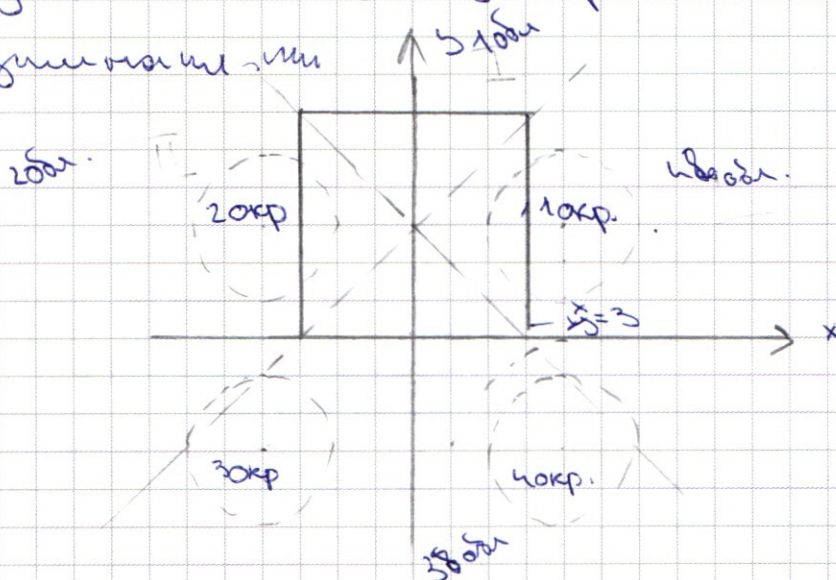
$$3) \quad x < 0 \quad y < 0$$

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = a \quad \text{ок-ть с центром } (-4; -3) \text{ и } R = \sqrt{a}$$

$$4) \quad x > 0 \quad x < 0 \quad y > 0$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = a \quad \text{ок-ть с центром } (-4; 3) \text{ и } R = \sqrt{a}$$

и изображаем на м.м.



1) 1 окр-ть это кв-м.

2) и $a=4$ для 4-х окр-тей

как мы видим 2 решения будем только тогда

когда в 2х случаях.

1. кв. 1сл. когда

$\Rightarrow$ найдем a

~~xx~~

1 и 2 окр. касаются кв-м

подставим $y=3$

в 1 окр. кв

$$(-1)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$1 + y^2 - 6y + 9 = a$$

$$y^2 - 6y + 10 - a = 0$$

Дискриминант

$$\Rightarrow D=0$$

$$36 - 40 + a = 0$$

$$a = 1.$$

2 случая когда 3 и 4 ок. т.к. кас. со всеми вершинами т.е. найдена идеальная (3; 6) в ур-нии 3 ок. т.к.

$$(3+5)^2 + (4+3)^2 + (3+6)^2 = a$$

$$(49 + 81) = a$$

$130 = a$ найден радиус

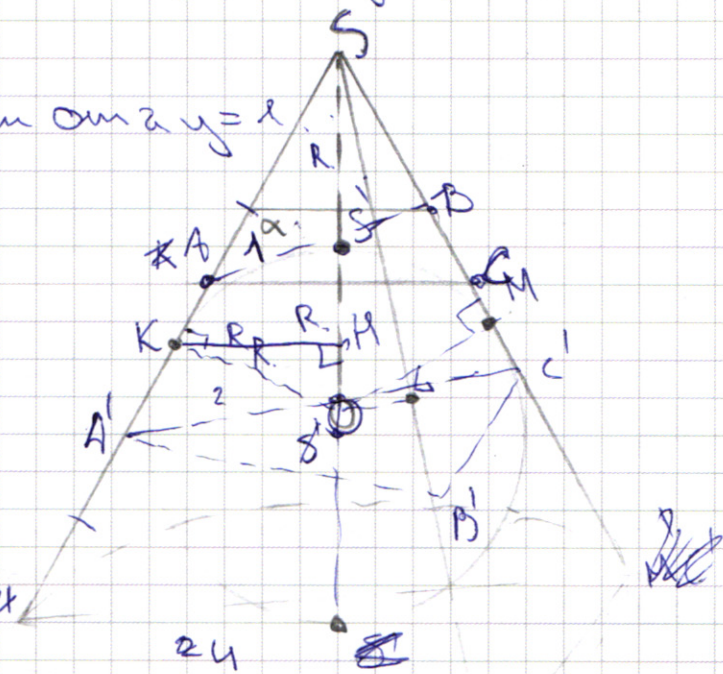
ответ $a = 1; a = 130$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

от от 2 y = 1

1) Дано
 $S - KLMN$ - тетраэдр
 $\rightarrow$ - сфера
 $K'LM'K'L'M'$ - т. касания
 $\omega(O, r)$ - сфера
 $S \Delta ABC \cong$
 $S \Delta A'B'C' = 4$
 ΔA т. т. ABC кас. сфера
 $\perp SO$
 ΔABC кас. сфера $\perp CO$



1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ т.к.
 ΔABC и $\Delta A'B'C'$ т.к. они $\perp SO$
 $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ стороны от. с. как $\frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{1}{2}$
 ΔH - т.о. что g - с. $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ т.о. что
 $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ и высоты от. с. как $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SO}{SO'} = \frac{1}{2}$
 $\perp SO$ - рад. сфера $\Rightarrow SO = 2R$.

рассмотрим.
 ΔSAK ΔSKO $\angle SKO$ - пр. т.к. SK - кас. к сфере
 $\Rightarrow \angle KSO$ $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$
 $\angle KSO = 30^\circ$

2) Пусть найдем S отсюда из т.к. K на SO пер. $\perp$
 $\Rightarrow \Delta KSO$ - пр. т.к. K - т. кас. к сфере
 $\Delta KSO = \Delta SMO = \Delta SNO$ т.к. SO - пр. т.к. Δ
 $OB = OK = OM$ как рад. сфера.
 $(OS$ общ.)
 $\Rightarrow$ все пер. т.к. из вершин $\angle SKO; \angle SNO; \angle SMO$ $\perp$ на SO т.к.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

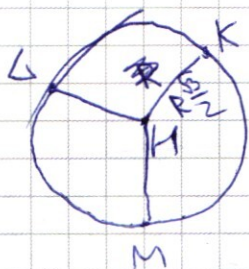
Е) равноудалены от точек K, L и $M \Rightarrow \triangle KLM$ равно-
бедренный с вершинами в K, L и M и $R = KM; ML; LM$.

рассмотрим $\triangle SKH \cong \triangle KHO$ ($\angle HKO = \angle KSO$ как углы
по вз-вс. перпендику-
лярам $(KH \perp SO; OK \perp SK)$)

$$\Rightarrow \angle OKH = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \angle OKH = \frac{KH}{KO}$$

$$KH = KO \cos \angle OKH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{\triangle KLM} = \pi R^2 \cdot \frac{3}{4}$$

По ок-м сечениям в м. $\odot$ и сеч. KLM
 $\Rightarrow S_{\triangle KLM} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$

$$2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x - 2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x = 2 \sin 4x \quad / : 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = \sin 4x$$

$$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin(\sin 4x) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k 4x + \pi k \quad \mathbb{R}$$

$$1) k = 2m$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi m$$

$$7x = 4x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$2) k = \cancel{2x} \quad 2u + 1$$

$$7x = -4x + \sqrt{u} + 2\sqrt{w}$$

$$11x = \bar{u} + 2\bar{u}u + \frac{\bar{u}}{4}$$

$$x = \frac{5n}{44} + \frac{27m}{11}, m \in \mathbb{Z}$$

Quellen $x = \frac{3n}{28} + \frac{n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{a}{12} + \frac{2}{3} \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5n}{44} + \frac{2n}{11}k, k \in \mathbb{Z}$$

1) разложить 3375 на простые множители.

$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. но число восьмизначное $\Rightarrow$ графа имеет 8 вершин.

$$\Rightarrow 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

1 zwei 2 3 4 5 6 7 8

3 3 3 3 3 3 3 3

$\Rightarrow$ всевозможные из-ся
 $3^8 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81$

не могу удерживать
 не могу удерживать нежные
 нежные чувства
 и так, как, когда
 если удерживать нежные чувства,
 но это не-ся, когда нежные
 чувства.

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \end{array}$$

Amber 6581⁶

$$\begin{array}{r} 648 \\ \hline 6561 \end{array}$$

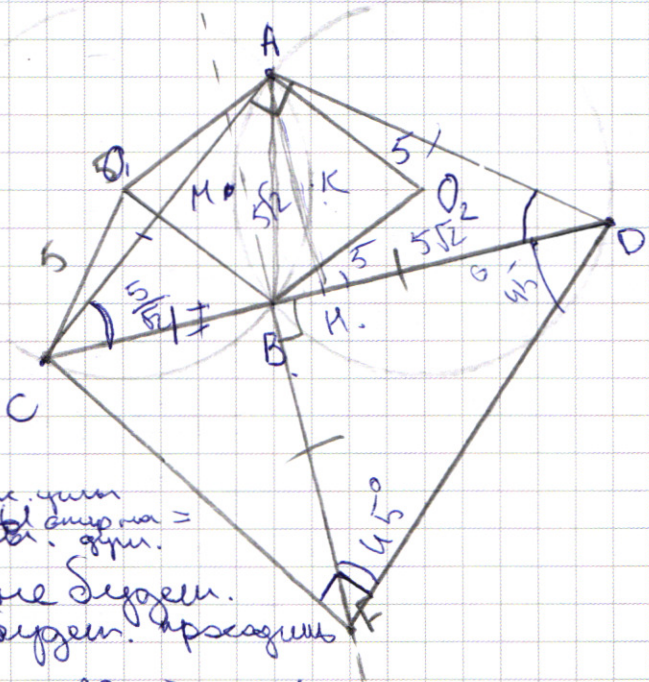
7) $\rightarrow$ 6)

Davis

Окр-ть O_1 и O_2

$$R_1 = 5 \quad R_2 = 5$$
$$\angle \text{HAD} = 98^\circ$$

BF LCD



1) R и r — радиусы окружностей =

$$\hookrightarrow \mathcal{B} \text{ и } \text{группа } \text{Aut } R \text{ и } \text{Aut } P =$$

$\Rightarrow \angle ACP = \angle ADP$. Kerek középpontjánál álló szög egyenlő az ívhez tartozó perifeériai szöggel.

$$\Pi \Rightarrow CA = AD \Rightarrow$$

HB $\Rightarrow$ сэр. CD м.к. Если B не делит.

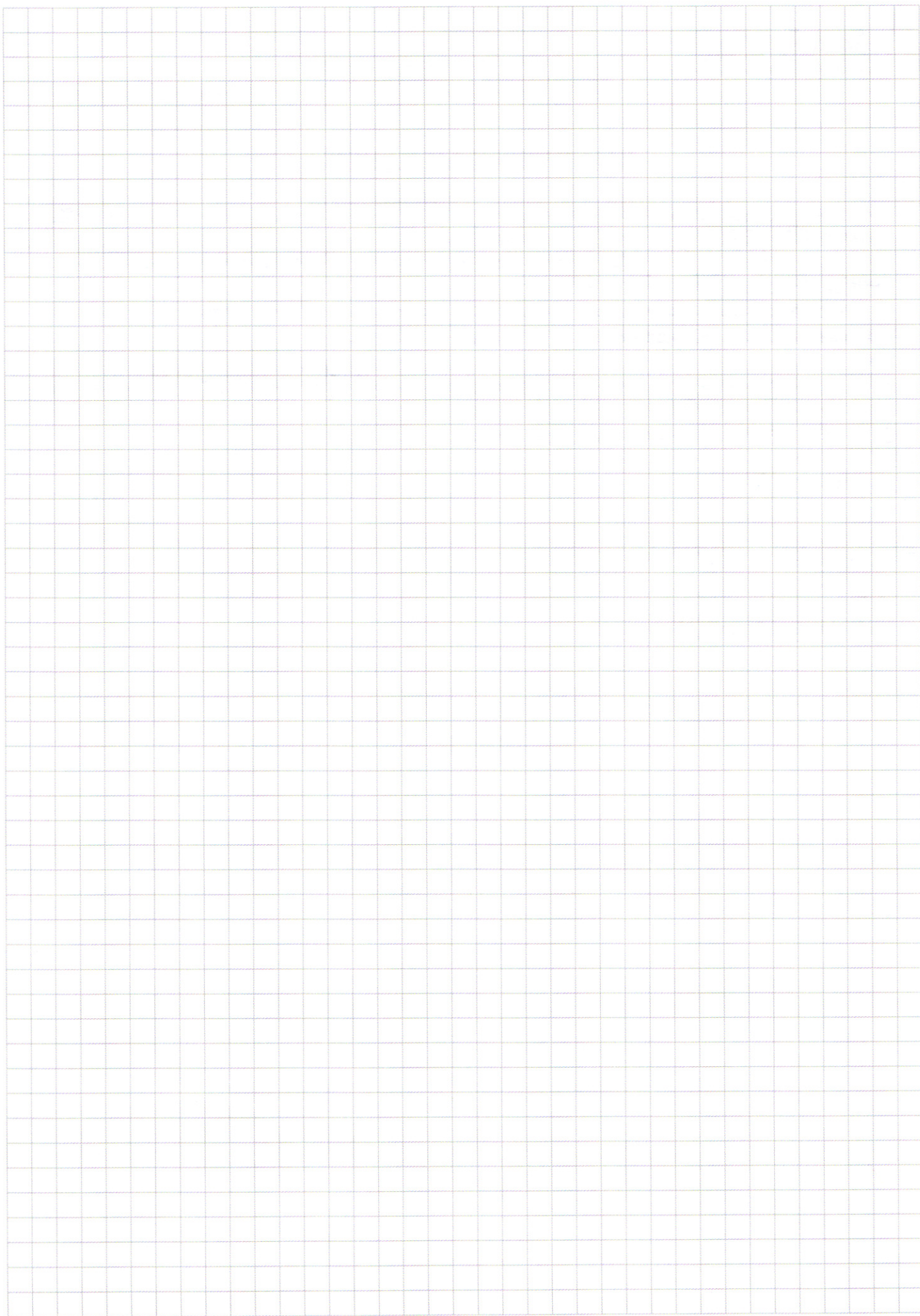
як-ся серед інших в СД - не будемо. Прощадимо
через нас.

$\Rightarrow$ В $\triangle ABD$ - прямая $\Rightarrow CD \perp AB$ $\Rightarrow$ $\angle C$ - наименьший $\Rightarrow$ $\angle C$ - наименьший

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тип задачи доказательств в Δ пересечения $\Rightarrow$ Δ равнобедренный
 м.к. $CD = BD$ м.к. AB - хорда $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AD = CD = BD$ т.е. Δ равнобедренный
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle BDC = \angle BDA$
 $\Rightarrow \Delta ACD \perp \Delta BDC$ в пересечении
 На равные отрезки $\Rightarrow CADF$ - кв-рам.
 $\Rightarrow$
 $LABD$ - пр-угол. Δ с гипотенуз. $AD \Rightarrow AD$ диаметр.
 $\Rightarrow AD = 2R = 2 \cdot 5 = 10$
 $CF = AD$ - как стороны кв-ра
 $\Rightarrow CF = 10$
 Ответ: 10

$$7) \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 3375 5
675 5
135 5
27 3
9 3
3 3
место 1/8

Всего 8 цифр, но простое число можно разложить на простые на 6 цифр $\Rightarrow$ Задача 11

11333555 $\Rightarrow$ 3 цифр.

Задача 1) 3 Какая цифра может находиться

11333555
11353535
33333333
33333333
33
22222222

$3^8 - 3$
 $2^8 = 256 \cdot 256$

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$\beta = \frac{x-y}{2}$
 $2\alpha = x+y$
 $\alpha + \beta = x$
 $\alpha - \beta = y$
 $\alpha = \frac{x+y}{2}$

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$\sin 11x - \sin 3x = 2 \cos 7x \sin 4x$

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$-2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin \frac{3x-11x}{2} \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$

$+2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2} \cos 7x = 0$
 $\sqrt{2} (1 - \cos 7x + 2 \cos 7x - 1)$

$\cos(14x-3x) - \cos 3x - \sin 14x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos 14x \cos 3x + \sin 14x \sin 3x - \cos 3x - \sin 14x \cos 3x + \cos 14x \sin 3x + \sin 3x$
 $= \sqrt{2} \cos 14x$

$\sin 3x \sin 14x + \cos 3x (\cos 14x - 1) - \sin 14x \cos 3x + \sin 3x (\cos 14x + 1)$

$\cos 3x (\cos 14x - \sin 14x) + \sin 3x (\cos 14x + \sin 14x + 1) = \sqrt{2} \cos 14x$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 7x \cos 4x + 2 \sin \frac{11-3}{2} \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x (\sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x) = \cos 14x$$

$$\sin 4x \left(\sin(7x + \frac{\pi}{4}) \right) = \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 3x \sin 7x) + \cos 11x - \sqrt{2}$$

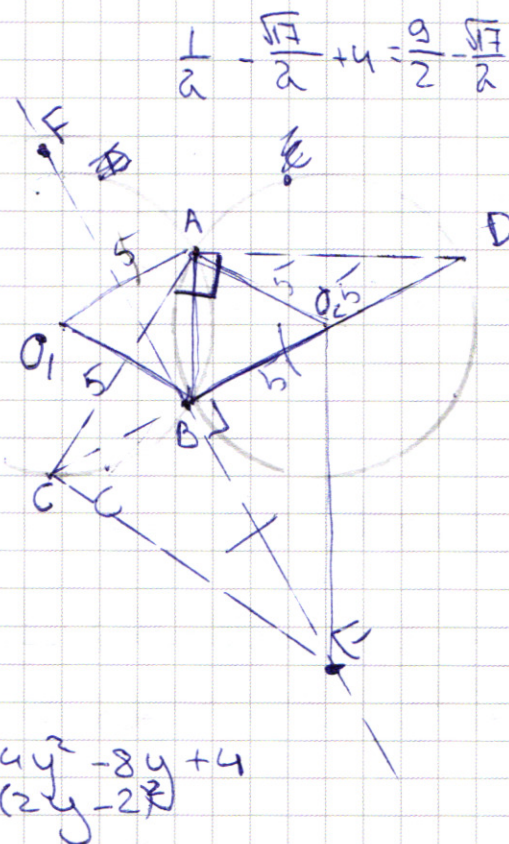
$$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) + \sin 11x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) - \cos 3x + \sin 3x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{\sin 3x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}} = \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) (\sin 4x) = \cos 14x$$

$$2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) (\sin 4x) = 2 \cdot 1 - 2 \sin^2 7x$$



$$5) \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 + x(12y+4) - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{x^2}{4} + y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4$$

$$x_1 = (2y + 2 + 2y - 2) = (4y)$$

$$x_2 = (y + 2 - 2y + 2) = (-y + 4)$$

$$1) x = 4y$$

$$\left(\frac{y}{4y}\right)^{\lg 4y} = y^2 \lg 4y^2$$

$$y \neq 0$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$