МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

35

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

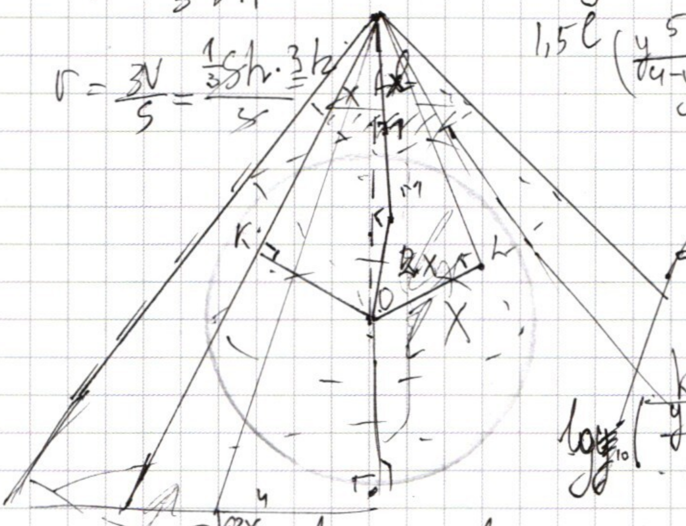
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$V = \frac{1}{3} S h$

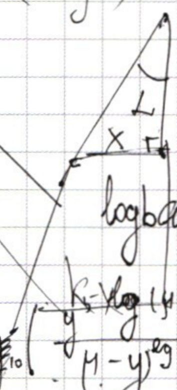
$r = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{1}{3}Sh \cdot 3h}{S}$



$y + x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 - y$

$1{,}5\ell \quad \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y(4-y)}$

$\hookrightarrow y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)}$



$\log_b a \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\lg\left(\frac{y^{5\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}}\right) = \lg y^{2\lg(4-y)}$

$\hookrightarrow 2\lg(4-y)\lg y$

№3.
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$\hookrightarrow \lg\left(y^{5\lg(4-y)}\right) - \lg(4-y)^{\lg(4-y)}$

$\hookrightarrow 5\lg(4-y)\cdot\lg y - \lg(4-y)^2 = 2\lg(4-y)\lg y$

$3\lg(4-y)\lg y - \lg(4-y)^2 = 0$

$(2) \Leftrightarrow (3y - x)(y + x - 4) = 0$

$(1): \exists\ x = 3y \Rightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\cancel{y^{2\cdot\lg 3y^2}} \quad \lg 3y = \frac{\log_3 3y}{\log_3 10} = \frac{1+\log_3 y}{\log_3 10}$ $\qquad x, y \neq 0$

$\lg 3y^2 = \frac{\log_3 3y^2}{\log_3 10} = \frac{1 + 2\log_3 y}{\log_3 10}$

$y^{4\left(\frac{1+\log_3 y}{\log_3 10}\right)} = y^{2\left(\frac{1+2\log_3 y}{\log_3 10}\right)}$

$y^{\frac{4+4\log_3 y}{\log_3 10}} = y^{\frac{2+4\log_3 y}{\log_3 10}} \Leftrightarrow y^{\frac{4-2}{\log_3 10}} = 1$

$y^{\frac{2}{\log_3 10}} = 1 \Rightarrow y = 1,\ x = 3$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(2^x)' > 1$

$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$

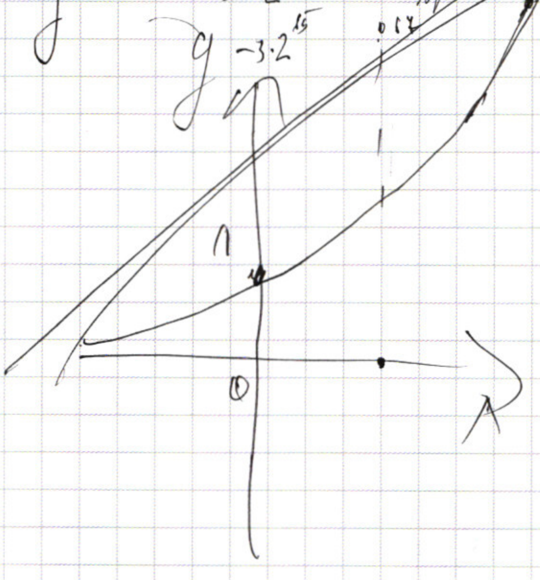
$2^x + 2^{64}(6 - x) = 70 - x$

$x = 6 \Rightarrow \boxed{64 = 64}$

$\cancel{x = 6 \Rightarrow}$ достигается равенство, но его не включаем.

$70 + 2^{64}x - x - 3\cdot 2^{65} = 2^{64}(x-3) - x + 70$

$y - 3\cdot 2^{65} > 2^x$ никогда! , $y \leq 2^{64}(x-3)$



При $x < 3$ $2^{64}(x-3) - x + 70 \ll 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $3375 : 5 = 600 + 60 + 15 = 675 : 9 = \underbrace{630}_{9\cdot 70} + \underbrace{45}_{9\cdot 5} = 9 \cdot 75$

$3375 = 9 \cdot 5 \cdot \underbrace{75}_{3\cdot 25} = 5^3 \cdot 3^3$

Т.е. $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Т.к. число восьмизначное, то для того, чтобы произв. было равно 3375, помимо ~~т~~ трёх троек и трёх пятёрок, в числе должны быть две единицы.

Кол-во вариантов расположить 3 числа (один.) на 8 позициях: $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56$

Кол-во вариантов расположить 3 один. ч-ла на 5 позициях: $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

Ост. две единицы можно расположить единств. способом: 1

Итого $C_8^3 \cdot C_5^3 = 560$.

$\boxed{\text{Ответ: } 560}$

$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = \frac{7\cdot 8}{2} \cdot \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3} = 560$. Т.е. считая мы берем вместо троек единички, мы получаем тот же ответ.

№7) $\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$; при $\forall x$, $y > 3\cdot 2^{65}$

$3\cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1)x \Rightarrow \frac{3\cdot 2^{65} - 70}{2^{64}-1} \leq x$

$y = \frac{x}{3} \Rightarrow \left(\frac{x^4}{243}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x^2}{9}\right)^{\lg \frac{x^2}{3}}$

$\lg x = \frac{\log_3 x}{\log_3 10}$; $\lg \frac{x^2}{3} = \cancel{\lg x^2} = \frac{\log_3 \frac{x^2}{3}}{\log_3 10} = \frac{2\lg x - 1}{\lg_3 10}$

$\frac{x^{4\frac{\log_3 x}{\log_3 10}}}{3^{5\frac{\log_3 x}{\log_3 10}}} = x^2$

№3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$

$(243x^4)^{\lg x} = \left(\frac{x^2}{9}\right)^{\lg x} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)^{\lg x - \lg 3}$

$\exists\, x^{2^{\lg x}} = t$

(2) : $x^2 - 2x(y+2) \cancel{+3(y)^2} - 3y^2 + 12y = 0$

$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 - 3y^2 + 12y = -2y^2 + 16y + 4$

$3y^2 - 12y + 2xy + 4x - x^2 = 0 \iff 3y^2 + 2y(\cancel{2}x - \cancel{6}) + 4x - x^2 = 0$

$\frac{D}{4} = \cancel{4x^2 - 24x}\ x^2 - 12x + 36 - 12x + 3x^2 = 4x^2 - 24x + 36 = (2x - 6)^2 = 4(x-3)^2$

$y_{1,2} = \frac{6 - x \pm 2|x-3|}{3}$

$\exists\, x \geq 3 \Rightarrow y_1 = \frac{6 - x + 2x - 6}{3} = \frac{x}{3}$ or $y_2 = \frac{6 - x - 2x + 6}{3} = 4 - x$

$\exists\, x < 3 \Rightarrow y_2 = \frac{6 - x + 6 - 2x}{3} = y_2$ or $y_{22} = \frac{6 - x - 6 + 2x}{3} = +\frac{x}{3}$

$\to 6 - 2x$

T.e. $y_1 = 4 - x$; $y_2 = +\frac{x}{3}$

(2) $= 3(y + x - 4)\left(y - \frac{x}{3}\right) = 0 \iff \underset{(\alpha)}{(y + x - 4)}\ \underset{(\beta)}{(3y - x)} = 0$

Либо так, либо так.

$(\alpha) \to (1)$: $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)}$, $x \neq 0$; $x = 4 - y$

$y^{5\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \iff y^{2\lg x}\left(y^{3\lg x} \cdot x^{-\lg x} - y^{2\lg y}\right) = 0$

$y^{2\lg x}\left(y^{\lg x} \cdot (4-y)^{-\lg x\, 4-y}\right.$

$5^{\lg 5}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{3}{2}x - \cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{11}{2}x + \sin\frac{11}{2}x\right)$

$\sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{11}{2}x = 2 \cdot \sin\frac{7}{2}x \cos 2x$

$\cos\frac{11}{2}x - \cos\frac{3}{2}x = -2 \cdot \sin\frac{7}{2}x \sin 2x$

$2\sin\frac{7}{2}x(\cos 2x - \sin 2x)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\beta\sin\beta$ $\Rightarrow$ $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\quad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$-$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow -2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x\cdot\sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = -2\cos 7x\cdot\sin 4x$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$

$\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 14x = 0$

$\frac{\pi}{4} - 11x = \pi + 2\pi n \Rightarrow 11x = \frac{\pi}{4} - \pi - 2\pi n$

$11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{44} + \frac{2}{44}\pi n$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$

$\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cancel{\sqrt{2}}(\cos 7x - \sin 7x + 2\sin 4x) = 0 \quad |:\sqrt{2}$

$(\cos 7x + \sin 7x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin 4x\right) = 0$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \quad |:3$

$\cancel{\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin 4x}$

$\frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi n \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n$

$\sin 4x - \sin 7x = 2\cos 5{,}5x\cdot\sin 1{,}5x$

$\cos 7x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5{,}5x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2} - 7x$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5{,}5x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5{,}5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5{,}5x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{3}{2}x$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

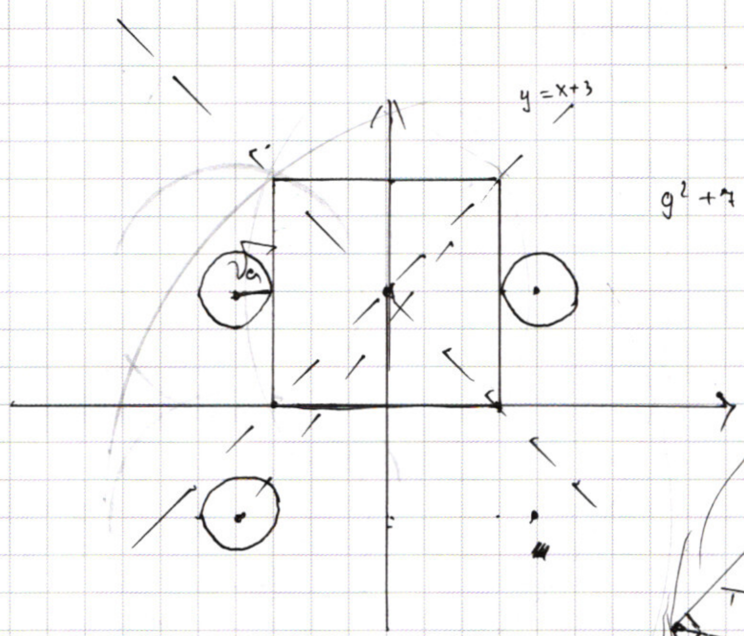
№5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (2) \end{cases}$

(1) :] $y-3-x \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 3+x$; $y-3+x \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 3-x$

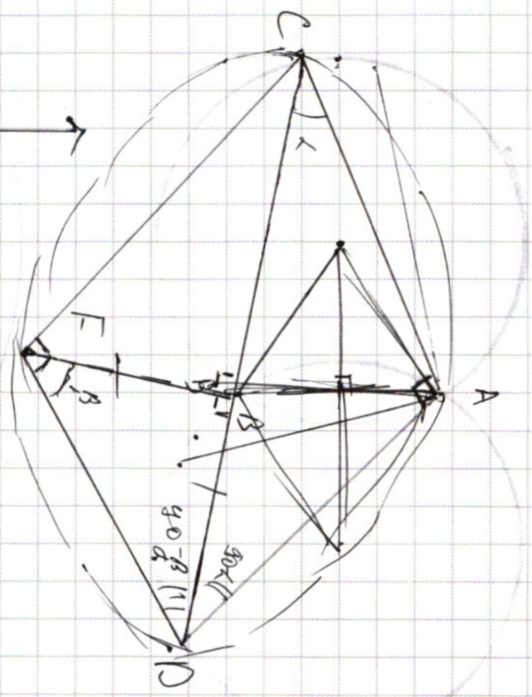
$\Rightarrow y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x} = 6 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$

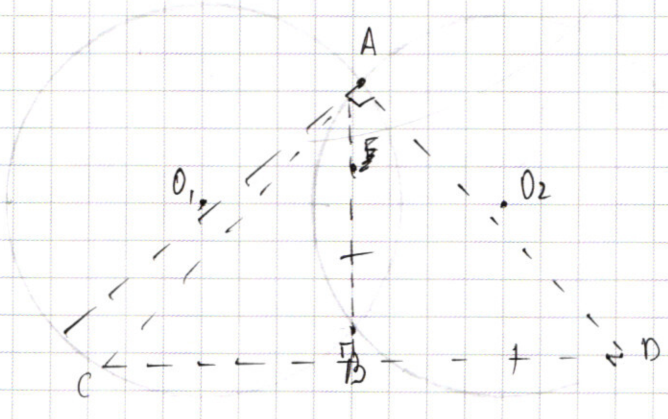
~~(2)~~ : $y < x+3$; $y > 3-x \Rightarrow x+\cancel{3}-\cancel{y}+\cancel{y}-\cancel{3}+x = 6 \Rightarrow x = 3$

; $\cancel{x}+3-y-y+3-\cancel{x} = 6 \Rightarrow y = 0$



$9^2+7^2 = 81+49 = 130 = a^2 \Rightarrow R = \sqrt{a} = \sqrt{130}$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y > 3 \cdot 2^{65} + 1$; $y \le 70$ $\varnothing$

$x < 0 \Rightarrow y > 3 \cdot 2^{65} > 0$; $y \le 70 - 2^{64}|x| + 1$ $\varnothing$

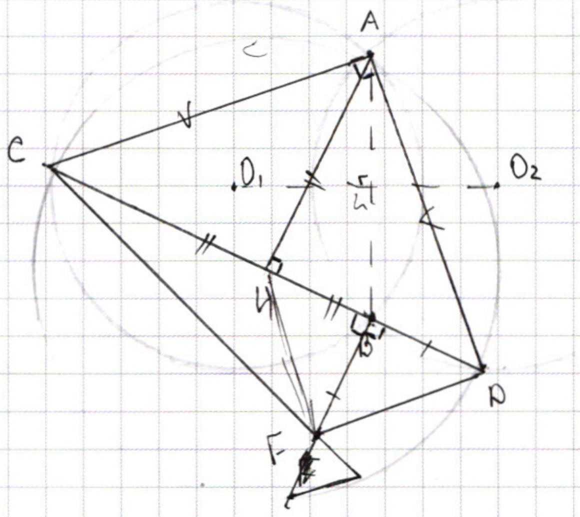
Значит $x > 0. \Rightarrow y > 0$

Заметим, что при $x > 0$ y

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

$R=5$; $B \in D$, $\angle CAD = 90^0$



Решение: т.к. $\angle ACD$ и $\angle ADC$ опир. на одну и ту же дугу, то они равны $\Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедр., $AC = AD$.

Проведем высоту AH — она также медиана и бисс-са

т.е. $AH = CH = HD$. Значит H - центр окр-ти ω, опис. около $\triangle CAD$.

$\angle ACD + \angle ADC = 90^0 = \angle CFD$ (опир. на одни и те же дуги)

т.е. $\angle CFD = 90^0 \Rightarrow F \in \omega \Rightarrow CH = HF$

Очевидно отсюда, что $CF = 10$

$\boxed{\text{Ответ: } CF = 10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

Преобразуем: $\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x \sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = -2\cos 7x \sin 4x$

$\cos 14x = (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$

Итого имеем: $-2\sin 4x(\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$

$\Leftrightarrow (\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x) = 0$

Поработаем со второй скобкой: $\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x) = 0 \quad |:2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x - \sin 7x) + \sin 4x\right) = 0 \overset{\text{метод вспомогательного аргумента}}{\Leftrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 2\sin\frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2}$

$= 2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \cos\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

Рассмотрим первую скобку: $\cos 7x + \sin 7x = 0 \Leftrightarrow \sin 7x = -\cos 7x \quad |:\cos 7x$

Переход равносилен т.к. если $\cos 7x = 0$, то $\sin 7x = 1$, то есть $1 = -0$, что неверно. Значит $\operatorname{tg} 7x = -1 \Rightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$; $x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n$; $x = \frac{-3\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

№5) a - ? 2 реш.

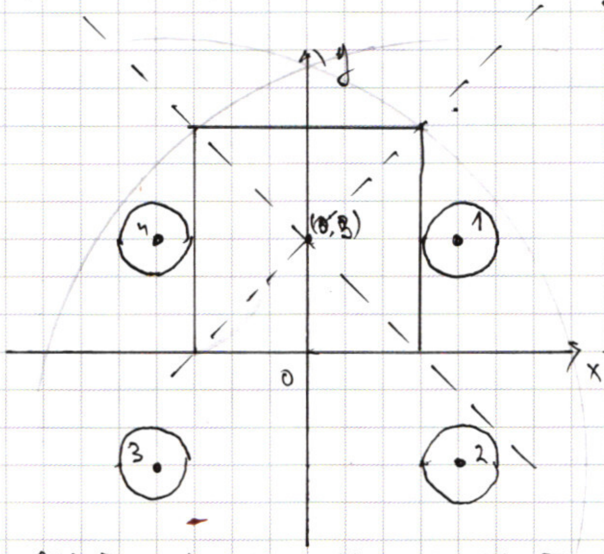
$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 & (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a & (2) \end{cases}$$

(1) - ~~это квс~~ последовательно рассматривая раскрытия модулей, понимаем, что первое семейство - квадрат. (Достаточно рассмотреть раскрытие обоих модулей как положительные, а потом полученный отрезок симм. отразить отн. прямых $y=x+3$ и $y=3-x$)

(2) 4 окр-ти с радиусом $R=\sqrt{a}$ и центрами $(4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$

Опять же в силу симметрии.

Изобразим (1) на пл-ти XoY



Пронумеруем окр-ти. Первый случай, удовл. усл. будет при $R=1$ => $\sqrt{a}=1$ => $\boxed{a=1}$. Окр-ти 1 и 4 касаются квадрата, а две другие нет.

Далее в силу симметрии: окр-ть 1 имеет ст-ко же пересечений с квадратом, ск-ко и окр-ть 4. Аналогично 2 и 3.

Далее окр-ти 1 и 4 суммарно имеют с квадратом 4 решения до тех пор, пока не перестанут касаться его. Окр-ти 2 и 3 единственно касаются с квадратом т-ко ~~3~~ 2 раза: в т-ках $(-3;0)$; $(3;0)$ и $(-3;6)$; $(3;6)$

В первом случае окр-ти 1 и 4 всещё касаются квадрата, а во втором ~~уже~~ уже нет. Найдём радиус окр-ти во 2-м случае. пусть $(x_0;y_0)=(3;6)$; $(x_3;y_3)=(-4;-3)$

$R^2 = (x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2 = 7^2+9^2=49+81=130 \Rightarrow a=130$

При $R^2>130$ окр-ти ~~реш~~ не пересекаются больше с квадратом.

$\boxed{\text{Ответ: } a=1,\ a=130}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $3375 = 3^3 \cdot 5^3$

Для того, чтобы произведение ~~8-ми~~ цифр 8-ми значного числа было равно 3375, необходимо, чтобы оно содержало в себе две единицы.

Кол-во вариантов расположить 3 цифры (одн.) на 8 позициях: C_8^3.

Кол-во вар-в расположить 3 другие одн. цифры на 5 позициях (3 позиции уже заняты): C_5^3

Оставшиеся две единицы можно расположить единственным образом.

Итого: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 1 = 560$ $\left(\frac{8!}{5!\cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 2} = 560 \right)$

$\boxed{\text{Ответ: } 560}$

№3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{сразу видно}} x > 0;\ xy > 0 \Rightarrow y > 0$

$(2) \Leftrightarrow 3y^2 - 12y + 2xy + 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y(x-6) + 4x - x^2 = 0$

Р-м как квадр. трёхчлен отн. y

$\frac{D}{4} = x^2 - 12x + 36 - 12x + 3x^2 = 4x^2 - 24x + 36 = 4(x-3)^2$

$y_{1,2} = \frac{6 - x \pm 2|x-3|}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{3} \\ y = 4 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3y & (A) \\ x = 4 - y & (B) \end{array}\right.$

Подставим $(A) \rightarrow (1)$:

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg y^2 3} \Leftrightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

См. продолжение на след. стр.!

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$; $\lg 3y = \frac{\log_3 3y}{\log_3 10}$

$\lg 3y = \frac{\log_3 3y}{\log_3 10} = \frac{\log_3 y + 1}{\log_3 10}$; $\lg 3y^2 = \frac{\log_3 3y^2}{\log_3 10} = \frac{2\log_3 y + 1}{\log_3 10}$

Т.е. $\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\frac{\log_3 y + 1}{\log_3 10}} = y^{2\left(\frac{2\log_3 y + 1}{\log_3 10}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{y^{\frac{4\log_3 y + 4}{\log_3 10}}}{3^{\frac{\log_3 y + 1}{\log_3 10}}} = y^{\frac{4\log_3 y + 2}{\log_3 10}} \Leftrightarrow y^{\frac{4\log_3 y + 4}{\log_3 10}} = y^{\frac{4\log_3 y + 2}{\log_3 10}} \cdot (y+3)\cdot 3^{\frac{1}{\log_3 10}}$

Разделим обе части ур-ия на $y^{\frac{4\log_3 y + 2}{\log_3 10}}$ (равносильный переход т.к. $y>0$)

$y^{\frac{2}{\log_3 10}} = (y+3)\cdot 3^{\frac{1}{\log_3 10}} \Leftrightarrow \cancel{y^{\frac{2}{\log_3 10}} \Leftarrow y\cdot 3^{\frac{1}{\log_3 10}} = 3^{\frac{1+\log_3 10}{\log_3 10}}}$

$y^{\frac{2}{\log_3 10}}\cdot 10 = y+3 \Leftrightarrow y\left(y^{\frac{2-\log_3 10}{\log_3 10}}\cdot 10\right) - 3 = 0$

$y = \frac{x}{3} \Rightarrow \left(\frac{x^4}{243}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x^2}{9}\right)^{\lg \frac{x^2}{3}} \Longleftarrow (2) \to (1)$

$\lg x = \frac{\log_3 x}{\log_3 10}$; $\lg \frac{x^2}{3} = \frac{2\log_3 x - 1}{\log_3 10}$

$x^{\frac{4\log_3 x}{\log_3 10}} \cdot 3^{-\frac{5\log_3 x}{\log_3 10}} = x^{\frac{4\log_3 x - 2}{\log_3 10}} \cdot 3^{\frac{-2\log_3 x + 2}{\log_3 10}} \quad \Big| : x^{\frac{4\log_3 x - 2}{\log_3 10}}$

$x^2 \cdot 3^{-5\log_3 x} \cdot \cancel{3^{\frac{1}{\log_3 10}}} = 3^{(-4\log_3 x + 2)} \cdot \cancel{3^{\frac{1}{\log_3 10}}}$

$x^2 \cdot x^{-5} = x^{-4} \cdot 9 \quad | : x^{-4} \ (x \neq 0)$

$\boxed{x = 9} \Rightarrow y = \frac{x}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{(9;3)}$

$(B) \to (1)$: $x = 4 - y$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y(4-y)} \Rightarrow 4 - y > 0 \Rightarrow y < 4$, $y > 0$

Т.к. обе части положительные (т.к. основания положительные), то мы имеем право прологарифмировать.

$\log_{10}\left(y^{5\lg(4-y)}\right) - \log_{10}(4-y)^{\lg(4-y)} = \log_{10}\left(y^{2(\lg y(4-y))}\right)$

см. след. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолж. зад №3.

$5\lg(4-y)\lg y-(\lg(4-y))^2=(2\lg y(4-y))\cdot\lg y$

$\hookrightarrow 2\lg y+2\lg(4-y)$

$\exists \lg y=a,\ \lg(4-y)=b$

$5ab-b^2=(2a+2b)\cdot a \Leftrightarrow 5ab-b^2=2a^2+2ab$

$\Leftrightarrow 2a^2-3ab+b^2=0$ ~~$/ : ab \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)+3\frac{b}{a}-3=0$~~

отн. b: $D=9a^2-8a^2=a^2 \Rightarrow b=\frac{+3a\pm|a|}{2}$, ~~$|a|=a$ т.к. $\lg$~~

$\Rightarrow b=2a;\ b=a$

$b=a \Rightarrow \lg y=\lg(4-y) \Rightarrow y=4-y \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=2$

$\boxed{(2;2)}$

$b=2a \Rightarrow$ ~~$4-y$~~ $\lg(4-y)=2\lg y \Leftrightarrow 4-y=y^2 \Rightarrow y^2+y-4=0;$

$D=1+16=17;\ y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \xRightarrow{(y>0)} y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$ ~~$x=4-y=\frac{+1-\sqrt{17}}{2}$~~

$x=4-y=4-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)=\frac{8+1-\sqrt{17}}{2}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}>0 \Rightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(9;3);(2;2);\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

№7) $\begin{cases} y < 2^x + 3\cdot 2^{65} & (1) \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x & (2)\end{cases}$

Заметим, что при $x \le 0$ система уравнений не имеет решений.

Попробуем приравнять: (1) = (2)

$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}\cdot x - x$.

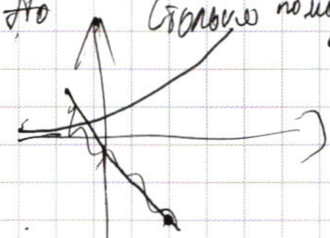
Заметим, что ~~при~~ $x = 6$ — решение. Т.е. при $x=6$ графики таких ф-ий пересекутся, а потом (1) > (2) т.к. $(2^x)' > x'$

$\begin{cases} y - 3\cdot 2^{65} < 2^x & (1) \\ y - 3\cdot 2^{65} \le 70 - x + 2^{64}x - 3\cdot 2^{65} = 2^{64}(x-6) + (70-x) & (y_2)\end{cases}$

Ну а при $x \in (0;6) \to (2) > (1)$

При $x=1$, $2^{64}\cdot(-5) + 69 \to$ на столько „вниз" уходит ф-ия.

~~Но~~ Столько по модулю целых решений снизу $-5\cdot 2^{64}+69$, а сверху (вкл. 0) → 2.



Будем считать след. образом.

Очев, что решения есть т-ко при $x=1$, 2, 3, 4, 5. Посчитаем все и просуммируем.

~~За кол-во реш-й~~ $x=1 \Rightarrow 2^{64}\cdot 5 + 69$ реш-й $+2$

$x=2 \Rightarrow 2^{64}\cdot 2^2 + 68 = 2^{66}+68 \to$ снизу отн. 0x, а сверху отн. 0x — 4 реш-я

$x=3 \Rightarrow 2^{64}\cdot 3 + 67 \to$ реш-й снизу, сверху — 8 реш-й

$x=4 \Rightarrow 2^{64}\cdot 2 + 66 \to$ реш-й снизу, сверху — 16 реш-й

$x=5 \Rightarrow 2^{64} + 65 \to$ реш-й снизу, сверху — 32 реш-я

Просуммируем: $2^{64}(5+4+3+2+1) + 69+68+67+66+65 + \underbrace{2+4+8+16+32}_{62}$

$(5+4+3+2+1) \to 15$

$S = \frac{65+69}{2}\cdot 5 = \frac{134}{2}\cdot 5 = 67\cdot 5 = 335$

$2^{64}\cdot 15 + 335 + 62 = 2^{64}\cdot 15 + 397$.

$\boxed{\text{Ответ: } 2^{64}\cdot 15+397}$

Т.е. я считаю кол-во реш-й сверху исх. знач. y, т.к. знак строгий, то саму точку с коорд. (x_i, y_i) не включаем, а включаем 0

Снизу же y_i и есть кол-во целых реш-й