

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. abcdefgh

efgh a · b · c · d = 3375

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

~~3 3 3 5 5 5~~

3375 | 3
1125 | 3
375 | 3
125 | 5
25 | 5
5 | 5
1

$$5. \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y -$$

$$- \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

1) единица не м.б.; 0 ед. не м.б.

2) 2 единицы

333555

C_6^3 - кол-во способов выбрать

три места, на

которых стоит тройка.

C_7^2 - кол-во способов выбрать два

места, на которых 1

$$C_6^3 \cdot C_7^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} =$$

$$= 420$$

$$\frac{7 \cdot 6}{2}$$

$$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 560$$

3) 3 единицы

5 цифр

$$3^4 = 81$$

9 3 5 5 5

$$C_5^3 \cdot 2 \cdot C_8^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 20 = 1120$$

4) 4 единицы

3 5 5 5

$$C_8^3 \cdot C_5^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 560$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x =$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y -$$

$$- \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -2 \sin 4x = -\sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sqrt{2} \sin 4x \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) - \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos 14x$$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} = \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$-2 \cos 14x - 2 \sin \left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \sin(4x) = \cos 14x = \sin \left(14x + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{7\pi}{12} + \frac{14\pi k}{3}$$

$$10\pi = -44\pi k$$

$$= 2 \sin \left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$-3\pi + 12\pi k = 7\pi + 56\pi k$$

$$\frac{56}{12} \pi k$$

$$3. \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 = (x-y)^2 - 4y^2 - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) \\ (x-3y)(x+y-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\lg 3y \cdot \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = 2 \lg(3y^2) \lg y$$

$$(\lg y + \lg 3)(4 \lg y - \lg 3) = 2(\lg 3 + 2 \lg y) \lg y$$

$$\lg(4-y) \lg \frac{y^5}{4-y} = 2 \lg((4-y)y) \cdot \lg y$$

$$4t^2 + 3 \lg 3 t - \lg^2 3 = 2t^2 + 2 \lg 3 t$$

$$\lg 3 \cdot t = \lg^2 3$$

$$t = \lg 3$$

$$a(58-a) = 2(a+8)b$$

$$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$\lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$4-y = y \quad y = 2$$

$$4-y = y^2 \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16$$

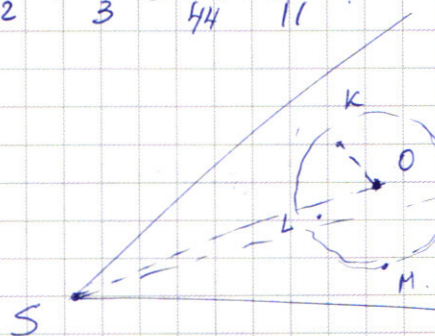
$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

$$2 \lg y = \lg x$$

$$y^2 = x$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$



$$\frac{h}{h+2z} = \frac{M_1 C_1}{M_2 C_2} = \frac{81}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

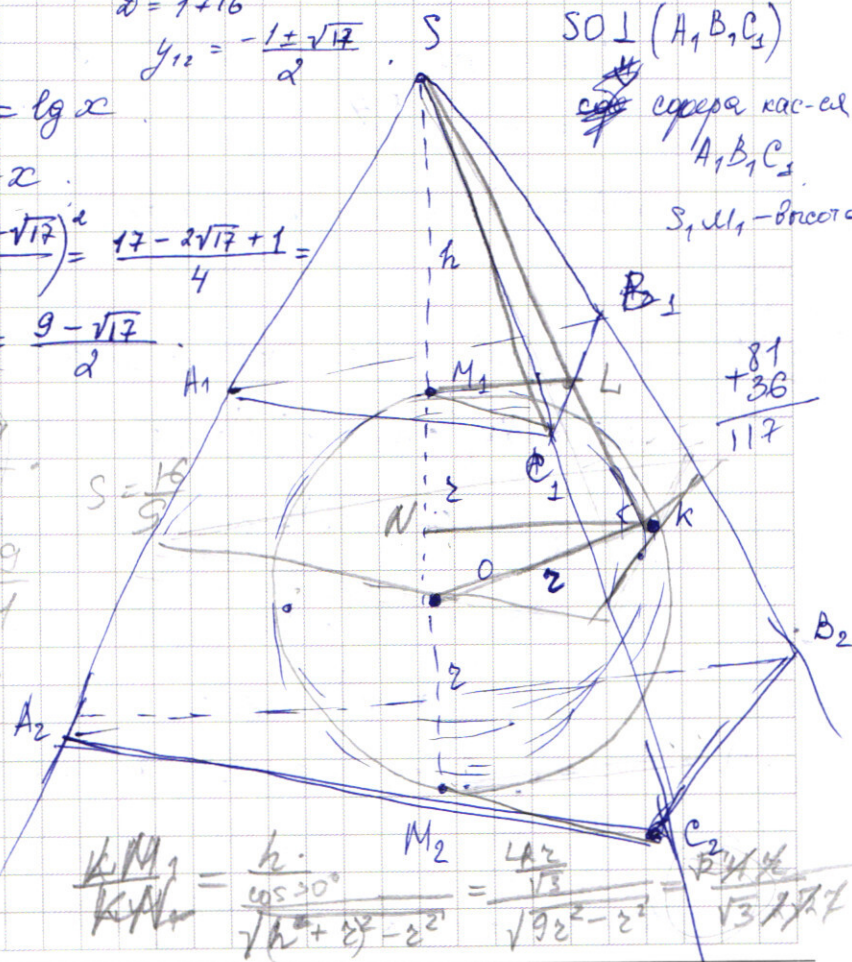
$$2h = h + 2z$$

$$h = 2z$$

$$\angle KSO = 30^\circ$$

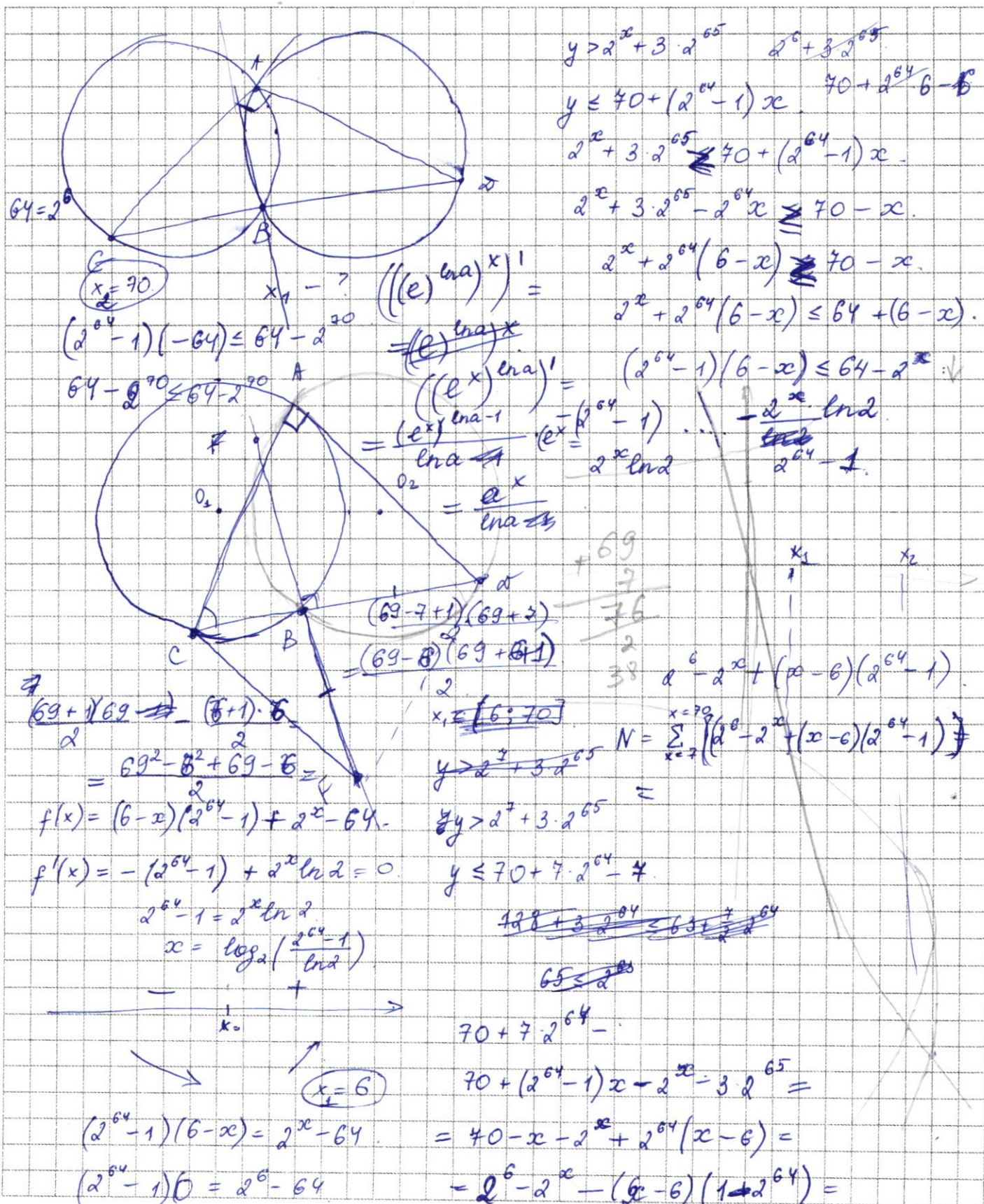
$$\frac{KN}{LM_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2}$$



$$\frac{KM_1}{KN} = \frac{h \cdot \cos 30^\circ}{\sqrt{h^2 + z^2 - z^2}} = \frac{\frac{LAz}{\sqrt{3}}}{\sqrt{9z^2 - z^2}} = \frac{24z}{\sqrt{3} \cdot 4z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned}
(2^{64}-1)2^5(2^6-1) + 2^6 \cdot 63 - 2^{70} + 2^7 &= 2^5(2^{70}-2^{64}-2^6+1) + \cancel{2^{64}} - \cancel{2^6} \\
&+ 2^{12} - 2^6 - 2^{70} + 2^7 = 2^{75} - 2^{69} - 2^{11} + \\
&+ 2^5 + 2^{12} - 2^6 - 2^{70} + 2^7 = \\
&= 2^{69}(2^6-2-1) + 2^{12} - 2^{11} + 2^7 - 2^6 + 2^5 = \\
&= 2^{69} \cdot 61 + \cancel{2^{5/12}} 2^{11} + 2^6 + 2^5 = \\
&= 2^{69} \cdot 61 + 2^5(2^6+2+1) = \\
&= 2^{69} \cdot 61 + 2^5 \cdot 67.
\end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 - \text{восьмизначное число.} \\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 3375 = 3^3 \cdot 5^3 \\ a_i \in [1, 9], \mathbb{N}, a_i \neq 0, \text{ т.к. тогда произв. - ноль.} \end{cases}$

1) Среди a_i хотя бы две единицы. Если нет, то цифрой числа $3, 3, 3, 5, 5, 5$ (т.к. натуральное и произв. простое) и ещё какие-то не равные 1 и 0 числа, т.е. произв. > 3375

2) Среди a_i меньше чем 4 единицы. Если нет, то цифрой числа $1, 1, 1, 1, 5, 5, 5$ (т.к. $5^2 > 9$) и ещё одна единица, и тогда произведение меньше, чем 3375 . $\neq$

3) Пусть среди a_i две единицы. Тогда остальные цифры это $3, 3, 3, 5, 5, 5$. Способов поставить 1 на восемь две единицы на 8 любых из восьми мест — $8 \cdot C_8^2$. Способов выбрать из оставшихся шести мест три, на которых будут стоять цифры 3, — C_6^3 . На оставшиеся три места ставятся цифры 5. ($C_3^3 = 1$) Итого способов $= C_8^2 \cdot C_6^3$ (т.к. события не зависимы).
 $= \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ способов различных чисел.

4) Пусть среди a_i три единицы. Тогда цифрой числа $3, 9, 5, 5, 5$. Способов из восьми мест выбрать три, на которых единицы, — C_8^3 . Способов из восьми оставшихся пяти мест выбрать три, на которых 5 — C_5^3 , способов из оставшихся двух мест выбрать два одно, на которых 9 — C_2^2 (на последнее место идёт три 3.) Итого $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 1120$.

5) В сумме: $560 + 1120 = 1680$ различных чисел. ответ см. на обороте

Объем: 1680 размытых чисел.

№2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

$$-2 \sin(7x) \sin(4x) - 2 \cdot \cos(7x) \sin 4x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 4x = \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \end{cases}$$

Объем: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№3. $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = (x-y)^2 - (2y)^2 - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y) -$$

$$-4(x-3y) = (x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ (x-3y)(x+y-4) = 0 \end{cases}$$

прологорифмируем по 10
 $x > 0$ ($\lg x \exists$)
 $y > 0$ ($\lg xy \exists$)

$$\begin{cases} \lg \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg (y^{2 \lg xy}) \\ \begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x (\lg y^5 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y \\ \begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\lg x + \lg y}{5} \lg x \cdot \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0 \\ x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 \lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0 \\ x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 \lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0 \\ x = 3y \\ (2 \lg y - \lg(x))(\lg y - \lg(x)) = 0 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \lg y - \lg x = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y - \lg x = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \lg y - \lg x = 0 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y - \lg x = 0 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = 0 &= x \\ y = 3; x = 9 \\ y = 0 \\ y^2 &= 4 - y \\ x &= 4 - y \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ x = 9 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

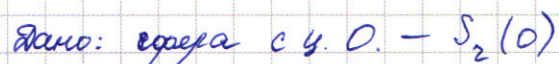
$$y > 0, x > 0 \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16; y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; y > 0, 4 - y > 0$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

№ 4



$I_2(0)$ кас-ся SB, C, B_m, K

$S_z(0)$ рас-се $SA, B, \text{ и } m, M$

~~SA~~ $A_1SC_1, A_1SB_1, B_1SC_1$
множеств

(A_1, B_1, C_1) кас-ая $S_2(0) \delta m_H$

$$(A_1, B_1, C_1) \perp SO$$

$(A_2 B_2 C_2)$ как-то $S_2(O)$
в м. H_2

$$(A_2 B_2 C_2) \perp SO$$
$$S_{A_1B_1C_1} = 1; S_{A_2B_2C_2} = 4.$$

Максимум: S_{KLM} ; $\angle KSO$

$$] SK \cap B_1 C_1 \notin m. N_1 ; SK \cap B_2 C_2 \notin m. N_2$$
$$I \overset{SM}{SK} \cap B_1 A_1 \in m. T_1, SK \cap B_2 A_2 \in m. T_2.$$

$\exists SK \cap A_1 C_1$ в м. R_1 , $SK \cap A_2 C_2$ в м. L_2

$SM_1 \perp (A_1 B_1 C_1) \notin SO$ это та же прямая)

SH_1 - высота в пирамиде $SA_1B_1C_1 \Rightarrow SH_1 \perp H_1N_1$;

$$SM, L, H, R$$

4 ΔSOK и ΔSOL - прямоугольные с
общей гипотенузой и равными катетами ($OK \perp KS$ и $OL \perp LS$ т.е.
" $S_2(0)$ кас-се), $SH_1 \perp H_1 K_1$

$$\Delta SOK = \Delta SOL \quad H_1 \text{ увеличивается на } H_1 N_1 \text{ и}$$
$$\Delta SM, N_{\perp} = \Delta SM, R_{\perp} \quad (\text{по равному углу и гипотенузе})$$
$$\Delta S_{N_1, R_1} - \mu/\delta, \text{ так же как } u \Delta SKL \Rightarrow KL \parallel N_1, R_1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Аналогично $N_1 T_1 \parallel KM$, $N_2 R_2 \parallel KL$; $N_2 T_2 \parallel KM$; $T_1 R_1 \parallel KM$.

Следов-но $(A, B, C) \parallel (KL, M) \parallel (H, B_d, C_d)$ $\parallel A \parallel B \parallel C$

$$2) \quad A_1 B_1 \parallel A_2 B_2; B_1 C_1 \parallel B_2 C_2; A_1 C_1 \parallel A_2 C_2 \Rightarrow \triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$$

$$k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \text{коэф. подобия}$$

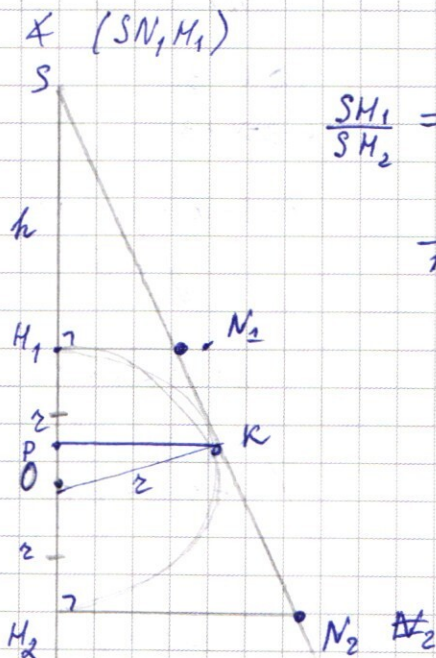
$$k = \frac{1}{a}$$

~~(центрально-осяз)~~

N_1M_1 и N_2M_2 — отрезки, соединяющие основания перпендикулярных
гомотетичных и точку, делящую стороны в равных отношениях
 $CK = \frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $(C_1N_1 = \frac{SN_1}{2} = \frac{B_1N_1}{2} = C_2N_1 = C_2N_2)$

$$\frac{N_1 M_1}{N_2 M_2} = k = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{C_1 N_1}{C_2 N_2} = \frac{S N_1}{S N_2} = \frac{B_1 N_1}{B_2 N_2} \right) = \frac{C_1 N_1}{B_1 N_1} = \frac{C_2 N_2}{B_2 N_2}$$



$$\frac{SM_1}{SM_2} = \frac{H_1 N_1}{H_2 N_2} ; \quad \square SM_1 = k ; \quad H_1 O = z ; \quad H_1 H_2 = 2z$$

$$\frac{h}{h+dz} = \frac{1}{2} \quad , \quad dh = h+dz$$

$$h = 2\varepsilon = 0\text{K}$$

$$SO = h + z = 3z$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{OS} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

3) $SP \perp (A_1B_1C_1)$; $(A_1B_1C_1) \parallel (KLM) \Rightarrow SP \perp (KLM)$ - Высота пирамиды

$$SK = \sqrt{(h+z)^2 - z^2} = \sqrt{9z^2 - z^2} = 2\sqrt{2} z$$

$$SN_1, \cancel{\frac{h}{\cos \angle KSO}} = \frac{h}{\cos \angle KSO} = \frac{h}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}h}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} h$$

$$\theta \frac{PK}{H_1 N_1} = \frac{SK}{SN_1} = \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2} z}{\frac{6}{2\sqrt{2}} z} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

N, H_1 и KP - отрезки, соединяющие ~~основ-я высот центра масс~~
основ-я высот в подобных пирамидах
и точки, делящие отрезки, в равном отнош-ях

гомотетии

$$с k = \frac{N_1 H_1}{KP} = \frac{3}{4} \cdot \Downarrow = \frac{KP}{N_1 H_1} = \frac{4}{3}$$

$\triangle DEF$ - сечение плоскостью (KLM) - подобен $\triangle A_1 B_1 C_1$

$$с k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = k^2 = \frac{16}{9}$$

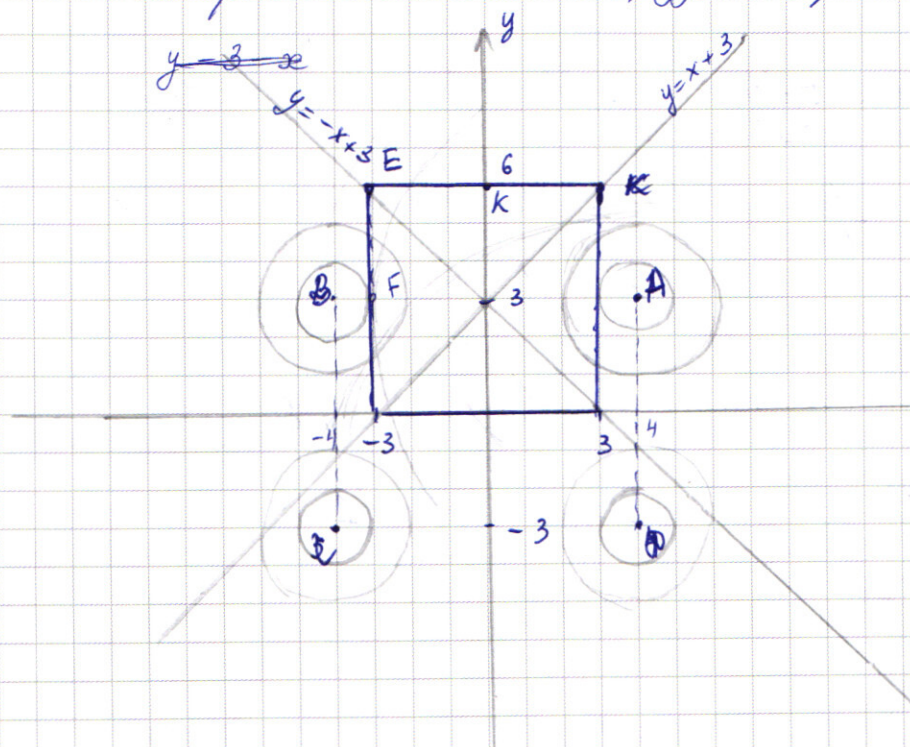
$$S_{DEF} = \frac{16}{9}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right); S_{DEF} = \frac{16}{9}$$

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 2 \end{cases}$$

$a = ?$ имеет ровно два решения

Построим мн-во точек, удовлетворяющих первому ур-ю.



$$1) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x+y-3+x &= 6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y+3+x+y-3+x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y+3+x-y+3-x &= 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$4) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x-y+3-x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим второе ур-е

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad ; a \geq 0, \text{ иначе } \nexists x, y.$$

4 окр-ты с центрами $(4, 3); (-4, +3); (4, -3); (-4, -3)$ и радиусом $\sqrt{a}$

Заметим, что картинка графика симметрична отн-но Oy ,
т.е. если x_1 ^{реш-е} $\neq 0$, то $-x_1$ тоже решение. ^{Назовем} ^{три окружности} окр-ты как на рис.

Если $\sqrt{a} < 1$, то корней 0. (A, B, C, D)

Если $a = 1$, то $x_1 = 3; x_2 = -3$.

Если $a > 1$ и $a < 49$, то два корня - пересек-я одной окр-ты с ^A ~~и~~ ^{квадратом}

и два корня - пересек-я другой (B)
Если совпали, то $a = 25$, но тогда есть еще пересек-я ^{окр-ты C и D}
 $\begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{24} - 3 \end{cases}$

т.е. не подходит

Если $a \in (49; 58)$, то тогда E $(-3, 6)$ квадрата скрываются,
а F $(-3, 3)$ внутри, ~~т.е. K $(-3, 6)$~~ ^{внутри,}

т.е. окр-ть A пересекается с квадратом ^{четыре раза} в т. с $x < 0$.

т.е. корней > 2 .

Если $a = 49$, то окр-ть A пересекается с квадратом 3 раза

Если $a = 58$, то окр-ть A пересекается с квадратом в $(-3, 6)$
а окр-ть B в т. $(3, 6)$ и $(3, 0)$, ^{$(-3, 0)$,}
т.е. 4 решения.

Если $a > 58$, то окр-ты A и B не пересекаются с квадратом.

Если $a \in (58, 130)$, то $(-3, 0)$ внутри окр-ты C, а $(-3, 6)$ вне,

т. $(3; 6)$ внутри окр-ти C , ~~$m(3; 6)$ вне~~

т.е. окр-ть C пересекается с квадратом в двух точках, решений ≥ 3 .

Если $a = 130$, то $(-3; 6)$ и $(3; 6)$ решения, при этом квадрат, кроме E , лежит внутри окр-ти C , т.е. больше пересек-й нет. ровно два корня.

Если $a > 130$, то квадрат внутри окр-ти A, B, C, D , т.е. решений нет.

Ответ: $a = 1$ или $a = 130$.

№ 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$\forall y$, удовле-то $2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$.

$$2^x - 2^6 + 2^{64}(6-x) - (6-x) < 0.$$

$$2^x - 2^6 + (2^{64} - 1)(6-x) < 0.$$

$$f(x) = 2^x - 2^6 + (2^{64} - 1)(6-x)$$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln 2}{\ln 2} + (2^{64} - 1) \quad f'(x) - \text{возраст.}$$

$f'(x) \quad \xrightarrow{\quad x_0 \quad} \quad +$
 $f(x) \quad \searrow \quad \nearrow$ Значит не более двух корней.

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 70.$$

$$f(6) = 2^6 - 2^6 + (2^{64} - 1)(6 - 6) = 0$$

$$f(70) = 2^{70} - 2^6 + (2^{64} - 1)(6 - 70) = 2^{70} - 2^6 - 2^6 \cdot 2^{64} + 2^6 = 0$$

$$x \in (6; 70)$$

Тогда знаем x_* и y_1 - миним. подходящий, y_2 - максим. подходящий

$$\begin{cases} y_1 = 2^{x_1} + 3 \cdot 2^{65} + 1 \\ y_2 \leq 70 + (2^{64} - 1)x_1 \end{cases} \quad \text{когда подходящий } y \text{ это } y_2 - y_1 + 1$$

+ ~~$\begin{cases} y_2 \leq 70 + (2^{64} - 1)x_1 \\ y_1 < 2^{x_1} + 3 \cdot 2^{65} \end{cases}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$y_2 = y_1$~~ $N_y = 70 + (2^{64} - 1)x_1 - 2^{x_1} - 3 \cdot 2^{65} - 1 + 1 = 6 - x_1 + 2^6 - 2^{x_1} + 2^{64}(x_1 - 6)$

для каждого x_1 кол-во реш-й это $N_y = (x_1 - 6)(2^{64} - 1) + 2^6 - 2^{x_1}$.
кол-во решений всего

$$N = \sum_{x=7}^{69} ((x-6)(2^{64}-1) + 2^6 - 2^x) = \sum_{x=7}^{69} (x-6)(2^{64}-1) + \sum_{x=7}^{69} (2^6 - 2^x) =$$

$$= (2^{64}-1) \sum_{x=7}^{69} (x-6) + 2^6(69-7+1) - \sum_{x=7}^{69} 2^x = (2^{64}-1) \left(\sum_{x=7}^{69} x - 6(69-7+1) \right) +$$

$$+ 2^6 \cdot 63 - \sum_{x=7}^{69} \sum_{x=0}^{69} 2^x + \sum_{x=0}^6 2^x$$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ формула кол-ва прогр.

$$N = (2^{64}-1) \left(\frac{(69+7)(69-7+1)}{2} - 6 \cdot 63 \right) + 2^6 \cdot 63 - (2^{70}-1) + (2^7-1) =$$

$$= (2^{64}-1) (38 \cdot 63 - 6 \cdot 63) + 2^6 \cdot 63 - 2^{70} + 2^7 = (2^{64}-1) \cdot 32 \cdot 63 + 64 \cdot 63 -$$

$$- 2^{70} + 2^7 = 63(32 \cdot 2^{64} - 32 + 64) - 2^{70} + 2^7 =$$

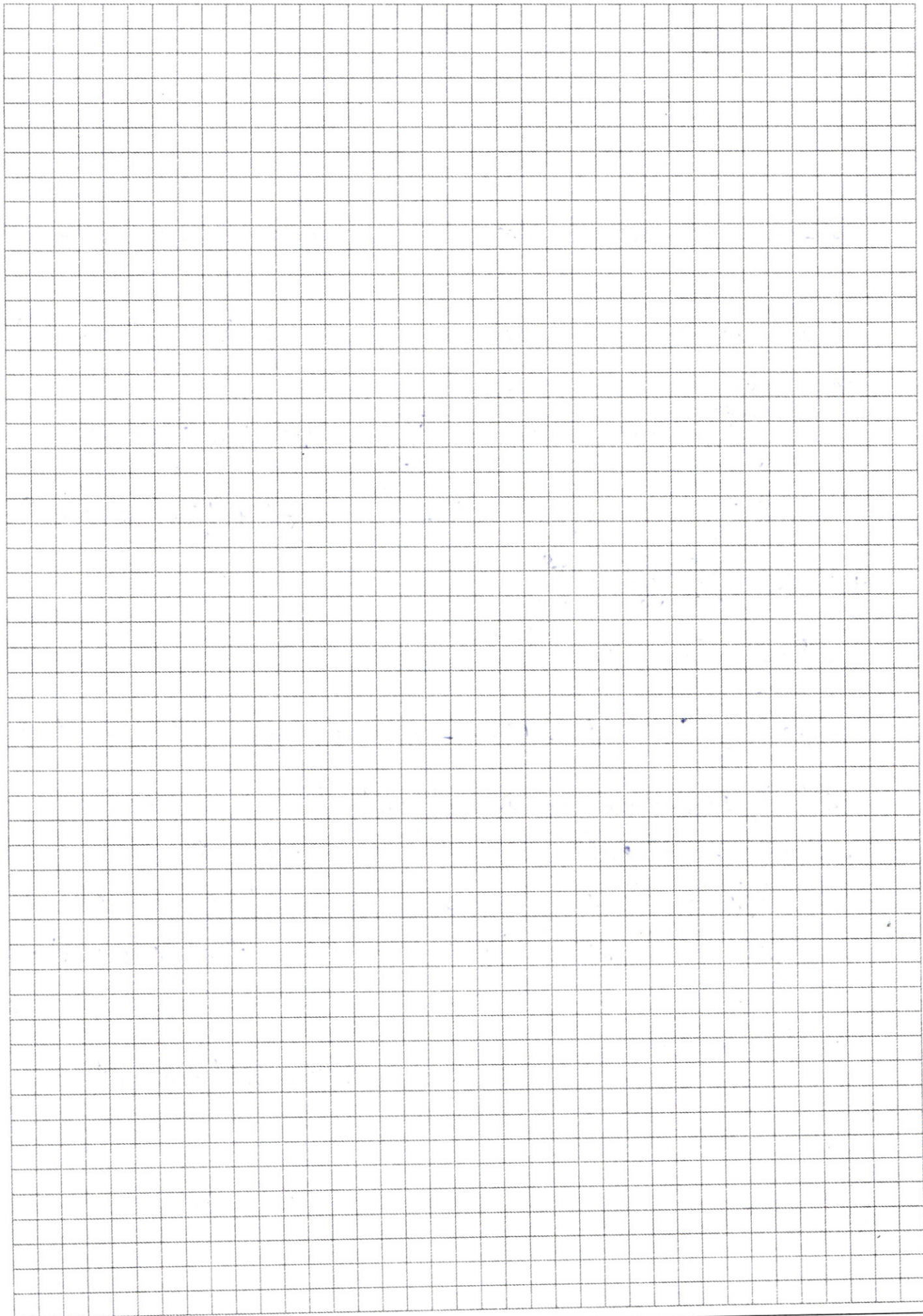
$$= (2^6-1)(2^{69} + 2^5) - 2^{70} + 2^7 = 6 \cdot 2^5 \cdot 2^{75} + 2^{11} - 2^{69} - 2^5 - 2^{70} + 2^7 =$$

$$= 2^{69}(2^6 - 2 - 1) - 2^5(2^2 + 1) = 61 \cdot 2^{69} - 5 \cdot 2^5 + 2^5(2^6 + 4 - 1) =$$

Ответ: $N = 61 \cdot 2^{69} - 5 \cdot 2^5$

$$= 2^{69} \cdot 61 + 2^5 \cdot 67$$

Ответ: $N = 2^{69} \cdot 61 + 2^5 \cdot 67$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)