

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(11x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(11x) \right) - \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\sqrt{2} \left(2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right) \right) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos(14x)$$

$$-2 \sin(4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)$$

$$-2 \sin(4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$-2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) (\sin(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \left(2 \sin\left(\frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2}\right) \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$$

$$\sin\left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z};$$

$$7x = \frac{\pi}{2} - \pi n$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi n$$

$$\frac{11}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi n$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{\pi}{14} - \frac{\pi n}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{14} - \frac{\pi n}{7}$; $x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$

N 1:

$$3375 = 125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3;$$

~~так~~ можно использовать
цифры 1, 3, 5 и заполнить ими
пространство из восьми цифр.

Набор цифр: 1, 1, 3, 3, 5, 5, 3, 5

$$\text{Способов так считать } \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} =$$
$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560 \cdot 10 = 560$$

Более того, можно заменить 3^2 на 9.

Тогда набор: 1, 1, 1, 9, 3, 5, 5, 5

$$\text{Способов так считать } \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 560 \cdot 2 = 1120$$

Итого $1120 + 560 = 1680$ способов;

Иных цифр использовать нельзя, потому
что число можно разложить на простое
множителем единственным способом,
а перемножение $5 \cdot 3 \cdot 1$ дает
нам один новый "составной" множитель
- 9.

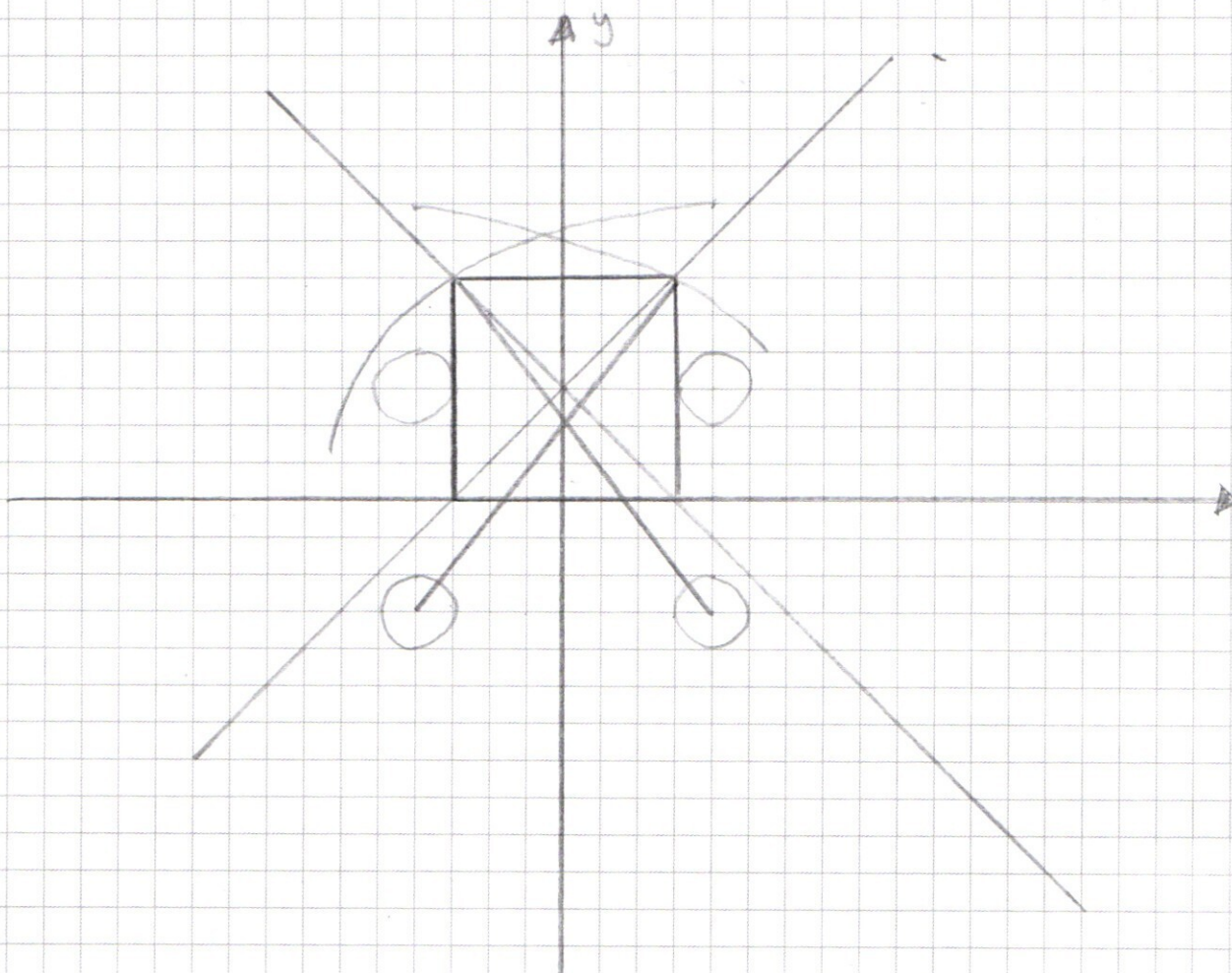
Ответ: 1680;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Построим график уравнения (1)



$y = x + 3$ и $y = 3 - x$ — линии раскроя модулей
при $y \geq x + 3$ и $y \geq 3 - x$ уравнение имеет вид:

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6; \quad y = 6$$

при $y < x + 3$ и $y \geq 3 - x$ уравнение имеет вид:

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6; \quad x = 3$$

при $y < x+3$ и $y < -x+3$ уравнение имеет вид:

$$-y+3+x -y+3-x=6$$

$$y=0$$

при $y \geq x+3$ и $y < -x+3$ уравнение имеет

$$\text{вид: } y-3-x -y+3-x=6$$

$$x=-3$$

Таким образом мы получили квадрат с вершинами $(3; 6); (3; 0); (-3; 0); (-3; 6)$

Рассмотрим уравнение (2)

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a;$$

Графиком будет окружность с центром $(4; 3)$, отраженная относительно O_x и O_y ;

Таким образом, мы получили 4 окружности с центрами $(4; 3); (4; -3); (-4; -3); (-4; 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$; Так, $a \geq 0$; иначе - решений нет;

Рассмотрим ~~окружность~~ $\sqrt{a} = 1$; при таком радиусе две окружности с центрами $(4; 3)$ и $(-4; 3)$ будут касаться сторон квадрата - таким образом будет 2 решения; Далее, увеличивая радиус, количество решений будет ≥ 4 (стороны квадрата будут пересекать окружности); Но когда радиус будет равен $\sqrt{48+8} = \sqrt{56}$, две окружности с положительной координатой y будут ~~пересекать~~ пересекать квадрат в двух вершинах, а значит, при $R > \sqrt{56}$ эти две окружности не будут пересекаться;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тем не менее, две другие окружности все ещё будут иметь по две ~~реальных~~ пересечения с квадратом; то есть 4 решения.

Как увеличивая радиус, так и будет оставаться 4 решения, пока радиус не достигнет

$\sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$; Тогда расстояние между центром окружности и вершиной квадрата будет $\sqrt{130}$ и каждая окружность будет иметь по 1 пересечению с квадратом; Так, система будет иметь два реш.

увеличивая радиус дальше, окружности более никогда не пересекут квадрат.

Так, мы имеем $r = 1$ и $r = \sqrt{130}$;

т.к. $r = \sqrt{a}$, $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$ $\sqrt{a} = \sqrt{130} \Rightarrow a = 130$

Ответ: $1, 130$;

$$N3 \quad \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2):

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) - (3y^2 - 12y) = 0$$

Решим его как квадратное уравнение относительно x с параметром y ;

$$D = (2y + 4)^2 + 4(3y^2 - 12y) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = \frac{6y}{2} = 3y \\ x = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = \frac{-2y + 8}{2} = 4 - y; \end{cases}$$

Подставим $x = 3y$ в первое уравнение:

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg y} = (y^2)^{\lg 3} \cdot (y^2)^{\lg y^2}$$

Разделим обе части уравнения на $(y^2)^{\lg 3}$ ($y \neq 0$ по ООЗ)

$$\left(\frac{y^4}{3} : y^2 \right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg y} = (y^4)^{\lg y^2}$$

Разделим обе части уравнения на $(y^4)^{\lg y}$;

$$\left(\frac{y^2}{3} \right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{y^4}{3} : y^4 \right)^{\lg y} = 1;$$

$$\frac{y^{2 \lg 3} \cdot 1^{\lg y}}{3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}} = 1 \Rightarrow y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 y};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \lg 10^{2 \lg y \cdot \lg 3} &= 10^{\lg 3 \cdot \lg 3 y}, \\ 2 \lg y \cdot \lg 3 &= \lg 3 \cdot \lg 3 y \\ \lg 3 (2 \lg y - \lg 3 y) &= 0 \\ \lg y^2 &= \lg 3 y \\ y^2 &= 3 y \Rightarrow y(y-3) = 0 \Rightarrow y = 3 \quad (y \neq 0); x = 9 \end{aligned}$$

Подставим $x = 4 - y$ в первое уравнение:

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg((4-y) \cdot y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = (y^2)^{\lg(4-y)} \cdot (y^2)^{\lg y}$$

Разделим обе части на $(y^2)^{\lg(4-y)}$ ($y \neq 0$)

$$\left(\frac{y^5}{4-y} : y^2\right)^{\lg(4-y)} = (y^2)^{\lg y};$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = (y^2)^{\lg y};$$

$$\frac{y^3 \lg(4-y)}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = \frac{y^{2 \lg y} \cdot \lg(4-y)}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = 0$$

$$\lg y \cdot 3 \lg(4-y) = \lg y \cdot 2 \lg y \cdot \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$\lg y \cdot 3 \lg(4-y) = 2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)$$

$$\lg y = a \quad \lg(4-y) = b$$

$$3ab = 2a^2 + b^2 \quad 2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2; \quad a = \frac{3b \pm b}{4} = b, \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) \\ \lg y = \frac{\lg(4-y)}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4-y \\ y^2 = 4-y \end{cases} \quad \text{не подходит}$$

$$\begin{cases} 2y = 4 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2 \\ X = \frac{8-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \\ X = \frac{8+1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17; \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} X = 2; y = 2 \\ X = \frac{7-\sqrt{17}}{2}; y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ X = \frac{8+\sqrt{17}}{2}; y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Мы на проверку X и y должны быть больше 0, тогда $X = \frac{7-\sqrt{17}}{2} < 0$ и $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0$ не подходит, а также $X = \frac{8+\sqrt{17}}{2} > 0$ и $y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$ не подходит.

Итого, решением уравнения (1) при $x = 4-y$ является: $(2; 2)$

Ответ: $(2; 2); (8; 3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \lg^2 y - 3 \lg y + \lg^2 x = 0 \quad D = 9 - 8 \lg^2 x$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$3 \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x \quad y \neq 0$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg y^4} \cdot y^{2 \lg 3}$$

$$y = \frac{x}{3}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg y} \cdot \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3}$$

$$y^5 - y^{2+2 \lg y} \cdot x^{\lg x} = 0$$

$$\left(\frac{y^4}{3} : y^4\right)^{\lg 3} = \left(y^4 : \frac{y^4}{3}\right)^{\lg y} ; \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3} \cdot \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg y} = (y^4)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^{4+2}}{3y^4}\right)^{\lg 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg y} \quad \lg y = \frac{3 + \sqrt{9 - 8 \lg^2 x}}{2}$$

$$\left(\frac{x^4}{3^5}\right)^{\lg x} = 5 \lg y = 2 \lg y + 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 1$$

$$x = 4 - y$$

$$\frac{y^{2 \lg 3} - 1}{y^{\lg y}} = 0$$

$$\frac{5 \lg x}{y} - \frac{2 \lg x}{y} - \frac{\lg x}{x} = 0$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3} = 3^{\lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg y}$$

$$\frac{y^{2 \lg y}}{3^{\lg 3y}} = 1$$

$$y^{\lg x} (y^5 - y^2 \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}) = 0$$

$$\frac{y^5}{3^{\lg 3}} \cdot \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x y}$$

$$y^{5 \lg x} - y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x} = 0$$

$$\left(\frac{3^5}{3^2}\right)^{\lg 3} = 3^{2 \lg 3^3}$$

$$y^{5 \lg x} - (y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}) \cdot x^{\lg x} = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{x} : y^2\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y};$$

$$\left(\frac{y^3}{3y}\right)^{\lg y} = y^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg y} = y^{2 \lg y};$$

$$2 \lg^2 y + \lg^2(4-y) = 2 \lg y +$$

$$\lg y \cdot \lg(4-y) = 2 \lg^2 y + \lg^2(4-y)$$

$$\lg y (3 - \lg(4-y) - \lg y) = \lg$$

$$3 \lg y (4-y) = 2 \lg y + \lg y (4-y) \lg(4-y)$$

$$\lg y (4-y) (3 - \lg(4-y)) = 2 \lg y$$

$$\lg y (4-y)$$

$$\frac{y^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} - y^{2 \lg y} \cdot 3^{\lg y}}{3^{\lg y}} = 0$$

$$y^{2 \lg y} (y^{2 \lg y} - 3^{\lg y}) = 0$$

$$y^{2 \lg y} - 3^{\lg y} = y^{\lg 3} - 3^{\lg y};$$

$$y = \lg y$$

$$\lg y \cdot \lg y - 3^{\lg y} = 0$$

$$10^{\lg^2 y} = 3^{\lg y}$$

$$3 = 10^{\lg y}$$

$$10^{\lg^2 y} = 10^{\lg 3 \lg y}$$

$$\lg^2 y = \lg y \lg 3$$

$$\lg y (\lg y - \lg 3) = 0$$

$$\lg y = 0 (y = 1)$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$2t^2 + a^2 = 3t \cdot a$$

$$2t^2 - 3t + (t^2 - a) = 0$$

$$D = 9 - 4(a^2 - a) = 9 - 4a^2 + 4a = -4a^2 + 4a + 9;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\cos 14x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)$$

$$2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) (\sin(-4x) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{-4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2}\right) \cos\left(\frac{-4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{-11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$y^3 - y^2 \cdot 8y \cdot x^{6x};$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{6x} = y^{26xy}$$

$$x \neq 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^{56x}}{x^{6x}} = y^{26xy}; \quad \frac{y^{56x} - y^{26xy} \cdot x^{6x}}{x^{6x}} = 0;$$

$$y^{56x} - y^{26xy} \cdot y^{6x} \cdot x = 0$$

$$y^{26x} (y^{30} - y^{26y} \cdot x^{6x}) = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - (3y^2 - 12y + 12) + 8 - 2xy = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot x \cdot 2 = 12$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad x^2 = 12$$

$$(x^2 - 4)^2 - (\sqrt{3}y - 2\sqrt{3})^2 = 2xy - 8;$$

$$(x - 2 - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}) = 2xy - 8;$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x - y)^2 - (4y^2 - 12y + 8) - 4x - 8 = 0$$

$$(x - y)^2 - (2y - 2)^2 - 4x - 8 = 0$$

$$(x - y)^2 - (2y - 2)^2 - 4x - 8 = 0$$

$$(x - y)^2 - (2y - 2)^2 - (x^2 + 4x + 4) + x^2 - 5 = 0$$

$$(x - y)^2 - (2y - 2)^2 - (x + 2)^2 + x^2 - 5 = 0$$

$$(x - y - 2y + 2)(x - y + 2y - 2) =$$

$$= (x - 3y + 2)(x - y - 2) - 4x - 8 = 0$$

$$(x - y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x - y)^2 - 4(x - y) - 4y^2 + 8y = 0$$

$$(x - y)(x - y - 4) - (4y^2 - 8y + 4) - 4 = 0$$

$$(x - y)(x - y - 4) - (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x - y)(x - y - 4) - (y - 2 - 2)(y - 2 + 2) = 0$$

$$(x - y)(x - y - 4) - 4y(y - 2) = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \end{cases}$$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
 $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2 \sin x \sin y \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin(-4x) \cos(7x)$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin 4x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) = \frac{\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} - 7x \right) - \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} + 7x \right)}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2} \left(\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) \right)}{2} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x ;$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

~~$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(14x) = -2 \sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} + 14x}{2}\right) \cos\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} - 14x}{2}\right)$$~~

$$= -2 \sin\left(\frac{25x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos$$

$$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)$$

~~$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) =$$~~

$$= \sqrt{2} (\sin \varphi \cos 11x - \cos \varphi \sin 11x) =$$

~~$$= \sqrt{2} \sin(\varphi - 11x)$$~~

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x \right) =$$

$$= \sqrt{2} (\cos \varphi \sin 3x - \sin \varphi \cos 3x) =$$

$$= \sqrt{2} \sin(3x - \varphi) = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{3x - 11x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

~~$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(-4x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$~~

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2 \sin(-4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x;$$

$$-2 \sin 4x \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = \cos^2 7x - \sin^2 7x;$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x - \sqrt{2} \sin 4x \sin 7x = \cos^2 7x - \sin^2 7x;$$

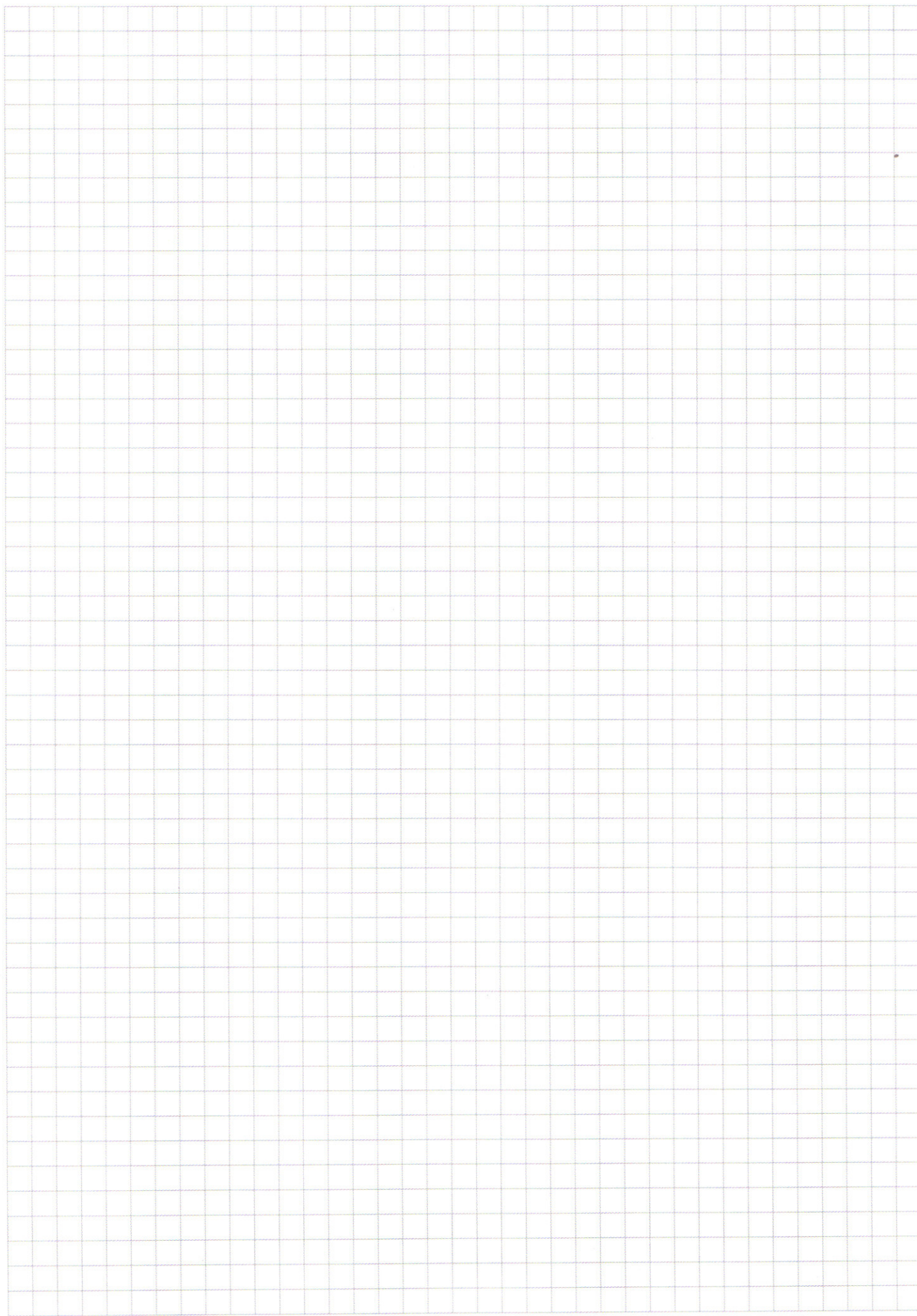
$$\sin^2 7x - \sqrt{2} \sin 4x \sin 7x = \cos^2 7x + \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x;$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & x \in 4-y; \\ & \left. \begin{aligned} & y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ & y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$5 \cdot 6^2(4-y) - 3 \cdot 6^2(4-y)$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3^2$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 5^3 \cdot 3^2$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6$$

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2}{2!} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2}{2!} =$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ - 30 \\ \hline 375 \\ - 35 \\ \hline 250 \\ - 25 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ + 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$1 \cdot 5, 5 \cdot 5, 15, 5$$

$$\frac{2!}{2!} = 1; C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$11, 5, 5$$

$$C_4$$

$$1155$$

$$1515$$

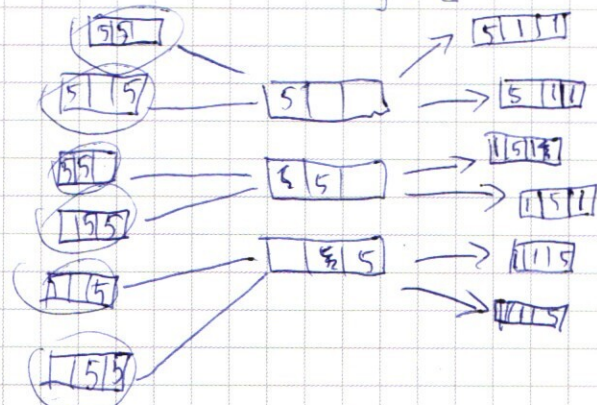
$$1551$$

$$5155$$

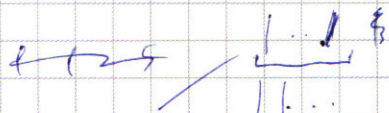
$$5511$$

$$5115$$

$$\frac{3!}{2!}$$

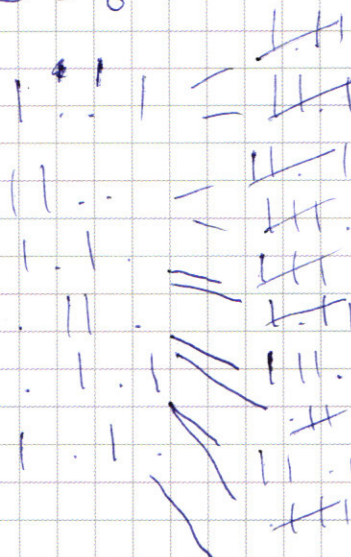
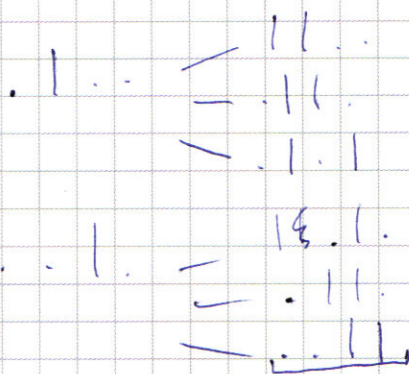


6



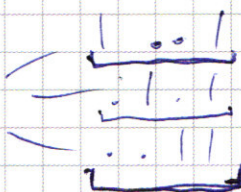
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2^2} = 6$$



1115

...1



1155

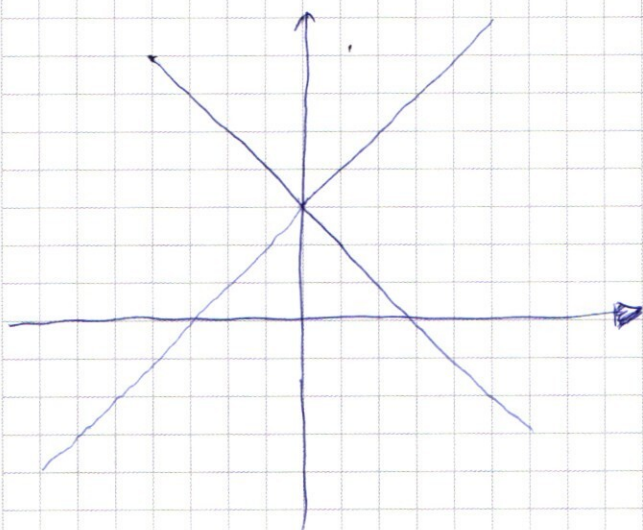
$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2!} \cdot 1 = 4$$

$$\frac{4!}{5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9$$



$$y-3-x=0$$

$$y = x+3$$

$$y-3+x=0$$

$$y = 3-x$$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y$$

$$(x-3y)(x+y-4)=0$$

$$x = 3y$$

$$x = 4-y$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x(x-4) - 2y(x-6) - 3y^2 = 0$$

$$x^2 - x(2y+4) - (3y^2-12y) = 0$$

$$D = (2y+4)^2 + 4(3y^2-12y) =$$

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

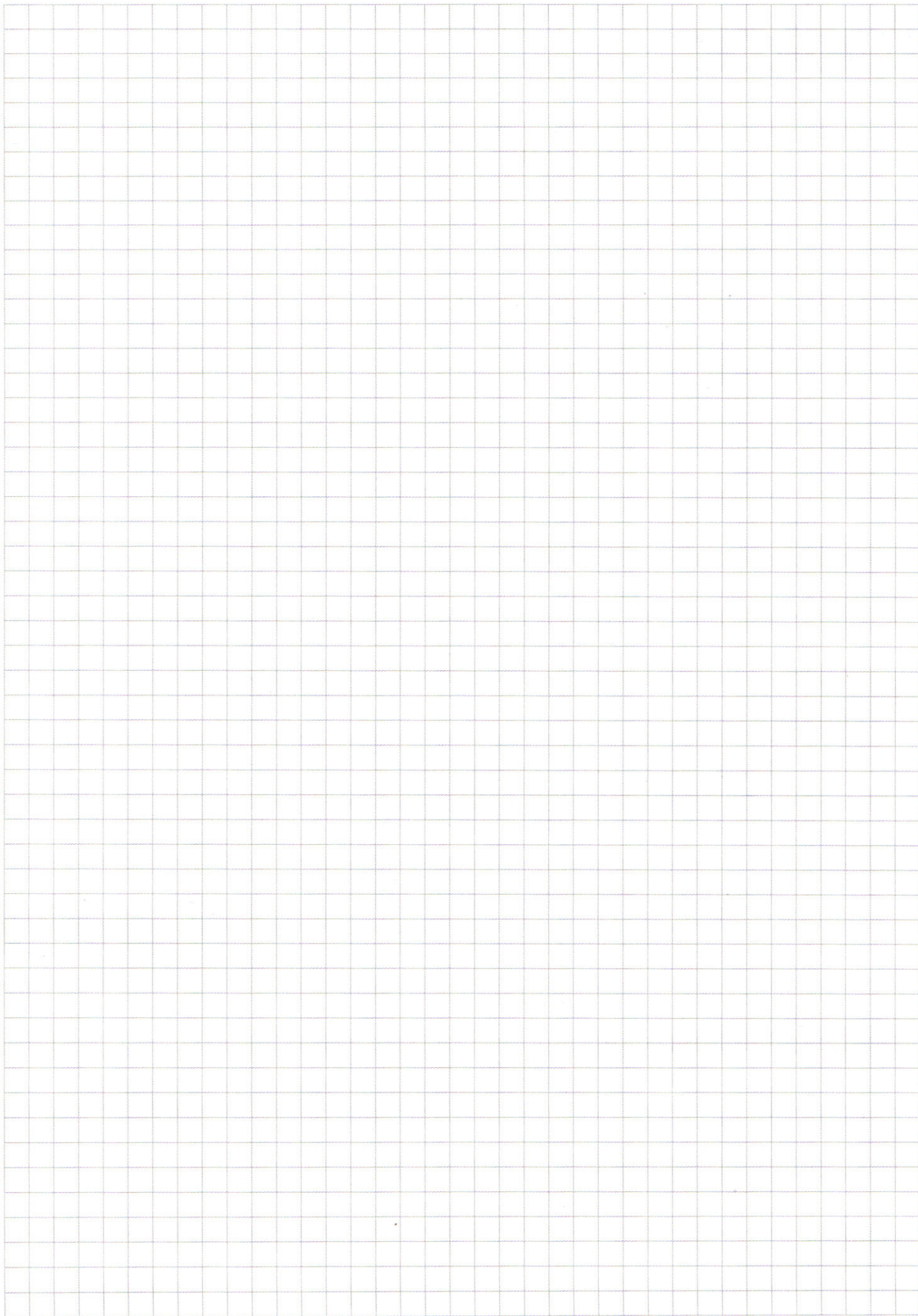
$$16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4y-4}{2}; \frac{2y+4-4y+4}{2}$$

$$3y; 4-y;$$

$$\left(\frac{y}{3y}\right)^{\lg 3y} = y$$

$$\left(\frac{y}{3y}\right)^{\lg 3y} = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{\lg 3y}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)