

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

### Задача №1

Разложим  $3375$  на простые множители,  
 $3375 = 3^3 \cdot 5^3$ . Заметим, что набор цифр,  
 входящих в восьмизначное число может  
 быть только  $\{5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1\}$  или  $\{5; 5; 5; 3; 9; 1; 1; 1\}$   
 (т.к. должно быть кратно  $3^3$  и  $5^3$ , что значит были по 5 и три по 3 и 6.  
 Поскольку цифры меньше 10, а  $5^2 > 10$ ;  $5 \cdot 3 > 10$  и  $3^3 > 10$ ,  
 а оставшиеся цифры равны 1 и не влияют на  
 произведение цифр. Тогда посчитаем количество  
 комбинаций расставить цифры в разном порядке.

$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$  для набора  $\{5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1\}$   
 расставить 8

т.к. если поменять местами две 5 или 3 (или 1) ничего  
 не изменится и число сохранится  
 Аналогично для  $\{5; 5; 5; 3; 9; 1; 1; 1\}$

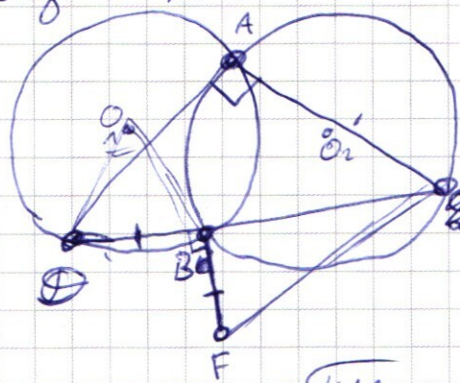
$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$

Тогда всего  $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{36} \cdot \frac{3}{2} = \frac{8!}{24} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24} =$

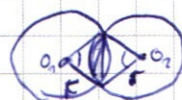
$= 1680$

ответ: 1680.

### Задача №2



Заметим, так как радиусы  
 окружностей равны и  
 они пересекаются в точках A  
 и B, то дуга AB равна для  
 обеих окружностей одной градусной



$\angle O_1 = \angle O_2$

Итак  $\angle AOB = 2\alpha$ ,  
 следовательно  $\alpha = 45^\circ$   $\angle AOB = 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOB$  - равноб. и прам.

Пусть  $\angle BAD = \alpha$  и  $\angle BAC = \beta$ , тогда  $\alpha + \beta = 90^\circ = \angle DAC$

Так как  $\triangle BFC$  - прямоугол.  $\Rightarrow FC = \sqrt{FB^2 + BC^2} = \sqrt{DB^2 + BC^2}$

Тогда из теоремы синусов  $\triangle ADB$  и  $\triangle ACB$ :

$$\frac{DB}{\sin \alpha} = 2r = 10$$

$$DB = \sin \alpha \cdot 10$$

$$\frac{CB}{\sin \beta} = 2r = 10$$

$$CB = \sin \beta \cdot 10$$

$$FC = \sqrt{DB^2 + CB^2} = \sqrt{10^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)} = \sqrt{10^2} = 10$$

$\nwarrow$  т.к.  $\sin \alpha = \cos \beta$ ;  $\alpha + \beta = 90^\circ$

а) Ответ:  $FC = 10$

б) Так как  $\triangle ADC$  - равнобе. прямоугол.:

$$AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot DC$$

$$DB = FB = \sqrt{FC^2 - CB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, \triangle FBC$$

$$DC = DB + BC = 8 + 6 = 14 \Rightarrow AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 14 = 7\sqrt{2}$$

Пусть  $\angle FCB = \varphi$ , тогда из прямо.  $\triangle FCB$ :

$$\sin \varphi = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \quad \cos \varphi = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

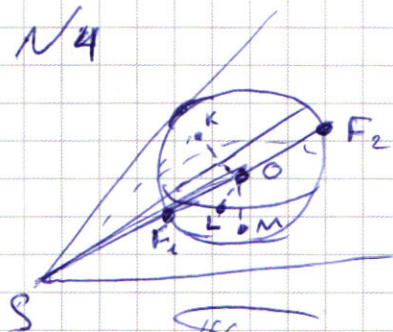
Тогда для  $\triangle AFC$ :

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot FC \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \varphi)$$

$$= 35\sqrt{2} (\sin 45^\circ \cdot \cos \varphi + \cos 45^\circ \cdot \sin \varphi) = 35 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right)$$

$$= 49 \quad \text{б) Ответ: } S_{AFC} = 49$$

№4



Пусть  $SO$  пересекает сферу в двух точках  $F_1$  и  $F_2$ , где  $F_1$  лежит внутри  $SO$ .

Тогда рассмотрим касательные к сфере. Заметим, что они перпендикулярны

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

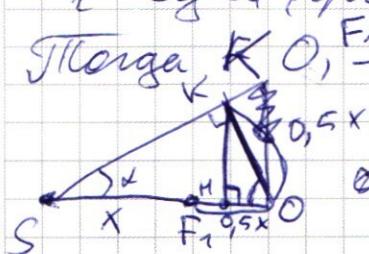
прямой соединяющей точку касания и  $O$ .

Плоскости касательные к сферам в точках  $F_1$  и  $F_2$ , касаются сферы в точках  $F_1$  и  $F_2$ , и площади сечений равны 1 и 4. Заметим, что плоскости параллельны. т.к. перпендикулярны  $SO$ .

Тогда если сделать гомоморфизм в точку, переводящую  $F_1$  в  $F_2$  <sup>(т.к.  $F_1, F_2$  и  $S$  — одна прямая)</sup> с коэффициентом  $K$ , тогда ~~как~~ <sup>плоскость,</sup> сечение ~~плоскости~~ <sup>потерей равно</sup> 1, перейдет в ~~плоскость~~ <sup>плоскость</sup>, сечение которой  $u$ , так как  $F_1$  представляет первую плоскость, а  $F_2$  — второй. Тогда отношение площадей равно  $k^2 = \frac{u}{1}$  ~~т.е.~~ следовательно  $k=2$ .

$\frac{SF_2}{SF_1} = k = 2 \Rightarrow SF_2 = 2SF_1$ . Тогда, т.к.  $F_1$  и  $F_2$  — противоположно направленные,  $F_1 F_2$  — расстояние  $= SF_2 - SF_1 = SF_1$ .

Тогда  $K_0$  — равно радиусу сферы т.е.  $\frac{1}{2} S F_1$ .



$$\alpha = \arcsin \frac{KO}{SO} = \arcsin \frac{0,5 SF_1}{1,5 SF_1} = \arcsin \frac{1}{3}$$

~~$\alpha_{\text{Oxidant}} = \text{RSC} = \arcsin \frac{1}{3}$~~

Проведем КН - перпендикуляр к SO.

$$H_O = \cancel{KO} \cdot \cancel{\sin} HRO = KO \cdot \sin = KO \cdot \cos \angle HOK =$$
$$= KO \cdot \frac{KO}{SO} = 0,5 SF_1 \cdot \frac{0,5 SF_1}{1,5 SF_1} = \frac{1}{6} SF_1$$

$$SH = SO - MO = 1,5 SF_1 - \frac{1}{6} SF_1 = 1 \frac{1}{3} SF_1$$

Заметим, что плоскость  $KM$  также будет

перпендикулярна прямой  $SO$ , так как является точкой касания сферы.  
(аналогично проведем высоты из  $L, M$  на  $SO$  и из  $S$  на  $LM$  и получим  $SH = \frac{1}{3} SF_1$  высота упадет в  $H$ )

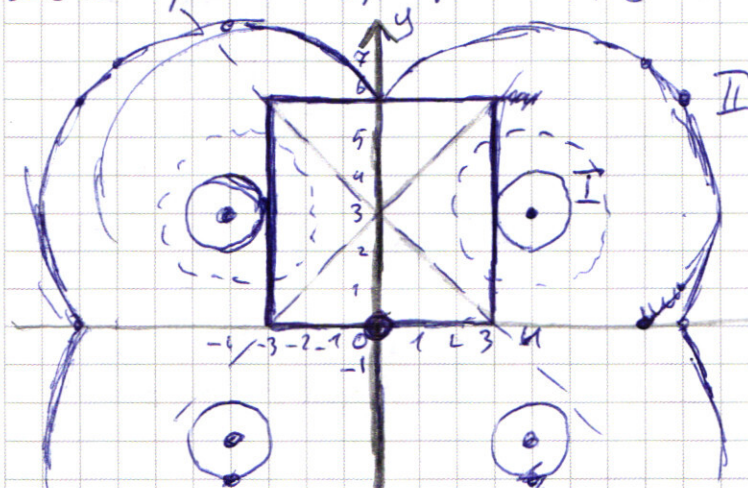
Тогда площадь сечения из соображений подобия переводящей  $F_1$  в  $H$  будет равна  $S' = S \cdot (k_1)^2 = 1 \cdot \left(\frac{SH}{SF_1}\right)^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Ответ:  $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$ ;  $S' = \frac{16}{9}$

### Задача №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

I Построим график  $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$



Так как рассматриваем

$$\begin{aligned} y-3-x &\leq 0 & y+x-3 &\leq 0 \\ y &= 3+x & y &= 3-x \end{aligned}$$

Тогда при  $x > 0$  ( $y-3-x \leq 0$  и  $y \leq 3-x$ )

$$y-3-x \geq 0 \text{ и } y+x-3 \geq 0$$

$$x=0$$

$$y-3-x \geq 0 \text{ и } y+x-3 \geq 0$$

$$x=6$$

$$3) y-3-x \leq 0 \text{ и } y+x-3 \geq 0$$

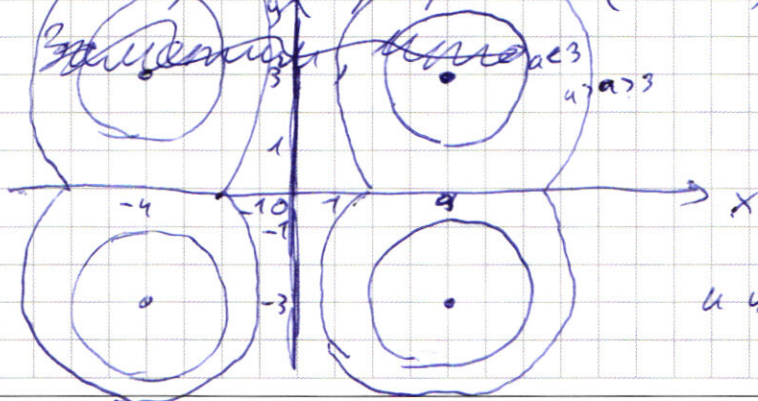
$$y=3$$

$$4) y-3-x \geq 0 \text{ и } y+x-3 \leq 0$$

$$y=3$$

(графиком  $|y-3-x| + |y-3+x|$  является только квадрат вершинами  $(-3; 0)$   $(3; 0)$   $(6; 3)$   $(6; -3)$ )

II Построим график  $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$



Тогда у нас это графики окружностей с радиусами  $\sqrt{a}$  и центрами в  $(3; 4)$   $(-3; 4)$   $(-3; -4)$   $(3; -4)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

которые бывают лишь в свой четверти относительно  $Ox$  и  $Oy$  (т.к. модуль раскрывается по-разному в зависимости от четверти, где находится координатная).

Когда из соображений симметрии, кроме относительно  $Oy$  есть два случая: когда по одному решению в каждой полуокружности. Когда из рисунка видно что  $\Gamma=1$  и  $a=1$  (рисунком 1)

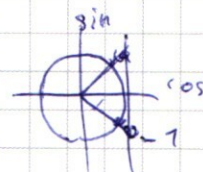
и когда два решения на  $Oy$  в точках  $O(0;0)$  и  $(0;5)$ . при радиусе  $\sqrt{3^2+a^2}=5$  и  $a=25$ .

Ответ:  $a=1$  и  $a=25$

### Задача №2

$$\begin{aligned} (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cdot \cos 4x \\ -2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x &= \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ -2 \cdot \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) \\ (\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - 2(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x)) &= 0 \quad (x \neq 2) \\ (\sin 7x + \cos 7x) (\sin 4x + \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0, & \text{т.к. } \cos 7x \neq 0 \\ \sin 4x + \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tan 7x = -1 \\ \sin(4x) = \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = \pi - (7x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

ответ:

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi k$$

Задание №3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

003

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2 \lg xy}$$

$$\lg x \cdot \lg \left(\frac{y^5}{x}\right) = 2 \lg xy \cdot \lg y$$

$$\lg x \cdot (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$-\lg^2 x + 5 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$(\lg x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \lg y)(\lg x - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\lg x}{\lg y} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\lg x}{\lg y} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ x = y^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2 \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$1) a) x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=2; y=2 (2;2)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$d) y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

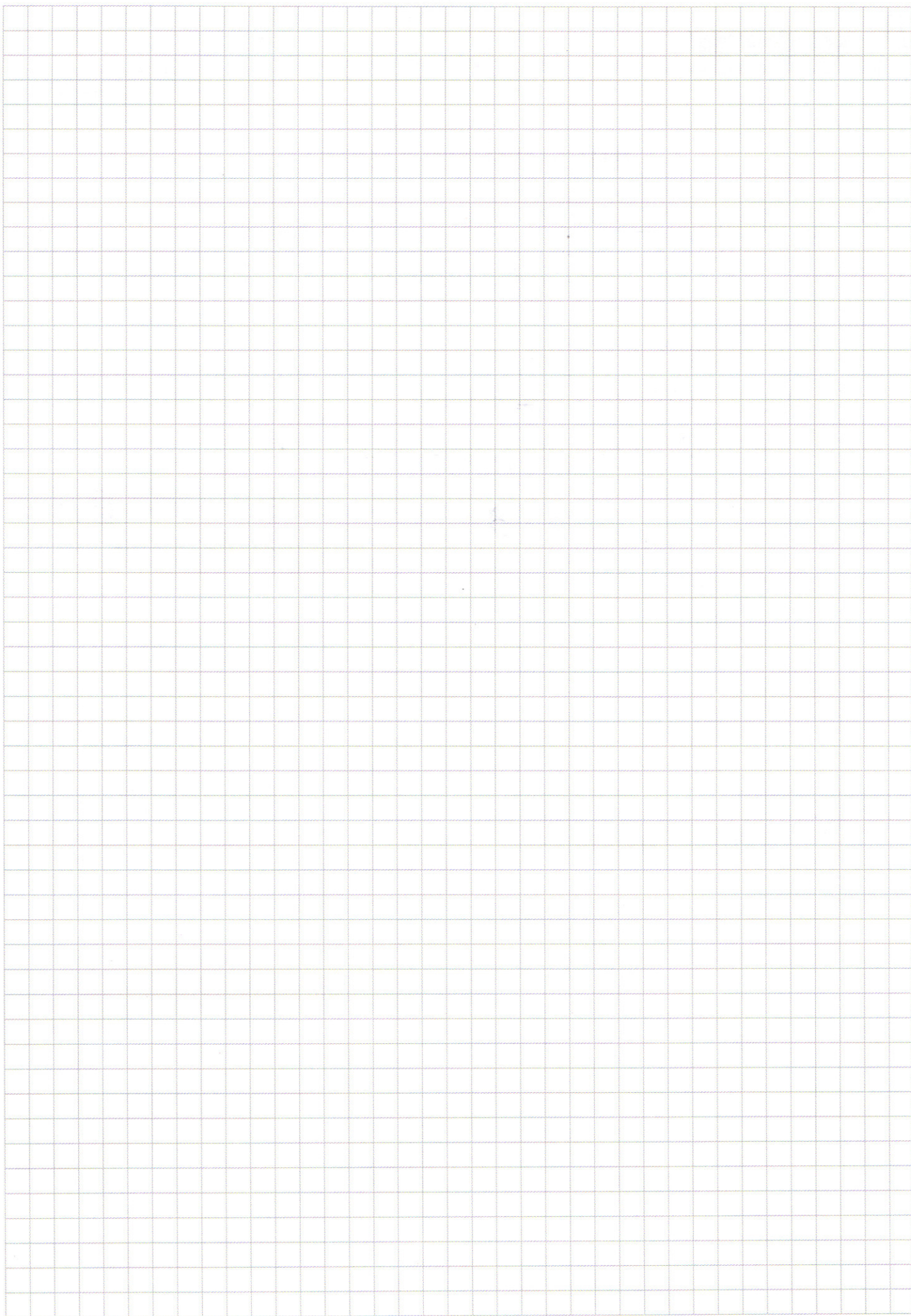
$$y \neq 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y(y-3)(y^2+y+4) = 0$$

$$(y-3)\left(y + \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(y - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

Ответ:  $\overset{y>0}{(2; 2)} (\overset{y>0}{9; 3}) \left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ .  
решения



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 3 \\ \hline 1125 \mid 3 \\ \hline 375 \mid 3 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^3 \quad \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$\begin{aligned} & 3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \quad \frac{8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} + \frac{8!}{6 \cdot 6} = \\ & 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \\ & = \frac{8!}{36 \cdot 2} = \frac{8!}{72} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\frac{11-3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$2 \cos 7x \cdot \sin 7x$$

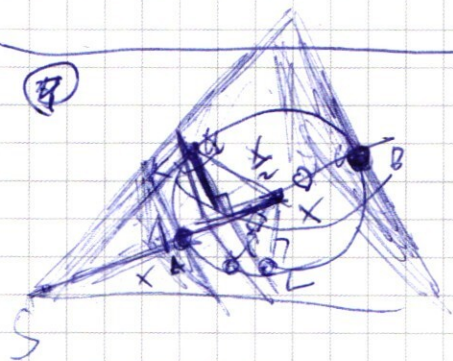
$$-2 \sin 4x \cdot \cos 7x \neq 2 \sin 4x \cdot \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$14x \cos x - \sin y = ?$$

$$\cos x - \sin y = -\frac{2}{1} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



$$\begin{cases} x^2 - 2xy - x + 3y^2 - 12y \end{cases} \quad \sin + \cos$$

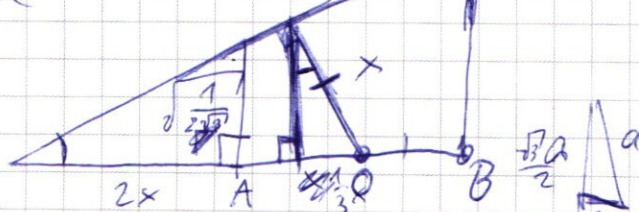
$$x + 2i \times \frac{7}{2} x^2 - 2 \times 4 + 4 \times 4^2$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right)$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left( 7x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos 14x$$

$$f(y-3-x) + |y-3+x| = 6$$

$$\{(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9\}$$



$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{05} \\ y \leq 70 + (2^{09} - 1)x \end{cases}$$

$$\alpha = \cos \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\frac{2}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$(\frac{4}{3})^2 \cdot 1 = \frac{16}{9}$

