

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

рассм. ур-ие (2)

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\underline{x^2 - 2xy - 4x - 9y^2 + 6y^2 + 12y = 0}$$

$$(x - 3y)(x + 3y) - 4(x - 3y) - 2y(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + 3y - 4 - 2y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

рассм. ур-ие (1)

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2\lg xy}$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{y^5}{x} = 2\lg xy \cdot \lg y$$

$$5\lg y \lg x - \lg x \cdot \lg x = 2\lg x \cdot \lg y + 2\lg y \cdot \lg y$$

$$5\lg y \lg x - \lg^2 x = 2\lg y \lg x + 2\lg^2 y$$

$$2\lg^2 y + \lg^2 x = 3\lg x \lg y$$

т.е. $x = 3y$

$$2\lg^2 y + \lg^2(3y) = 3\lg 3y \cdot \lg y$$

$$2\lg^2 y + (\lg 3 + \lg y)^2 = 3\lg y (\lg 3 + \lg y)$$

$$2\lg^2 y + \lg^2 3 + 2\lg 3 \lg y + \lg^2 y = 3\lg 3 \lg y + 3\lg^2 y$$

$$\lg^2 3 = \lg 3 \lg y$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

2-й сл. $x = 4 - y$

н.у. $0 < y < 4$

$$2\lg^2 y + \lg^2(4-y) = 3\lg y \lg(4-y)$$

$$(\lg^2 y + \lg(4-y))^2 - 4\lg y \lg(4-y) = 3\lg y \lg(4-y)$$

$$\lg^2 y(4-y) = 7\lg y \lg(4-y)$$

$$2\lg^2 y - 2\lg y \lg(4-y) = \lg y \lg(4-y) - \lg^2(4-y)$$

$$2\lg y(\lg y - \lg(4-y)) = \lg(4-y)(\lg y - \lg(4-y))$$

$$(\lg y - \lg(4-y))(2\lg y - \lg(4-y)) = 0$$

$$\lg y = \lg(4-y)$$

$$y = 4-y$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 4-y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2\lg y = \lg(4-y)$$

$$\lg y^2 = \lg(4-y)$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

не ур. 023

Ответ: $(9; 3)$

$(2; 2)$

$$\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{5} \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 2 \end{cases}$$

С-м имеет
ровно 2 решения

Рассм. ур-ие 1.

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$

$$1. \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x + y-3+x &= 6 \\ 2y &= 12 \\ y &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6-3-x \geq 0 \\ 6-3+x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$y=6 \text{ на } x \in [-3; 3].$$

$$3. \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y+3+x + y-3+x &= 6 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y-3-3 < 0 \\ y-3+3 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y < 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$x=3 \text{ на } y \in [0; 6)$$

Построим полученные на ~~на~~
координатной плоскости.

$$2. \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-3-x - y+3-x &= 6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y-3+3 \geq 0 \\ y-3-3 < 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq 0 \\ y < 6 \end{cases}$$

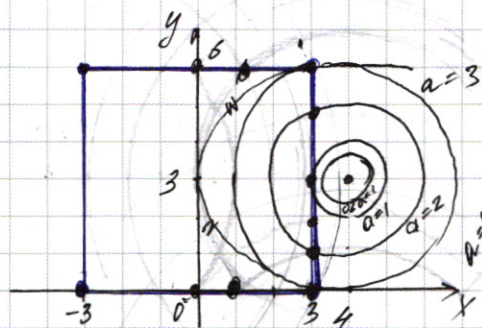
$$x=-3 \text{ на } y \in [0; 6)$$

$$4. \begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y+3+x - y+3-x &= 6 \\ -2y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0-3-x < 0 \\ 0-3+x < 0 \end{cases} \begin{cases} x > -3 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$y=0 \text{ на } x \in (-3; 3).$$



Уравнение (2) в системе задает окружность с центром в $(\cdot)$ $(4; 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$, такую, что она находится в I четв. коор. плоскости. Если же

эта окружность пересекает координатные оси, то дуга, оказавшаяся за пределами I четверти отражается относительно ~~этой~~ той оси координат, которую она пересекает.

Поэтому рассмотрим случаи:

- 1) $a < 0$: решение ^{сист.} нет, окр. не существует
- 2) $a = 0$: решение сист. нет, окружность вырождается в $(\cdot)$ с координатами $(4; 3)$
- 3) $0 < a < 1$: решение системы нет, окружность не пересекает график ур-не (1)
- 4) $a = 1$: система имеет 1 решение: $(3; 3)$
- 5) $1 < a \leq 9$: система имеет 2 решения; её радиус $\in (1; 3]$.
- 6) $9 < a \leq 16$: система имеет 3 решения; её радиус $\in (3; 4]$
- 7) $a > 16$: система имеет 4 решения.
(радиус > 4)

Ответ: система имеет 2 решения при $a \in (1; 9]$

① $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Различное число может состоять из следующих чисел: а) $1; 1; 5; 5; 5; 3; 3; 3$

б) $1; 1; 5; 5; 5; 3; 9; 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $n=8$
 $n_1=2$
 $n_2=3$
 $n_3=3$

$$P_{2,3,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 7 \cdot 80 = 560.$$

б) $n=8$
 $n_1=3$
 $n_2=3$
 $n_3=1$
 $n_4=1$

$$P_{1,1,3,3} = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 2}_{20} \cdot \underbrace{4 \cdot 7 \cdot 8}_{56} = 20 \cdot 56 = 1120$$

Между всего будет $560 + 1120 = 1680$
 восьмизначных чисел, произведение
 цифр которых дает 3375.

Ответ: 1680.

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} - 2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cdot \cos \frac{11x+3x}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x \quad | : 2$$

$$-\sin 7x \sin 4x - \sin 4x \cos 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 14x$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x \right) = 0.$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0.$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1 \quad \text{д.у. } \cos 7x \neq 0$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0.$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0.$$

$$\cos \left(4x + \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sin 4x = 0.$$

$$\cos 4x \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 4x \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x \left(\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right)$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - 1}{\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - 1$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} - 1 = \frac{1 + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x} - 1$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\operatorname{tg} 3x + 1 - 1 + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x}$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{2 \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x}$$

$$2 \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x = 1 - \operatorname{tg} 3x$$

Ответ: $\left[x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{4}; k \in \mathbb{Z} \right.$

$$\left. x = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

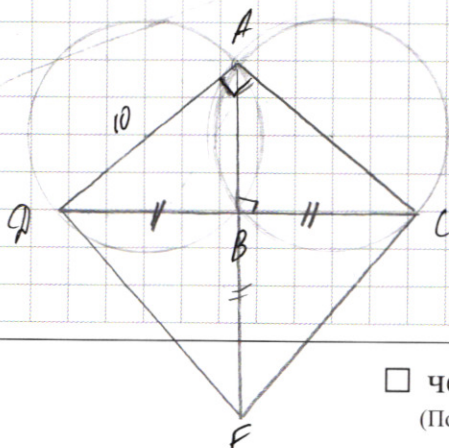
⑥

Дано: $R_1 = R_2 = 5$, $\angle DAC = 90^\circ$
Найти: CF
 $BD = BF$

Решение.

Рассмотрим 2 случая.

1) Точки A, B, F лежат на одной прямой.



Многа $CF \parallel AB \parallel BF$, $BD = CB = BF$

$\triangle ACD$ - т.ч. и AB ; AB - высота
 $DB = 5\sqrt{2}$

$CF = 5\sqrt{2}$

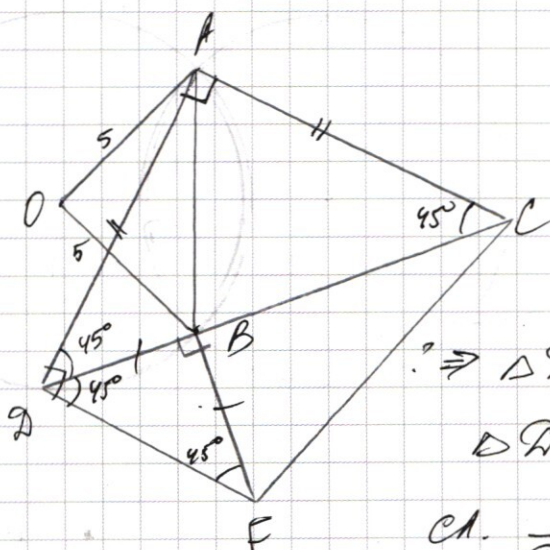
Однако по условию п. 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$BC = 6.$$

Значит, это не рассматривается.

2) 1) A, B, F не лежат на одной прямой.



Равные окр. при
пересечении отсекают
дуги с дугами
равные дуги.

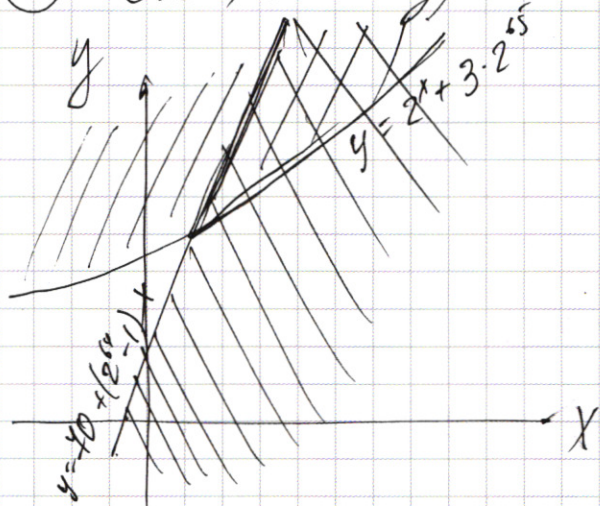
Отсюда $\angle ADB = \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$.

$\Rightarrow \triangle DAC$ — равнобедренный

$\triangle DAC \sim \triangle DBF$ (по двум углам),

$$\text{сл. } \frac{AD}{DB} = \frac{DC}{BF} \Rightarrow AD = BF$$

7) Построить уравнения на координатной плоскости



Область где пересекаются
линейные функции
системы

$$70 + (2^{64} - 1)x = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 - x - 2^x = 3 \cdot 2^{65} - 2^{64}x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$-2 \sin \frac{11x + 3x}{2} \sin \frac{11x - 3x}{2} - (2 \sin \frac{11x - 3x}{2} \cos \frac{11x + 3x}{2}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 4x = \sqrt{2} \cos 14x \quad | : 2$$

$$-\sin 7x \sin 4x - \sin 4x \cos 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 14x$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$-\sin 7x \sin 4x - \sin 4x \cos 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x \right) = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0 \quad \text{п.ч. } \cos 4x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha - \cos \beta$$

$$\cos(4x)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = 3x \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 4x \end{array} \right. = \sin 3x \cdot \cos 4x$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = 6x \\ \alpha - \beta = 8x \end{array} \right.$$

$$2\alpha = 14x \Rightarrow \alpha = 7x \quad \beta = -x$$

$$③ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$m3: \begin{cases} y \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg \left(\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} \right) = \lg y^{2 \lg xy}$$

$$\lg y^{5 \lg x} - \lg x^{\lg x} = \lg y^{2 \lg xy}$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg xy \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 x + \lg^2 y = 3 \lg x \lg y$$

$$(\lg y + \lg x)^2 = 5 \lg x \lg y$$

$$(\lg 3x + \lg x)^2 = 5 \lg 3x \lg x$$

$$\lg^2 x + \lg^2 3x = 3 \lg 3x \lg x$$

$$\lg^2 x + \lg^2 3$$

$$\lg^2 x + (\lg 3 + \lg x)^2 = 3(\lg x + \lg 3) \lg x$$

$$\lg^2 x + \lg^2 3 + 2 \lg 3 \lg x + \lg^2 x = 3 \lg^2 x + 3 \lg 3 \lg x$$

$$\lg^2 3 = \lg^2 x + \lg 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + \lg 3 \lg x - \lg^2 3 = 0$$

$$t^2 + \lg 3 t - \lg^2 3 = 0$$

$$D = \lg^2 3 - 4 \lg^2 3 = -3 \lg^2 3$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0 \\ (x-y)^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$x^2 - 4x - 3y^2 + 6y^2 - 2xy + 12y = 0$$

$$(x-3y)(x+3y) - 4(x-3y) - 2y(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+3y-4-2y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$1) x = 3y$$

реш. нет

$D < 0$, сл. решений нет.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $x + y - 4 = 0$
 $y = 4 - x$

Д.у. $x < 4$

$$\lg^2 x + \lg^2(4-x) = 3\lg x \lg(4-x)$$

$$(\lg(4-x) + \lg x)^2 = 5\lg(4-x)\lg x$$

$$\lg^2(-x^2 + 4x) = 5\lg(4-x)\lg x$$

$$\lg^2 x - \lg x (\lg(4-x)) = 2\lg x \lg(4-x) - \lg^2(4-x)$$

$$\lg x (\lg x - \lg(4-x)) = \lg(4-x) (2\lg x - \lg(4-x))$$

$$\lg x \cdot \frac{x}{4-x} = \lg(4-x) \lg \frac{x^2}{4-x}$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{x}{4-x} = \lg(4-x) \lg x + \lg(4-x) \lg \frac{x}{4-x}$$

$$\lg \frac{x}{4-x} (\lg x - \lg(4-x)) = \lg(4-x) \lg x$$

$$\lg \frac{x}{4-x} = \lg(4-x) \lg x$$

логб логб логб

Выведем:

$$\lg a = \lg b$$

$$10^a = 10^b$$

⇒ Значит также и равенство.

$$10^{\lg \frac{x}{4-x}} = 10^{\lg(4-x)} \cdot 10^{\lg x}$$

$$\frac{x}{4-x} = x(4-x)$$

$$x = x(4-x)^2 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad (4-x) - 1 = 0$$

или $\frac{(4-x-1)}{(4-x+1)} = 0$

$$3-x=0 \quad 5-x=0$$

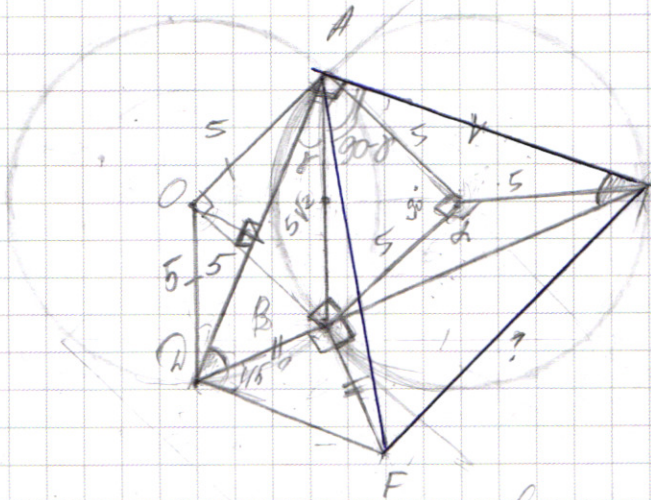
$$x=3 \quad x=5$$

или $\frac{x}{4-x} = 1$

$$AB = 5\sqrt{2}$$

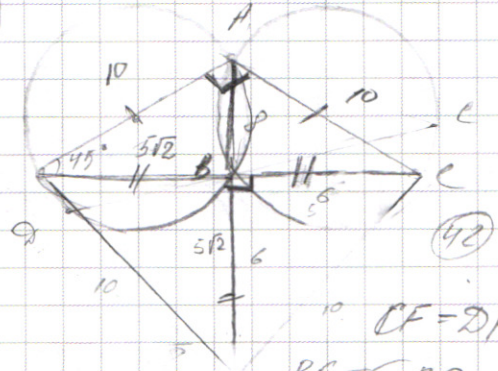
CF = ?

$$R_1 = R_2 = 5$$



$$\sqrt{144 \cdot 100} = \sqrt{44} = 20\sqrt{11}$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{11} \cdot 10 = 100\sqrt{11}$$



$$CF = DF$$

$$BC = 6 \text{ по}$$

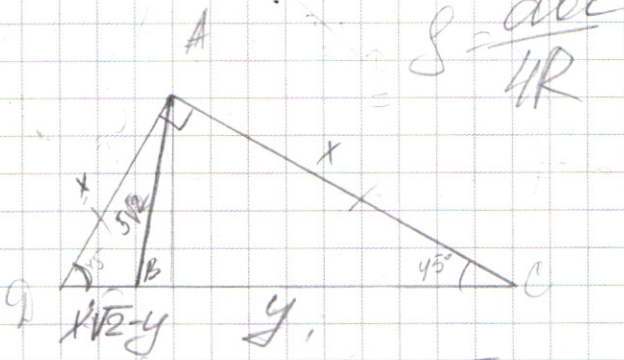
услов. 1.2,

сл. Тогда

составим

уравнение

небольшое



$$(x\sqrt{2}-y)^2 + x^2 - 2x(x\sqrt{2}-y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot BD$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot BC$$

$$3375 \mid 125$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 27 \\ \hline 875 \\ 270 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 20 \\ \hline 120 \\ 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ 92 \\ 46 \\ 23 \end{array}$$

$$3375 \mid 5$$

$$675 \mid 5$$

$$135 \mid 5$$

$$27 \mid 3$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$3375 = 5^3 \cdot 27$$

$$9 \cdot 3 = 3^3$$

$$3 \cdot 9 = 3^3$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1555 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1 \cdot 1555 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$P_{2,3,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} =$$

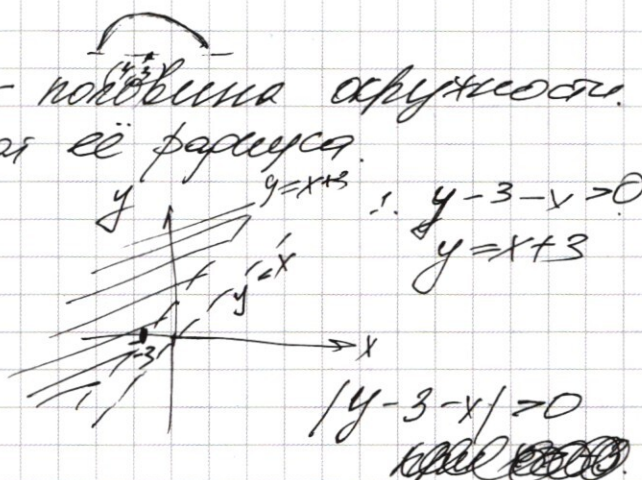
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 80 \cdot 7 = 560$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$ - половина окружности.
квадрат её радиуса.

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$



1) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$$y-3-x-x+y-3+x=6$$

$$2y=12$$

$$y=6$$

$$\begin{cases} 6-3-x \geq 0 \\ 6-3+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -3 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$

$$y-3-x-y+3+x=6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

$$\begin{cases} y-6 \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 6 \\ y < 0 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$$-y+3+x+y-3+x=6$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

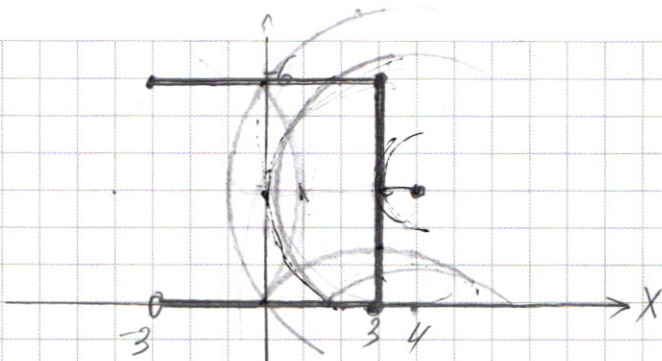
$$\begin{cases} y-6 < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y < 6$$

4) $-y+3+x-y+3+x=6$

$$-2y=0$$

$$y=0$$

$$\begin{cases} 0-3-x < 0 \\ 0-3+x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x \\ x < 3 \end{cases}$$



$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

$a = R^2$
 При $a < 0$ реш. нет
 при $a = 0$ окр $\rightarrow$ точка $(3|4)$
 если $a > 0$ реш. есть

Ручка $a = 25$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25$$

- 1) Если $0 < R < 3 \Rightarrow 0 < a < \sqrt{3}$
 фигура - окр. с ц в $(4; 3)$
 у сист. 2 решения.

- 2) при $3 < R < 4 \Rightarrow \sqrt{3} < a < 2$
 система имеет 3 реш.

- 3) $R > 4$ 3 реш.

$R = 4$

7.
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

