

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

I

- 1) Разложение 3375 на множители 2) из цифр есть три пятёрки

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 5 \\ 225 & 5 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

(т.к. 5^3)

- 3) из цифр есть либо три тройки, либо ~~две~~ ^{одна} тройка и одна девятка
(т.к. 3^3)

- 4) остальное – единицы, т.к. других множителей нет

Варианты набора цифр: 555 333 11 ; 555 39 111

- II случай 1: 555 333 11 есть 8 мест (1, 2, 3... 7, 8), нужно выбрать 3 места для пятёрок, два для единиц и оставшиеся будут для троек

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 56 \cdot 10 = 560 \text{ способов}$$

кол-во способов выбрать три места для пятёрок (порядок мест не имеет значения) (из восьми мест)
кол-во способов выбрать два места для единиц из оставшихся пяти

случай 2: 555 39 111

аналогично

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20$$

общее кол-во
способов

$$N = N_1 + N_2 = 560 + 56 \cdot 20 = 560 \cdot 3 = 1680$$

Ответ: 1680 способов

Задача 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

по формулам
разности косинусов
и синусов

$$\begin{cases} \cos 11x - \cos 3x = -2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} \\ \sin 11x - \sin 3x = +2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cos \frac{11x+3x}{2} \end{cases}$$

у-е равносильно: $-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{косинус} \\ \text{двойного} \\ \text{угла} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{\sim}{\Rightarrow} (\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x - \sin 7x) \right) = 0$$

$$\stackrel{\uparrow}{\Rightarrow} \text{методом добавочного угла} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x \\ \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -1 \\ \cos 7x \neq 0 \quad (\text{при } \cos 7x = 0 \quad 1 \neq -0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \quad n, m, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

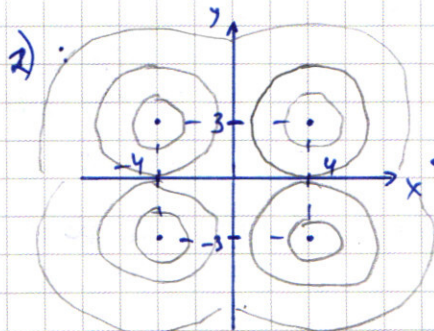
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}m \end{cases} \quad n, m, k \in \mathbb{Z}$$

Задача 15

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

второе ур-е это окружность, у которой взят участок I координатного угла и отражен симм-о отн-о осей на другие координат. углы

$O(4;3)$ - центр $\odot$; $a=R$ - радиус



← варианты

В первом ур-е раскроем модули

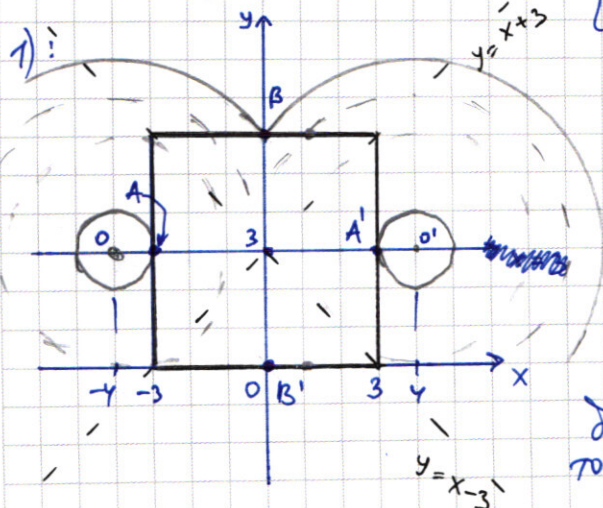
$$\begin{cases} y > x+3 \\ y > 3-x \end{cases} \Rightarrow y > 6 \quad \begin{cases} y > x+3 \\ y < x-3 \end{cases} \Rightarrow x = -3$$

$$\begin{cases} y > x-3 \\ y < x+3 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \quad \begin{cases} y < x-3 \\ y < x+3 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

(квадрат)

Т.к. координаты центра окруж-ты и центра квадрата равны $y=3$,

то отдельная часть окруж-ты будет пересекать квадрат один раз только при $y=3$, т.к. квадрат и



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Верхность симм-ы от-о $y=3$. На рисунке эти случаи нарисованы сплошной линией. Как обе окружности I и II координатных углов будут в центре давая для решения (III) и IV коорд. углы я не рассматриваю т.к. там график не проходит)

Тогда $a = R = O'A' \text{ (первый)} \neq O'B' \text{ (второй)}$
случаи

$$a_1 = O'A' = x_0 - x_{A'} = 4 - 3 = 1$$

$$a_2 = O'B' = \sqrt{(x_0 - x_{B'})^2 + (y_0 - y_{B'})^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: ~~5~~ $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Задача 16

Дано:

$$\omega_1(O_1; R_1), \omega_2(O_2; R_2)$$

$$R_1 = R_2 = 5'; \omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$

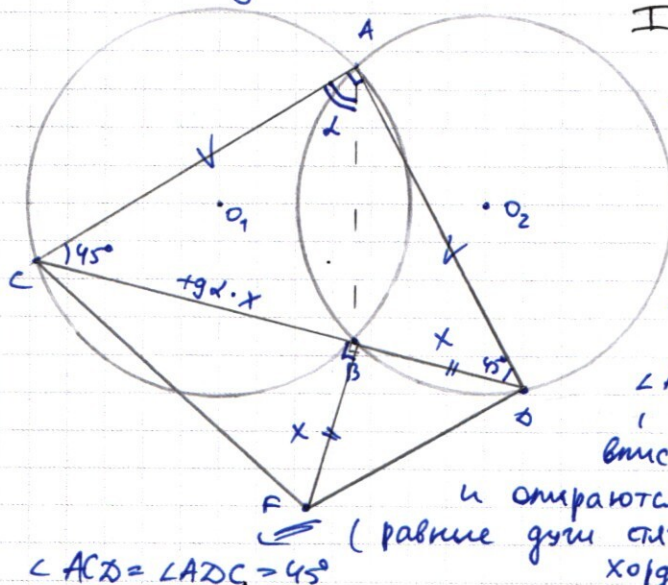
$$C \in \omega_1; D \in \omega_2; B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ; BF \perp CD;$$

$$BF = BD$$

Найти: а) CF

$$б) S_{\triangle ACF} (BC=6)$$



$$\angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$$

$\triangle ABC$ - равнобедр. $AC = AB$

Решение:

1) из суммы углов $\triangle ABC$

$$\angle C + \angle D = 90^\circ$$

$$1. \angle ACB + \angle ADC = 90^\circ$$

$\angle ACB$ и $\angle ADC$

вписанные в ω_1 и ω_2 и опираются на равные дуги (равные дуги стягивают равные хорды - хорда AB)

2) Пусть $\angle CAB = \alpha$, а $BD = x$

из т. синусов для $\triangle CAB$ и $\triangle BAD$:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

из $\triangle BCF$: $BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$
 $BF = BD = x$
 $\angle CBF = 90^\circ$ (по условию) $\left| \begin{array}{l} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle CFB = \frac{BC}{BF} = \operatorname{tg} \alpha; \angle CFB = \alpha \\ \text{тогда } CF = \frac{BF}{\cos \angle CFB} = \frac{x}{\cos \alpha} \end{array} \right.$

из теоремы синусов для $\triangle BAD$: $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{x}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R = CF \Rightarrow CF = 10$

II 1) $S_{\triangle CAF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{10}{2} \cdot AC \cdot \sin \angle (ACB + \angle BCF)$

из суммы углов $\triangle BCF$: $\angle BCF = \angle CBF - \angle CFB = 90^\circ - \alpha$

$S_{\triangle CAF} = \frac{10}{2} \cdot AC \cdot \sin(45^\circ + 90^\circ - \alpha)$

2) т.к. $BC = 6 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot x = 6$
из $CF = \frac{x}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{x}{\cos \alpha} = 10$ $\left| \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} = \frac{10}{6}; \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{5}{3}; \sin \alpha = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}, \\ x = 10 \cos \alpha = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8 \end{array} \right.$

3) из $\triangle ACB$: $\angle A = 90^\circ$
 $\angle C = \angle B = 45^\circ$ $\left| \Rightarrow AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} \right.$

4) из $\triangle ACD$: $\angle A = 90^\circ$
 $\angle C = \angle D = 45^\circ$ $\left| \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{BC + BD}{\sqrt{2}} \right.$

$AC = \frac{6 + x}{\sqrt{2}} = \frac{6 + 8}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 14}{2} = 7\sqrt{2}$

4) $S_{\triangle CAF} = 5 \cdot 7\sqrt{2} \cdot (\sin 135^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 135^\circ) = 35\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = 35 \cdot \frac{7}{5} = 49$

Ответ: а) $CF = 10$ б) $S_{\triangle CAF} = 49$

Задача 13

$\left(\frac{y}{x} \right)^{\operatorname{eg} x} = y^{2 \operatorname{eg} x y}$ (1)

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow (x^2 - 9y^2) - (2xy - 6y^2) - (4x - 12y) = 0$

$(x - 3y)(x + 3y) - 2y(x - 3y) - 4(x - 3y) = 0$

$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$

из второго уравнения: $\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y, \end{cases}$ подставим в первое

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 случай: $x = 3y \rightarrow \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y \neq 0 \\ 3y > 0 \\ 3y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y > 0$

2) $\left(\frac{y^4}{3}\right)^{(\lg y + \lg 3)} = y^{(2 \lg 3 + 4 \lg y)}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{(\lg y + \lg 3)} = (y^4)^{(\lg y + \lg 3)} \cdot y^{-2 \lg 3}$

$y^4 (\lg y + \lg 3) \left(1 - 3^{\lg y + \lg 3} \cdot y^{-2 \lg 3}\right) = 0$

$\hat{1} = 3^{\lg y + \lg 3} \cdot y^{-2 \lg 3}$

$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg y + \lg 3}$, логарифмируем по 3:

$\log_3 y^{2 \lg 3} = \lg y + \lg 3 \Leftrightarrow 2 \lg 3 \cdot \log_3 y = \lg y + \lg 3$

$\Leftrightarrow 2 \lg 3 \cdot \frac{\lg y}{\lg 3} = \lg y + \lg 3$

$2 \lg y = \lg y + \lg 3$

$\lg y = \lg 3; y = 3 \Rightarrow x = 3y = 9$
($y > 0$ ОДЗ)

(9; 3)

2 случай:

$x = 4 - y \Rightarrow \left(\frac{y^5}{4 - y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg y(4 - y)}$

1) ОДЗ: $\begin{cases} y(4 - y) > 0 \\ 4 - y \neq 0 \\ 3y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \\ y \neq 4 \\ y > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y \in (4; +\infty)$

2) $y^{5 \lg 3y} = (4 - y)^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg y(4 - y)}$

Ответ: (9; 3)

Задача 17

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ (1) для первой функции:

$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$ (2) $y_1' = \ln 2 \cdot 2^x$ ($y_1(0) = 3 \cdot 2^{65}$)

$y_2' = 2^{64} - 1$ ($y_2(0) = 70$)

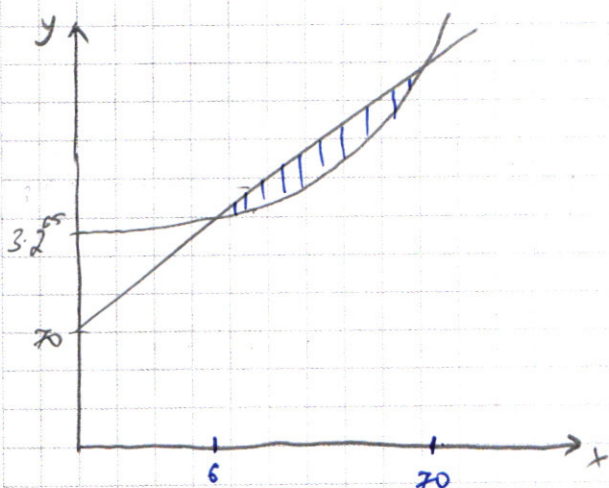
изначально функции (1), больше но при малых x производная y_2 больше, поэтому на каком-то промежутке $y_2 > y_1$, но при $x \rightarrow \infty$ $y_1 > y_2$.

Найдем $f(x) = y_2 - y_1 = 70 + (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65} - 2^x$

$$f(x) = 2^{64}(x-6) + 70 - x - 2^x$$

при малых x $f(x) \approx 2^{64}(x-6) = 0 \Rightarrow x=6$ ($2^{64} \cdot 0 + 70 - 6 - 64 = 0$)

при x больше $\neq 0$: $f(x) \approx 2^{64}(2^{x-64} + x - 6) = 0 \Rightarrow 2^{x-64} = x - 6$.



$x=70$
(поговор) $(2^{64} \cdot 64 + 70 - 70 - 2^{70} = 0)$

Заметим, что число пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) тождественно под графиком (5)

$$S = \int_6^{70} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) dx$$

$$= \int_6^{70} ((70 - 3 \cdot 2^{65})x + \frac{2^{64} - 1}{2} x^2 - \frac{2^x}{\ln 2}) dx$$

$$= (70 - 6 \cdot 2^{64})64 + \frac{2^{64} - 1}{2} (64) \cdot (76) - \frac{1}{\ln 2} (2^{70} - 2^6) =$$

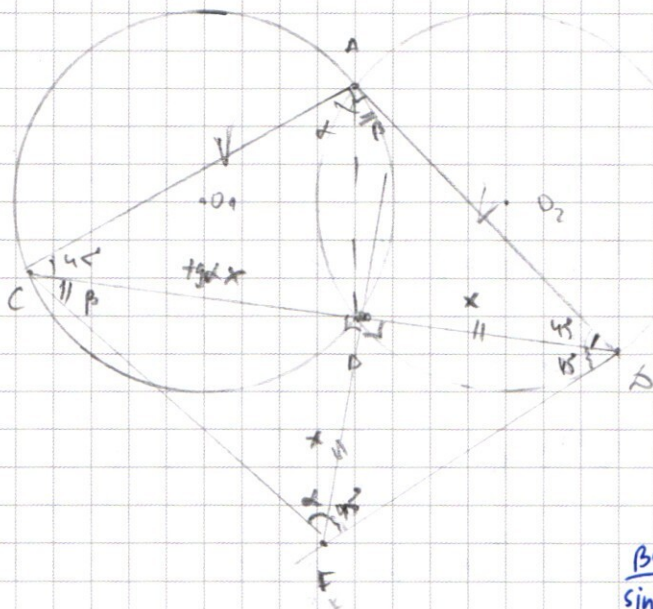
$$= 35 \cdot 2^7 - 3 \cdot 2^{71} + 19 \cdot 2^{71} - 19 \cdot 2^7 - \frac{1}{\ln 2} (2^{70}) + \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^6 =$$

$$= 2^{70} \left(38 - 6 - \frac{1}{\ln 2} \right) + 2^6 \left(70 - 38 - \frac{1}{\ln 2} \right) =$$

$$= 2^{70} \cdot 30 + 2^6 \cdot 30$$

Ответ: $15 \cdot 2^{71} + 15 \cdot 2^7$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

26 $\Delta A_2 B$

$$\alpha = 90^\circ - \angle 2) \quad \angle = 45^\circ$$

a)

$$AC \stackrel{\sim}{=} A \cap B$$

AC. BC.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$AC \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \sin 45^\circ \cdot AC \cdot BC \quad (4R)$$

$$AC \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \sin 45^\circ \cdot AD \cdot XB \cdot YK.$$

$$A_B = \sin 45^\circ \cdot 2R$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{2AB}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{DC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \angle 1)} = \frac{2AB}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{x}{\cos \beta} = \frac{2AB}{\sqrt{2}}$$

$$CF^2 = x^2 + y^2 \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{EF}{CX} = 2$$

$$CF = \frac{4R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = 2R$$

$$S_{ACF} \rightarrow \frac{1}{2} (\sin(45^\circ + \beta)) \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot AC \cdot w$$

$$\text{tg} \alpha x = 6.$$

$\text{tg} x$

$$\frac{10}{4} (\cos x + \sin x) (\tan x + x) - \frac{10x}{4} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x + \sin x} \right) =$$

$$A_{22} + 9x + x = \sqrt{2} A_1.$$

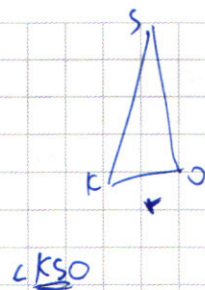
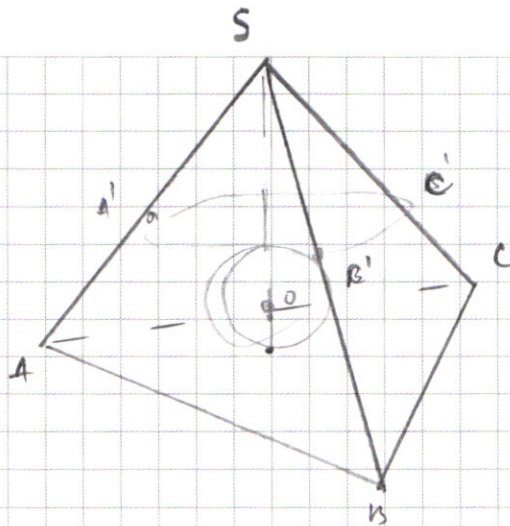
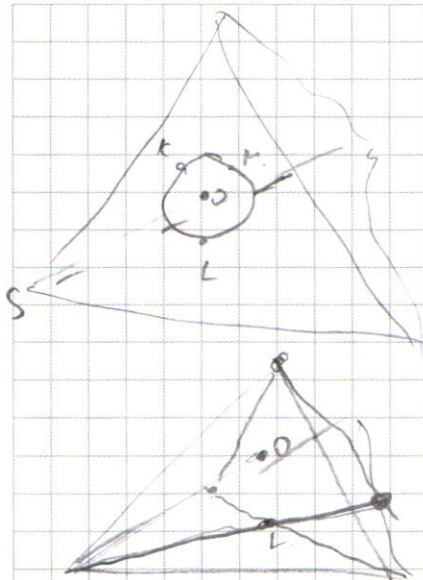
$$\begin{cases} \frac{x}{\cos k} = 2k. \\ +gk = 6. \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{6}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin \angle = \frac{6}{20} = 3/10.$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{100-91}{100}} = \sqrt{\frac{91}{100}}$$

$$X = 10 \cdot \frac{\sqrt{91}}{20} = \sqrt{91}$$



$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y_1' = 2^x \ln 2$$

$$y_2' = (2^{64} - 1)$$

$$2^{64}(\ln 2 - 1) > -1. \quad (u)$$

$$\text{при } x=64 \quad y_1' > y_2'$$

$$2^{65} \cdot 4 < 70 + (2^{64} - 1)65.$$

$$2^{67} - 2^{64} \cdot 65 < 70 - 65.$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x.$$

$$2^{64}(2^{x-64} + 6 - x) = 70 - x$$

$$70 + 2^{64}(-6) > 1. \quad (1)$$

$$70 + (2^{64} - 1)64 - 2^{64} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 6 + 2^{70} - 2^{67} - 3 \cdot 2^{65} = 6 + 2^{67}(64 - 1 - 6) = 6 +$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x.$$

$$2^x \ln 2 > 2^{64} - 1.$$

$$2^x \ln 2 - 2^{64} > x. \quad 2^{64} - 2^0$$

2

$$2^x \ln 2 - 2^{64} > -1.$$

$$2^{63}(\ln 2 - 2) > -1. \quad (1)$$

$$2^{64} + (1 + 6) < 70 + (2^{64} - 1)64. \quad 2^6$$

$$2^{64} \cdot 7 - 2^{70} + 2^6 < 70.$$

$$2^{64}(7 - 2^6) < 6$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0.$$

$$70 - x + 2^{64}(x - 6) > 2^x$$

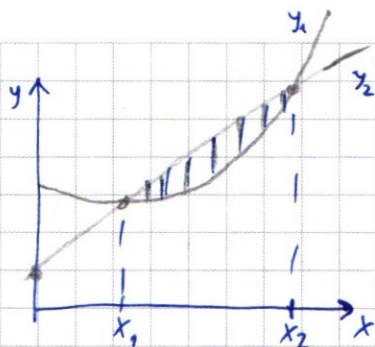
$$y_1' = 2^{64} - 1$$

$$y_2' = 2^x \ln 2$$

$$2^x \ln 2 > -2^{64}$$

$$\text{при } x=64.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y_1 \mid y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$(x=0 \Rightarrow 1 + 3 \cdot 2^{65})$$

$$y_2 \mid y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$(x=0 \Rightarrow 70)$$

$$dS = \int_{x_1}^{x_2} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) dx$$

$$= (70 - 3 \cdot 2^{65})(x_2 - x_1) - \frac{2^{x_2}}{\ln 2} + \frac{2^{x_1}}{\ln 2} + \frac{2^{64} - 1}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

$$(x_2 - x_1) \left((x_2 + x_1) \cdot (2^{63} - \frac{1}{2}) + 70 - 3 \cdot 2^{65} \right) - \frac{1}{\ln 2} (2^{x_2} - 2^{x_1})$$

$$dS = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} S = \Delta x \left(2x \cdot (2^{63} - \frac{1}{2}) + 70 - 3 \cdot 2^{65} \right) - \frac{2^x}{\ln 2} (2^{\Delta x} - 1)$$

$$\frac{70}{35} \mid 2$$

$$2x(2^{63} - \frac{1}{2}) \approx 3 \cdot 2^{65} - 70$$

$$x = \frac{3 \cdot 2^{65} - 70}{2^{63} - \frac{1}{2}} \approx \frac{3 \cdot 2^{65}}{2^{63}} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$x < 12$$

$$= \frac{12(2^{63} - 1) - 58}{2^{63} - 1} \approx 12$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) dx = (70 - 3 \cdot 2^{65})(x_2 - x_1) + \frac{2^{64} - 1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{\ln 2} = \Delta x (35 - 3 \cdot 2^{64})$$

$$= \Delta x (70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{63} - \frac{1}{2})(x_2 + x_1) - \frac{1}{\ln 2} (2^{x_2} - 2^{x_1})$$



$$2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + (2^{64} - 1)$$

$$2(1 + 3 \cdot 2^{64})$$

$$2^{64} + 69.$$

$$4 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot 2.$$

$$2^{65}$$

$$2^{65} + 68 - 4 - 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{65}$$

$$70 + 2^{66} - 4 - 16 - 3 \cdot 2^{65}.$$

$$= 2^{65}(2-3) + \dots$$

$$70 + (2^{64} - 1) X = 2^X + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 - X = 2^X = 3 \cdot 2^{65} - 2^{64} X$$

мало

$$X \approx 2 \cdot \ln 3. \quad 1 \approx$$

$$2^{64}(X-6) + 70 - X - 2^X \geq 0.$$

$$\text{при } X=6.$$

$$70 - 6 - 2^6 = 70 - 6 - 64 = 0.$$

$$64 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64} \cdot 6 - 6$$

$$2^{64} \cdot 6 + 70 - 12 - 2^{12}$$

$$70 = 70 + 2^{64} \cdot 6 - 2^{64} \cdot 6.$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (2^{64}(X-6) + 70 - X - 2^X) dX =$$

$$(70 - 6 \cdot 2^{64}) + (2^{64} - 1)X - 2^X dX = (70 - 6 \cdot 2^{64}) \Delta X + \frac{2^{64} - 1}{2} \Delta X (X_1 + X_2)$$

$$- \frac{1}{\ln 2} (2^{X_2} - 2^{X_1}) =$$

$$70 - 6 = 64.$$

$$2^{64}(X-6-2^{X-64}) + 70 - X \geq 0 \quad \text{сб}$$

$$X = 6 + 2^{X-64}$$

$$X - 6 = 2^{X-64}$$

$$70 - 6 = 64 = 2^6 = 64.$$

$$S = (70 - 6 \cdot 2^{64}) 64 + \frac{2^{64} - 1}{2} \cdot 64(26) - \frac{1}{\ln 2} (2^{70} - 2^6)$$

$$= 35 \cdot 2^7 - 3 \cdot 2^{71} + 19 \cdot 2^{71} - 19 \cdot 2^7 -$$

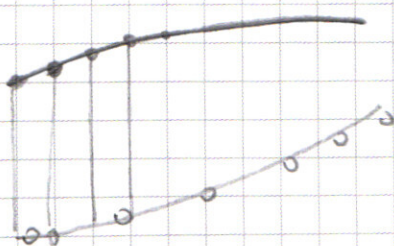
$$- \frac{1}{\ln 2} (2^{70}) + \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^6 =$$

$$= 2^{70} (38 - 6 - \frac{1}{\ln 2}) + 2^6 (70 - 38 - \frac{1}{\ln 2})$$

$$= 2^{70} \cdot (30) + 2^6 (30) =$$

$$= 30 \cdot 2^{71} + 15 \cdot 2^7$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 28 \\ \hline 1400 \\ + 224 \\ \hline 56 \\ \hline 784 \end{array}$$



$$\frac{1}{\ln 2} > \log_2 2.8 = 1, \dots$$

$$(2)^{3/2} = \sqrt{8} \quad (2.8)^2 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \cos 11x - \cos 3x = -2 \sin$$

$$\begin{aligned} 11x &= \alpha + \beta \\ 3x &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{11x + 3x}{2} &= \alpha \\ \rho &= \end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = -2 \cos^2 \beta = -2 \cos$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \rightarrow -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - (2 \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\sin 7x \cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x + 2 \sin 4x) = 0$$

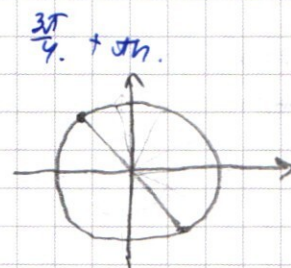
$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + 2 \sin 4x$$

$$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 2 \sin 4x$$

$$\begin{aligned} 7x - \frac{\pi}{4} &= 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} &= \pi - 4x + 2\pi n \\ 7x &= \pi n - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \\ x &= \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \\ x &= \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{aligned}$$



$$k \pi n = \frac{3}{2} k + \frac{1}{28}$$

$$\begin{aligned} 7x + 5\pi n &= 9 + 3 \cdot 28k \\ 11 + 88n &= 15 + 24k \\ 35 + 56m &= 33 + 28 \cdot 11k \end{aligned}$$

25

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x} \right)^{2 \lg x} &= y^{2 \lg x y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned}$$

$$2) (x-y)^2$$

$$x(x-y) - 3y(y-y) = 2xy$$

$$1) y^{5 \lg x} = x^{\lg x} + y^{2 \lg x} \cdot y^{\lg y}$$

$$y^{-2 \lg 10} = (10)^{-2}$$

$$1) y^{5 \lg x} - \frac{y^{2 \lg x}}{100} = x^{\lg x} = \frac{1}{10}$$

$$100 y^{5 \lg x} - y^{2 \lg x} - 10 = 0$$

$$y^{2 \lg x} (100 y^{3 \lg x} - 1) = 10$$

$$2 \lg x + \log_2 (100 y^{3 \lg x} - 1) = \log_2 10 = \frac{1}{\lg 2}$$

21

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 5 \\ 225 & 5 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 3375 = 27 \cdot 125$$
$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 27 \\ \hline + 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

1 пер. вывед.

5 5 5 :

11 3 3 3

11 1 9 3

(3м) (2м) (2м)

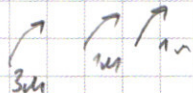
1) 5 5 5 11 3 3 3.

5 5 5 - 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2.

5 5 1 1 3 3 3 5 5 5.

123
132
231
213
312
321

2) 111 555 9 3.



8 · 7 · 6
2 · 3

8 · 7 · 6
6

5 · 4
2

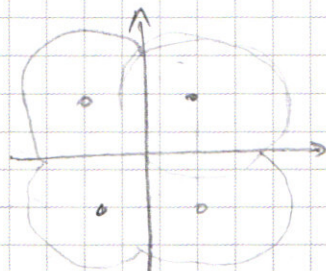
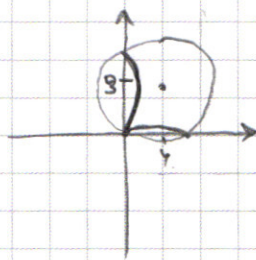
560

8 + 7 + 6 = 21
6 · 5 · 4 = 120
21 · 120 = 2520

1680

25

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$



2).

$$\begin{cases} (4-x)^2 + (3+x)^2 = 9 \\ (4-x) + (3+x) = 6 \end{cases}$$

1) $y > x + 3$ $2y - 6 > 6$
 $y > 6$

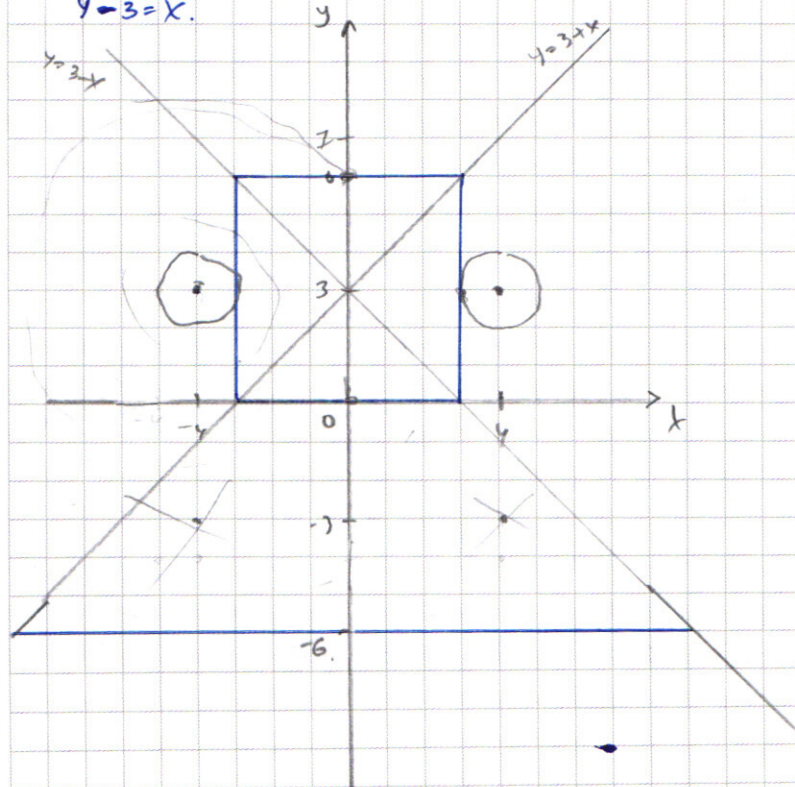
$y - 3 = x$
 $y - 3 = -x$
 $y = 3 - x$

$y > x + 3$
 $y > 3 - x$
 $y > 6$

$y > x + 3$
 $y < x - 3$
 $y - 3 - x - y + 3 - x = 6$
 $x = -3$

$y > x - 3$
 $x < x + 3$
 $-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$
 $x = 3$

$y < x - 3$
 $y < x + 3$
 $-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$
 $y = 0$



$a = 1$

$a = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \quad \text{или}$$

$$x(x-4) + 3y(y-4) - 2xy = 0.$$

$$\lg x = a. \Rightarrow x = 10^a$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (2^{64})$$

$$S = (70 - 6 \cdot 2^{64}) \Delta x + \frac{2^{64}-1}{2} \Delta x (x(x+1)) - \frac{1}{\ln 2} (2^{x+1} - 2^x) =$$

$$= (70 - 6 \cdot 2^{64}) + \frac{2^{64}-1}{2} \cdot 1 (x(x+1)) - \frac{2^x}{\ln 2} (2-1)$$

заполн

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$4(3y-x)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$x^2 \frac{1}{2} (12y - 4x) + (x^2 - 9y^2) + (6y^2 - 2xy) = 0.$$

$$4(3y-x) + - (3y-x)(3y+x) + 2y(3y-x) = 0$$

$$(3y-x)(4 - 3y - x + 2y) = 0$$

$$(3y-x)(4-x-y) = 0.$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

$$1) \left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2 = y^{2 \lg 3y^2 + 2 \lg y}$$

$$y^{4 \lg 3y} = 3y^{2 \lg 3y^2}$$

$$y = 3y$$

$$y^{2 \lg 3y} (y^{2 \lg 3y} - 3y^{2 \lg y}) = 0.$$

$$y^{2 \lg y + 2 \lg 3} - 3y^{2 \lg y} = 0.$$

$$y^{2 \lg 3} = 3$$

$$\lg y = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{10}.$$

$$2 \lg 3 = \lg_3 3$$

$$2 \lg 3 = \frac{\lg 3}{\lg y}.$$

2).

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg y + \lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}.$$

$$\lg 3 = t$$

$$3 = 10^t$$

$$y^{2t} = (10^t)^{\lg y + t}$$

$$2 \lg 3 = \lg_3 3^{\lg y + \lg 3} \cdot \lg_3 3$$

$$\lg 3y = 2 \lg 3 \cdot \lg_3 y$$

$$\lg y \cdot \lg 3 + \lg y = 2 \lg 3 \cdot \frac{\lg y}{\lg 3}$$

$$2 \lg (4y - y^2)$$