

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 3 \ 3 \ 7 \ 5 \ 5 \\
 \hline
 \quad \quad 6 \ 7 \ 5 \ 5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 13 \ 5 \ 5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 2 \ 7 \ 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 9 \ 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \ 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Тогда есть 2 возможных набора цифр:

$$1) \quad 3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1$$

$$2) \quad 9 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1$$

Для каждого из них возможна одна перестановка.

$$2 \cdot 8! = 40320$$

Ответ: ~~40320~~ 80640

$$\begin{cases}
 3. \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} & \text{от } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\
 x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0
 \end{cases}$$

$$\parallel y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x} \quad | \lg$$

$$(3 \lg x - 2 \lg y) \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3 \lg y \lg x + 2 \lg^2 y = 0$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg x_{1,2} = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2} = \begin{cases} \lg y \\ 2 \lg y \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} y \\ y^2 \end{cases} \parallel$$

$$x = y :$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x - 2) = 0$$

$$x = 2 = y$$

$$x = y^2 :$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$~~y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0~~ \quad y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

Ответ: $x = 2, y = 2$

$y =$ решение уравнения $y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$; $x = y^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$y-3-x \geq 0$$

$$y-3+x \geq 0$$

$$y \geq x+3$$

$$y \geq -x+3$$

Рассмотрим 4 случая раскрытия

модулей:

$$I \quad 2y = 6$$

$$y = 3$$

$$II \quad 2x = 6$$

$$x = 3$$

$$III \quad -2y = 0$$

$$y = 0$$

$$IV: -2x = 6$$

$$x = -3$$

~~Рассмотрим~~

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = \rho^2 ((|x|; |y|); (4; 3))$$

Все решения 1 уравнения: $y \geq 0$, симметричны относительно ОУ.

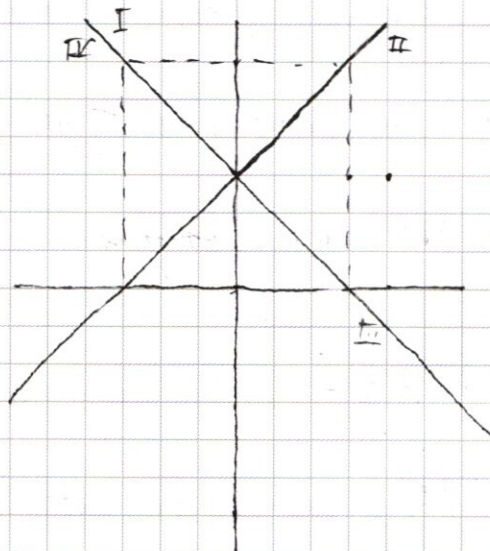
Положимо, чтобы было ровно 1 решение при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (или $(0;0)$ и $(0;6)$)

Но решения 1 уравнения симметричны также относительно $y=3$,

Значит 1 решение возможно только при $y=3$, что достигается при $a = \rho^2((4;3);(3;3)) = 1$.

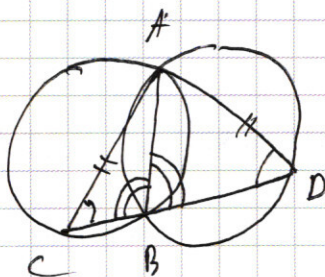
Также будет 2 решения системы при паре $(0;0);(0;6)$, то есть $a = \rho^2((4;3);(0;0)) = 25$, т.е. ~~соответно~~ согласно краевые и внутренние.

Ответ: 1; 25



6.

а) $r = 5$ радиус



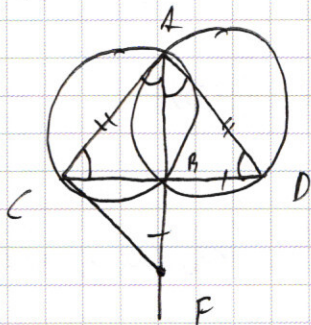
1) $\angle ACB = \angle ADB$, т.к. они опираются на равные хорды равные окружности

2) $\triangle CAD$ равнобедренный по углам при основании

3) $\angle CBA = \angle DBA$ т.к. опираются на равные хорды равных окружностей.

4) $\angle CBA = \angle DBA = \frac{\pi}{2}$, т.к. они смежные.

5) $(AB) = (BF)$, т.к. они обе $\perp$ к CD через B .



6) Т.к. $\angle CBA = \frac{\pi}{2}$, CA - диаметр

7) По т. Пифагора $CB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$

8) $CB = AD = BF$ т.к. $\triangle ACD$ равнобедренный

9) $CF = \sqrt{2} CB = AC = d = 2 \cdot r = 10$

Ответ: ~~10~~ 10

б) $BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7.1$

Близкое значение. Число некорректно.

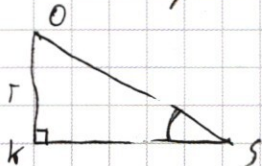
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4
Площадь сечения заданного угла соотношится как квадраты
расстояний до них от вершины.

Пусть радиус сферы r .

$$\frac{(SO - r)^2}{(SO + r)^2} = \frac{1}{4} \quad \begin{aligned} 2SO - r &= SO + r \\ SO &= 3r \end{aligned}$$

Рассмотрим $\triangle SOK$

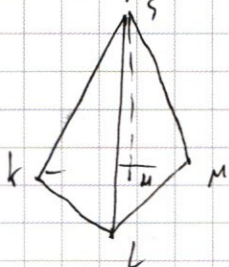


$OK = r$, т.к. K - точка на сфере
 $OK \perp KS$

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{SO} = \frac{1}{3}$$

~~То есть расстояние от центра сферы до плоскости равно~~

Рассмотрим теперь тетраэдр $SKLM$, проведем в нем
высоту SH



$$SH = SK \cdot \cos \angle KSH$$

т.к. K, L, M - точки на сфере, $(SH) = (SO)$

$$\angle KSH = \angle KSO$$

$$SH = SO \cdot \cos^2 \angle KSO$$

Пусть $S_{\text{сн}}$ - площадь сечения

$$\frac{S_{\text{сн}}}{1} = \frac{SH}{SO - r} = \frac{SO(1 - \sin^2 \angle KSO)}{SO - \frac{1}{3}SO} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}; S_{\text{сн}} = \frac{4}{3}$$

7. Число битов решения, невозможно

$$f(x) = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$f'(x) = 2^{64} - 1 - \ln 2 \cdot 2^x \text{ — линейн. функ. корень, знаем}$$

$$x \in [x_1; x_2] \text{ где } x_1 = \lceil \text{корень } f \rceil, x_2 = \lfloor \text{корень } f \rfloor$$

при этом для любого натурального x есть $\lfloor f(x) \rfloor$ битов с значением

$$y, \text{ при } x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in \mathbb{Z}. \text{ Пусть } n = x_2 - x_1 + 1$$

$$\sum_{x=x_1}^{x_2} f(x) = n(70 - 3 \cdot 2^{65}) + \sum_{x=x_1}^{x_2} (2^{64} - 1)x - \sum_{x=x_1}^{x_2} 2^x =$$

$$= n(70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1) \cdot \frac{n \cdot (x_1 + x_2)}{2} - (2^{x_2+1} - 2^{x_1})$$

$$x_1 = 6 : f(6) = 70 - 2^{65} + (2^{64} - 1) \cdot 6 - 2^6 = 70 - 6 - 64 = 0$$

$$x_2 = 70 : f(70) = 70 - 2^{65} + 70 \cdot 2^{64} - 70 - 2^{70} = 0$$

(x_1 и x_2 можно найти бинарным поиском)

$$n = 70 - 6 + 1 = 65$$

$$65(70 - 3 \cdot 2^{65}) + \frac{65 \cdot 76}{2}(2^{64} - 1) - (2^{71} - 2^6) =$$

$$= 4550 - 195 \cdot 2^{65} + 38 \cdot 2^{64} - 38 - 2^{71} + 64 =$$

$$= 2^{64}(65 \cdot 38 - 390 - 128) + 4550 + 64 - 38 = 1952 \cdot 2^{64} + 4576$$

$$\text{Ответ: } 1952 \cdot 2^{64} + 4576$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(0) = 70 - 1 - 3 \cdot 2^{65} < 0$$

$$f(64) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + (2^{64} - 1) \cdot 2^6 - 2^{64} < 0$$

$$f(32) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 2^{69} \cdot 2^5 - 2^{32} > 0$$

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

$$f(1) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 2^{64} - 1 - 2 < 0$$

$$f(2) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 2^{65} - 2 - 4 < 0$$

$$f(4) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 2 \cdot 2^{65} - 4 - 16 < 0$$

$$f(8) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 4 \cdot 2^{65} - 8 - 2^8 > 0$$

$$f(6) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 6 \cdot 2^{64} - 6 - 2^6$$

$$3 \cdot 2^{65} + 3 \cdot 2^{65} = 0$$

$$70 - 6 - 64 = 0$$

$$f(64) = 70 + 2^{64} (6 - 6) - 64 \cdot 2^{64}$$

$$f(64) = 70 + 2^{64} (-1 + 6 + 6)$$

$$f(65) = 70 + 2^{65} (-1 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6)$$

$$f(100) = 70 + 2^{64} (-6)$$

$$f(70) = 70 + 2^{64} (-6 + 70 - 2^6) - 70$$

$$70 - 64 - 1 = 0$$

$$f(65) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + (2^{64} - 1) \cdot 8 \cdot 5 - 2^{65} - 8 \cdot 2^{64} + 65 \cdot 2^{64}$$

$$\log_2 x = x - 64$$

$$f(128) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 2^7 (2^{64} - 1) - 2^{128} < 0$$

$$f(128) = 70 - 3 \cdot 2^{65} + 66 (2^{64} - 1) - 2^{66}$$

$$x \cdot 2^{64} = 3 \cdot 2^{65} + x \cdot 2^{64} - 2^x \approx 0$$

$$2^{64} (x - 3) = 2^x$$

$$x - 3 = 2^{x-64}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 65 \\ - 70 \\ \hline 4550 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 65 \\ - 3 \\ \hline 195 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ - 2 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 195 \\ - 2 \\ \hline 390 \end{array}$$

$$71 - 64 = 7$$

$$2^7 = 128$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 38 \\ - 65 \\ \hline 190 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 390 \\ + 128 \\ \hline 518 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 84 \\ - 38 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 228 \\ - 228 \\ \hline 2470 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \cdot 10 \\ 2470 \\ - 518 \\ \hline 1952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4550 \\ + 26 \\ \hline 4576 \end{array}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



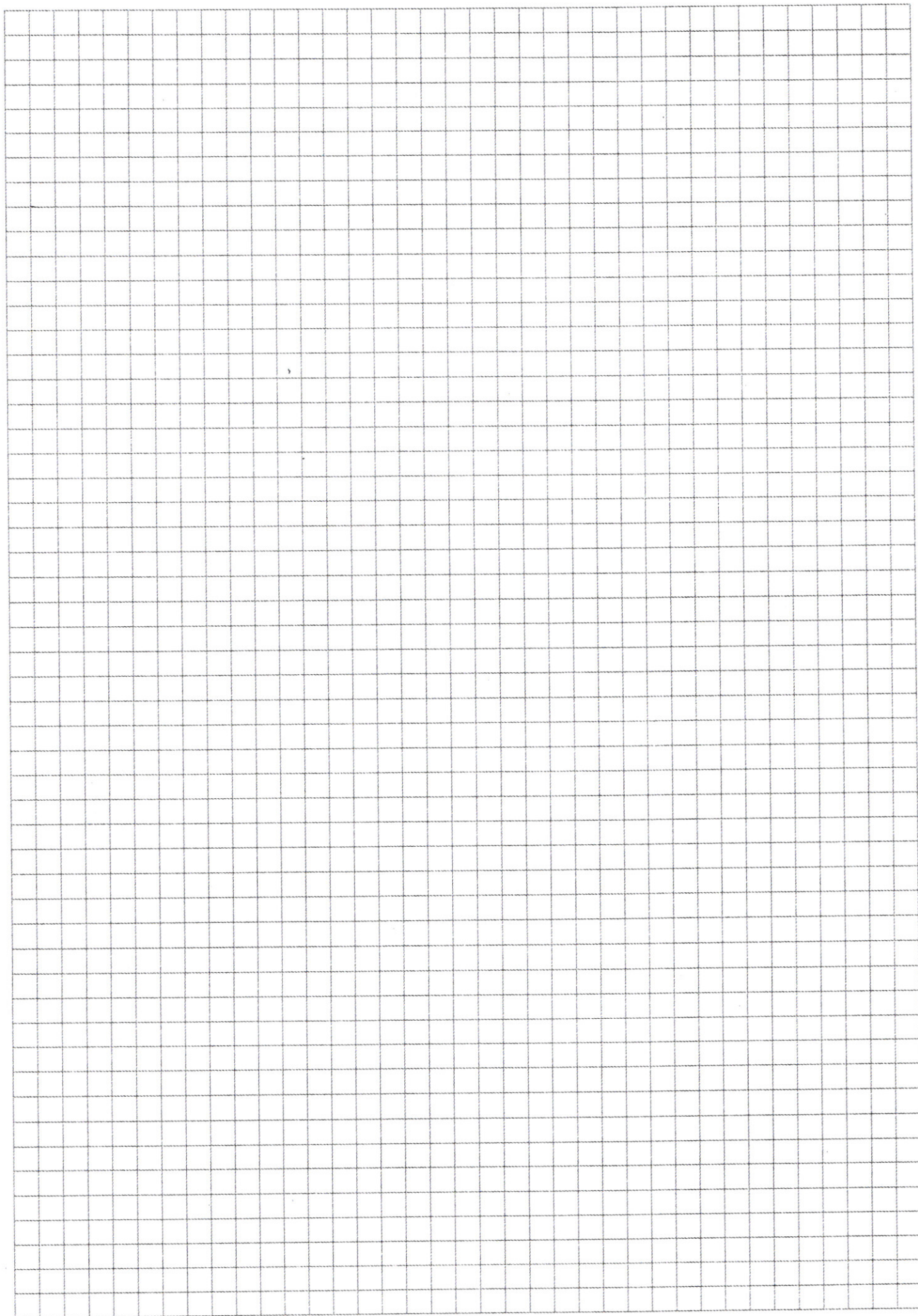
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

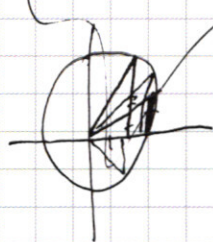
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



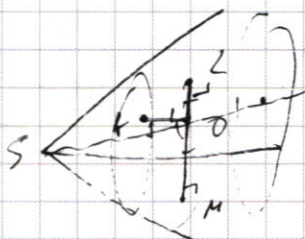
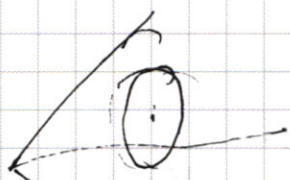
$$\sin 2 = \sin R = \frac{2 \sin \frac{2+R}{2} \cos \frac{2-R}{2}}{2} \quad 70 + (2^{64} - 1) \times 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$



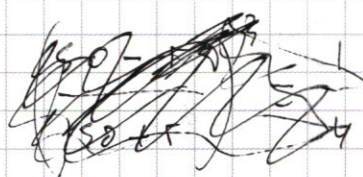
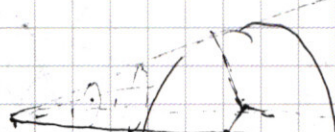
$$\begin{aligned} \sin 11x - \sin 11x + \cos 11x - \cos 11x &= \\ &= 2 \sin 7x \cos 2 \sin(-4x) \cos 4x + 2 \cos 4x \\ &= \sum_{x=4}^{20} (2^{64} - 1) \times 2^x + 11 \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 = 56 \\ 56 \\ \hline 160 \\ 160 \\ \hline 6720 \end{array}$$

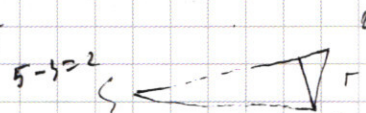
4.



$$70 + (2^{64} - 1) \times 2^x - 2^x - 1 \cdot 2^{65}$$



$$\sum_{x=4}^{20} (70 + (2^{64} - 1) \times 2^x - 2^x - 1 \cdot 2^{65}) = \{ \leq y \leq 5 \}$$



$$\begin{aligned} h &= 5r \cos 2 \\ \frac{h}{50-r} &= \frac{50 \cdot \cos^2 2}{50 - \frac{1}{5} 50} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

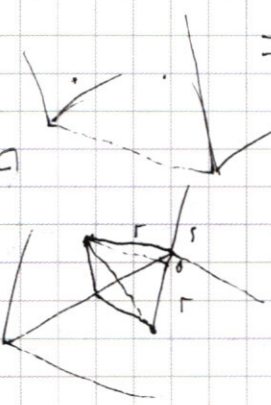
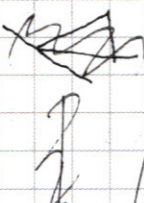
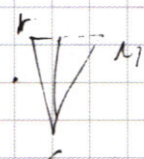
$$\frac{50-r}{50+r} = \frac{1}{2}$$

$$250 - 2r = 50 + r$$

$$50 = 3r$$

$$\frac{h_1}{50} = \frac{5k^2 - R^2}{5k^2 + r^2 - 2R^2 + 2\sqrt{(5k^2 - R^2)(r^2 - R^2)}}$$

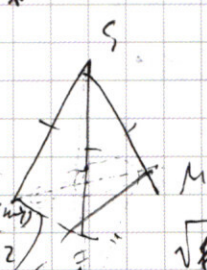
$$S_1 =$$



$$\frac{h_1}{50} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \cdot \frac{\sqrt{5k^2 - R^2}}{\sqrt{5k^2 - R^2} + \dots}$$



$$\begin{aligned} n \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65}) + \\ + (2^{64} - 1) \left(nx + \frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\sqrt{5k^2 - R^2} = h_1$$

$$\sqrt{r^2 - R^2} = h_2$$

$$\sqrt{5k^2 - R^2} + \sqrt{r^2 - R^2} = 50$$

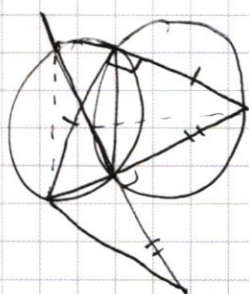
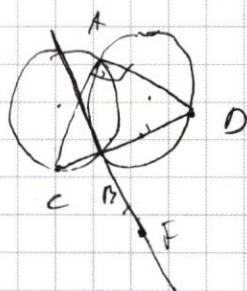
$$h_1 + h_2 = 50$$

$$\begin{aligned} (2^{64} - 1) \times 2^x + (2^{64} - 1) \times (x+1) - 2^{x+1} = \\ \frac{n(n-1)}{2} (2^{64} - 1) (2x+1) - 2^x - 2^{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 - 2 \cdot \frac{9}{4} - 7 \cdot \frac{3}{2} &= \\ 27 - 18 \cdot 2 - 21 \cdot 4 + 12 \cdot 8 &= \\ 27 - 36 - 84 + 96 &= 9 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Q) 5-5



2.81

$$8! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 24.30.56 =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ - 10 \\ \hline 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} = 720 \cdot 56 \\ 14 \\ 56 \\ - 720 \\ \hline 112 \\ 222 \\ \hline 640320 \end{array}$$

~~$f(x) = \frac{2}{2} - \frac{6}{2}$~~

$$f(4) = 2^4 - 2^{\cancel{6}} + 2^2 + 3 \cdot 2^{\cancel{6}} - 20$$

$$f(8) = 2^8 - 42^{\cancel{64}} + 2^3 + 3 \cdot 2^{65} - 2000$$

$$f(8) = 2^8 = 256$$

$$f(x) = 2^x - (2^{64} - 1)x + 3 \cdot 2^{65} - 70 \leq 0$$

$$f'(x) = 142 \cdot 2^x - (2^{64} - 1) \geq 0$$

$$2^x \geq \frac{2^{64} - 1}{142}$$

~~$\log_2(2^{64}) = \log_2(2^{64})$~~
 $\log_2(2^{64}) = 64$

$$f(64) = 2^{64} - 2^{64} \cdot 2^6 + 2^{64} \cdot 3 \cdot 2^{65} - 70 =$$

$$= 2^{65} \left(3 + \frac{1}{2} - 32 \right) - 1 < 0$$

$$f(32) = 2^{32} - (2^{64} - 1) \cdot 2^5 + 32 \cdot 2^{65} - 70 \cdot 2^{66}$$

$$= 2 \left(1 - 2 + 2 + 3 \cdot 2 \right) = 10 < 0.65 \cdot \frac{16}{49} = \frac{16}{52}$$

$$f(2) = 1 - 2^{64} + 1 + 3 \cdot 2^{65} - 2^{70} > 0$$

$$f(16) = 2^{16} \left(1 - 2^{-68-16} + 2^{-4-168} + 3 \cdot 2^{-65-16} \right) - 720$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{y}{x} \right)^{19x} = y^{298x} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 16y = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2(\lg x + \lg y)}$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x=y: \quad x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4K(x-2) = 0$$

$$x = y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3\lg x - 2\lg y}{y} = x$$

$$(3 \lg x - 2 \lg y) \lg y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x = 2 \lg x \lg x$$

$$8 - 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 12 = 3 \lg x \times \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2 x$$

$$x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

~~$$y^2(y-1) - 7(y-1) - 2 = 0$$
$$(y^2 - 2)(y - 1) = 2$$~~

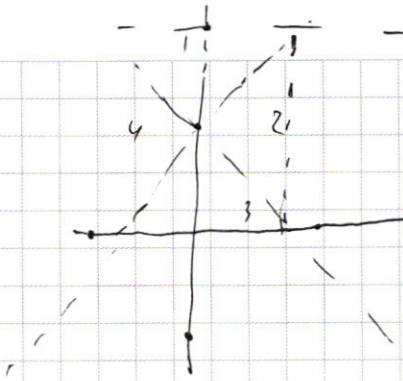
$$lg^1x - 3lgylgx + 2lg^2y = 0$$

$$64 - 2 \cdot 16 - 28 + 12; D = 5 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$= 32 - 21 + 11 = 22$$

$$\lg x_{12} = \frac{3 \lg y + \lg y}{2} = \begin{bmatrix} \lg y \\ 2 \lg y \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$



$$y-3-x \geq 0 \\ y \geq x+3$$

$$y-3+x \geq 0 \\ y \geq -x+3$$

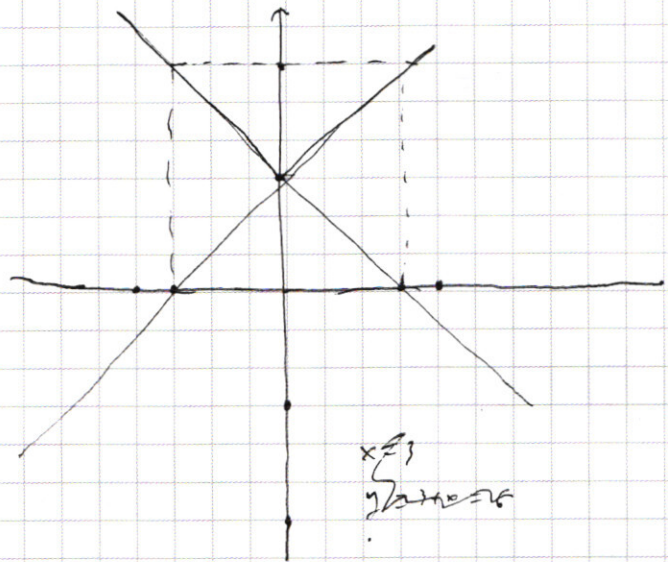
$$1: y-3-x+y-3+x=6 \\ 2y-6=6$$

$$y=6$$

$$2: y-3+x-y+3+x=6 \\ x=3$$

$$3: -y+3+x-y+3-x=6 \\ 2y=0 \Rightarrow y=0$$

$$4: y-3-x-y+3-x=6 \\ -2x=6 \\ x=-3$$



$$1: y=6: (|x|-4)^2 + 9 = a \\ |x| = \sqrt{a-9} + 4$$

$$1, 3: |x| = \sqrt{a-9} + 4 \\ x \in [-3; 3]$$

$$\sqrt{a-9} + 4 \leq 3 \quad \emptyset$$

$$2: x=3: (|y|-3)^2 = a-1 \\ |y| = \sqrt{a-1} + 3$$

$$2, 4: |y| = \sqrt{a-1} + 3$$

$$|y| \leq 6 \\ \sqrt{a-1} + 3 \leq 6$$

$$a-1 \leq 9 \\ a \leq 10$$

$$3: y=0: (|x|-4)^2 = a-9 \\ |x| = \sqrt{a-9} + 4$$

$$4: x=-3: (|y|-3)^2 = a-1 \\ |y| = \sqrt{a-1} + 3$$

$$p((|x|, |y|); (4, 1))$$